Sammlung algebraischer Aufgaben für gewerbliche und technische Lehranstalten

nebst einer Abhandlung über das Stabrechnen

Gleichungen (3. Teil); Proportionalität; Vermische Aufgaben; Summen; Exponentialgleichungen, geometrische Reihen, Zinseszins

Burg, Robert

Frankfurt a.M., 1905

urn:nbn:de:hbz:466:1-78546

Sammlung algebraischer Aufgaben

für

gewerbliche und technische Lehranstalten

nebst einer

Abhandlung über das Stabrechnen.

Im Auftrage des Schulvorstandes
der städtischen gewerblichen Fortbildungsschule zu Frankfurt a. M.
verfaßt von

Dr. Robert Burg,
Oberlehrer.

Viertes Heft.

Gleichungen (3. Teil); Proportionalität; Vermischte Aufgaben; Summen;
Exponentialgleichungen, geometrische Reihen, Zinseszins.

Frankfurt a. M.
Verlag von Franz Benjamin Auffarth.
1905.

Vorbemerkungen zum vierten Heft.

Das vorliegende vierte Heft behandelt in den Textaufgaben das ganze Gebiet der Planimetrie, Stereometrie, Physik sowie der Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper. Von der Stereometrie und ebenso von der Festigkeitslehre wurden jedoch im wesentlichen nur diejenigen Aufgaben gebracht, deren Behandlung mittelst unendlicher Summation (Abschn. XXIII.) erfolgt.

Die Anordnung der Textaufgaben nach ihrem stofflichen Inhalt (siehe 3. Seite des Umschlages) ist auch für das vierte Heft durchgeführt.

Ein besonderer Abschnitt (XX.) behandelt die Proportionalität der Größenarten; der Verfasser hat hier versucht, ein System der gebräuchlichsten physikalischen und technischen Koeffizienten aufzustellen und die scheinbare Willkür in den Maßeinheiten dieser Koeffizienten und in ihrer Beziehung zu anderen technischen Einheiten durch die Art der Proportionalität der in Betracht kommenden Größen zu erklären.

Robert Burg.

Übersicht der Textaufgaben des vierten Heftes.

Abschnitt:	XIX.	XX.	XXI.	XXII.	XXIII.	XXIV.
Kräfte mit demſ. Angriffspunkt; einf. Maſchinen.				1—16. 28. 33.	105.	13—16.
Drehmoment, Hebel, Schwerpunkt.			11.	8—11. 19. 34—39.	6. 11. 25—39. 41. 43. 45. 51. 53—71. 74. 76—80. 82—103. 106—110.	10.
Bewegungslehre.	12.	29.	2. 3. 7. 9. 45. 47. 52—55. 61. 64.	17—33. 57—61.		11.
Arbeit; Effekt; Energie; Wirkungsgrad.	10—17.		3. 7. 9.	2—7. 19. 20. 29—33. 55. 56.	12. 48. 72.	13—16.
Prozent; Feingehalt; Zins.			2. 6. 9.	40—44.		23—47.
Geometrie.	5—9.	42—47.	2. 11. 16. 17. 19—21. 61. 62. 67. 68.	46. 48. 50. 85—107.	7. 13. 33. 35—47. 104. 110.	12.
Trägheitsmoment.			61. 62.		48—63. 66—81. 87. 90—96. 102.	
Spannung; Feſtigkeitslehre.	18—21.		11. 17. 22—26.	50—56.	82—103. 105.	
Relatives und ſpezifiſches Gewicht.			3. 7. 9. 38.	45—49. 74. 107.	8. 47.	
Flüſſigkeits- und Gasmechanik.	17.		33—38. 45. 49—51. 63.	57—75.	7. 13. 64—71. 105.	3—5. 17—22.
Wärme.			11. 17. 18. 27—42.	73—75.	9. 10.	
Optik.			61. 65. 66.			
Elektrizität.	22—25.		45. 48. 56—58.	76—84.	14.	

Aug. Weisbrod, Frankfurt a. M.

Sammlung algebraischer Aufgaben

für

gewerbliche und technische Lehranstalten

nebst einer

Abhandlung über das Stabrechnen.

Im Auftrage des Schulvorstandes
der städtischen gewerblichen Fortbildungsschule zu Frankfurt a. M.
verfaßt von

Dr. Robert Burg,
Oberlehrer.

Viertes Heft.

Gleichungen (3. Teil); Proportionalität; Vermischte Aufgaben; Summen;
Exponentialgleichungen, geometrische Reihen, Zinseszins.

Frankfurt a. M.
Verlag von Franz Benjamin Auffarth.
1905.

XIX. Wiederholung und Erweiterung.

§ 1.

1. Vereinfache:

a) $(a^2+ab+b^2)(a-b)$; *b)* $(a^2-ab+b^2)(a+b)$;

c) $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b)$; *d)* $(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)$.

2. Verwandle in ein Produkt:

a) a^2-b^2; *b)* a^3-b^3; *c)* a^3+b^3; *d)* a^4-b^4.

3. Es sei $a:b=c:d$; verwandle in ein Produkt:

a) $ac-bd$; *b)* a^2c-b^2d; *c)* a^2c+b^2d; *d)* a^3c-b^3d.

4. Es sei $a:b=c^2:d^2$; beweise, daß dann $ac-bd=(c-d)(a+b+\sqrt{ab})$ ist.

5. Leite den Inhalt F eines Paralleltrapezes mit den Parallelseiten g_1 und g_2 und der Höhe h durch Subtraktion ähnlicher Dreiecke ab. (Aufg. 3a.)

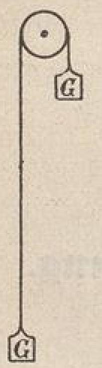
6. Wie groß ist der Mantel (M) eines Kegelstumpfes, dessen Grundradius $= R$, dessen Deckradius $= r$ und dessen Seitenlänge $= s$ ist? (Aufg. 3a).

7. Wie groß (V) ist der Rauminhalt einer Pyramide oder eines Kegels von der Grundfläche $G = 18$ *qdm* und der Höhe $h = 5$ *dm*? Anl. $V = \frac{1}{3}$ G. h. (Vgl. XXIII, Aufg. 33.)

8. Wie groß ist der Rauminhalt eines Kegelstumpfes, dessen Grundradius $= R$, dessen Deckradius $= r$ und dessen Höhe $= h$ ist? (Aufg. 3b.)

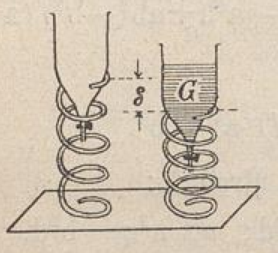
9. Wie groß ist das Volumen eines Pyramidenstumpfes, dessen Grundfläche G_1, dessen Deckfläche G_2 und dessen Höhe $= h$ ist? (Aufg. 4.)

§ 2.

10. 

Über eine feste Rolle ist ein Faden gelegt, der an jedem Ende ein Gewicht G trägt. Welcher Art ist die Bewegung, welche ein Stoß an diesem System hervorruft, wenn keine Bewegungswiderstände vorhanden sind? Welche Arbeit (A) wird am steigenden Gewicht G geleistet, während das andere Gewicht G um h sinkt? Wie groß ist hiernach die Arbeitsfähigkeit oder Energie der Lage eines Körpers vom Gewichte G, welcher um die Höhe h sinken kann?

11. Eine Spiralfeder trägt ein mit einem Hahn versehenes Wassergefäß und ist dadurch um δ zusammengepreßt worden, daß Wasser vom



Gewichte G in das Gefäß geschüttet worden ist. Welche Arbeit (A) leistet die Feder, wenn man das Wasser tropfenweise ausfließen läßt? Wie groß ist hiernach die Arbeitsfähigkeit oder Spannungsenergie der zusammengedrückten Feder? Anmerkung: Das Gewicht des Gefäßes und der Feder soll nicht berücksichtigt werden.

12. Ein Körper vom Gewicht G wird mit der Geschwindigkeit c vertikal nach oben geworfen. Wie hoch (h) steigt derselbe ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand? Wie groß ist hiernach die Arbeitsfähigkeit oder Energie der Wucht (W) des Körpers im Augenblick des Wurfes?

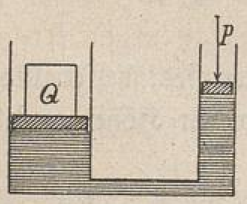
13. Wie nennt man allgemein die Fähigkeit eines Körpers, Arbeit zu leisten?

14. In welcher Maßeinheit ist jede Energie meßbar?

15. Nenne die wichtigsten Energieformen.

16. Wie lautet das Energiegesetz?

17. Zwei durch Kolben verschlossene kommunizierende Wasserzylinder



haben die Querschnitte F und f. Auf dem größeren Kolben lastet das Gewicht Q. Um wieviel (h) muß der kleinere Kolben herabgedrückt werden, damit Q um H gehoben wird? Welche Kraft (P) ist hierzu nach dem Energiegesetz am kleineren Kolben erforderlich, wenn die Bewegungshindernisse, sowie Kolben- und Wassergewicht nicht berücksichtigt werden?

§ 3.

18. An einer Stange vom Durchmesser d = 30 *mm* wirkt eine Zugkraft P = 4242 *kg*. Wie groß (σ) ist die auftretende Spannung, d. h. die innere Gegenkraft pro *qcm*? Anl. $\sigma = \frac{P}{F}$.

19. Ein rechteckiges Hohlprisma hat die äußeren Kantenlängen 40 *cm* und 50 *cm* und die Wandstärke 8 *mm*. Welche Spannung (σ) ruft ein zentraler Druck von 80 *t* hervor?

20. Ein gußeiserner Untersatz hat einen ringförmigen Querschnitt von der lichten Weite d = 11,8 *cm* und der Dicke δ = 16 *mm*. Wie groß (P) darf die Belastung sein, wenn als zulässige Druckspannung für Gußeisen k_d = 600 *kg* pro *qcm* angenommen wird?

21. Eine schmiedeeiserne Zugstange soll einen Zug P = 2100 *kg* aufnehmen. Wie groß (F) muß ihr Querschnitt sein, wenn die zulässige Zugspannung für Schmiedeeisen k_z = 875 *kg* pro *qcm* angenommen wird?
a) Wie groß (a) muß die Seite bei quadratischem Querschnitt sein?
b) Wie groß (d) muß der Durchmesser bei kreisförmigem Querschnitt sein?

---

22. Welche Spannungsdifferenz (δ) ist erforderlich, um einen elektrischen Strom i = 7 *Amp.* durch einen Widerstand w = 3 *Ohm* zu treiben? Anl. Gesetz von Ohm: $\delta = i \cdot w$.

23. Die äußere Leitung eines Batteriestromes hat (von der positiven bis zur negativen Klemme) den Widerstand W = 6 *Ohm*. Wie groß (i) ist die Stromstärke bei einer Klemmenspannung K = 20 *Volt*?

24. Zwischen den Endpunkten eines Leitungsstückes, welches der Strom i = 2,45 *Amp.* durchfließt, herrscht eine Spannungsdifferenz δ = 4,23 *Volt*. Wie groß (w) ist der Widerstand dieses Leitungsstückes?

25. Eine Batterie, deren innerer Widerstand R ist, liefert bei einem äußeren Widerstand W den Strom i. Wie groß ist die Klemmenspannung K und der Spannungsverbrauch δ_i im Innern der Batterie? Wie groß ist die elektromotorische Kraft E derselben? Anl. $E = K + \delta_i$.
a) R = 0,96 *Ohm*; W = 2,54 *Ohm*; i = 1,2 *Amp.*

XX. Gleichungen.

(Dritter Teil.)

§ 1.*)

1—10. Löse nachfolgende Gleichungen nach x auf:

1. *a)* $\left(\frac{a}{x} + b\right)(a + bx) = b^2(x + 2a)$; *b)* $\frac{x}{a} \cdot \frac{x + a}{2a} = 1$.

2. *a)* $\frac{x^2 + x + 1}{x + 2} = \frac{2x^3 - 2x^2 + x}{2x^2 - 3}$; *b)* $3 = \frac{x - 1}{1 - x}$.

3. $(12x - 5)^2 + (5x + 1)(7x + 5) = 180x^2 - 88x - 6$.

4. *a)* $\frac{1}{a + x} + \frac{1}{a + 2x} = \frac{5}{6a}$; *b)* $a^2b^2x^2 + x(a - b) = \frac{1}{ab}$.

5. $\frac{a^2x^2 + 2abx - a^2 + b^2}{(a + 2)x + b - c} = (a - 2)x + b + c$.

6. *a)* $\frac{ax^2 + bx + 3a}{bx^2 - 4a} = \frac{ax + b}{bx + a}$; *b)* $\frac{ax^2 + 9bx + 3a}{bx^2 - 4a} = \frac{ax + 9b}{bx + a}$.

7. *a)* $\sqrt{7x - 5} + 11 = \sqrt{7x + 16} - 10$; *b)* $x = \sqrt{18(110 - 3x^2)}$.

8. *a)* $7\sqrt{3x} = 2x - 12$; *b)* $\sqrt{x + 5} + \sqrt{10x + 16} = 3$.

9. *a)* $\frac{x - a}{\sqrt{1 + x^2}} = \sqrt{\frac{1 + a^2}{2}}$; *b)* $\frac{3x + 2}{\sqrt{4x + 3}} = \frac{\sqrt{9x + 5}}{2}$.

10. *a)* $\sqrt{2x + 20} + \sqrt{x + 8} = 2$; *b)* $\sqrt{3x + 3} = 4 + \sqrt{x - 1}$.

11—17. Löse nachfolgende Gleichungen nach x und y auf:

	a)	*b)*
11.	$11x + 417y = 560$ $9x + 100 = 217y$	$51x + 37y = 227$ $49x - 85y = -23$
12.	$37x + 36y = 43$ $87x + 89y = 75$	$83x - 80y = 255$ $67x - 63y = 209$

	a)	*b)*	*c)*
13.	$3x = 7y$ $x^2 + xy = 70$	$5y = 6x + 10$ $x^2 + 2x = xy - 5$	$5x - 4y = 81$ $(x + y)^2 = 81$
14.	$15x^2 + 7xy = 4064$ $x^2 - 7xy = 32$	$5x^2 + 3y^2 = 17$ $8x^2 - y^2 = 4$	$x(3x - 2y) = 5$ $x(4x - 3y) = -5$
15.	$x \cdot y = 405$ *qcm* $x : y = 5 : 9$	$\frac{x + y}{x - y} = \frac{7}{4}$ $x^2 - y^2 = 112$	$x(3x + 7y) = 138$ $y(3x + 7y) = -54$

---

*) Dieser § bildet die Fortsetzung der Abschnitte X, XI, XIII § 6, XVI und XVIII. Vermischte Textaufgaben folgen im Abschnitt XXII.

16. *a)* $\left| \begin{array}{c} x^2 - xy = 304 \\ xy - y^2 = 48 \end{array} \right|$ *b)* $\left| \begin{array}{c} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2a \\ a^2x + y^2 = 21a^4 \end{array} \right|$

17. *a)* $\left| \begin{array}{c} x^2(y+3x) = 207 \\ x^2(y-3x) = 45 \end{array} \right|$ *b)* $\left| \begin{array}{c} x^2(x+y) = 45 \\ x^2(2x-3y) = 0 \end{array} \right|$ *c)* $\left| \begin{array}{c} x^2(x-y) = 25 \\ x^2(2x+3y) = 550 \end{array} \right|$

18—22. Löse nachfolgende Gleichungen nach x, y und z auf:

18. *a)* $\left| \begin{array}{c} y = 2x - z + 1 \\ 3x - 5y + 7z = 16 \\ 7x + 3y - z = 92 \end{array} \right|$ *b)* $\left| \begin{array}{c} 11x + y - z = 16 \\ 5x + y + z = 50 \\ 3x + 2y - z = 17 \end{array} \right|$

19. *a)* $\left| \begin{array}{c} 2y + z = 5x \\ y = 3 + 2x \\ y + 2z = 11 \end{array} \right|$ *b)* $\left| \begin{array}{c} 12x - 17y + 13z = 127 \\ 3x + 15y - 20z = -119 \\ 20x - 11y + 17z = 141 \end{array} \right|$

20. *a)* $\left| \begin{array}{c} y - x = z - y \\ 3x + y - 2z = a + 3b \\ 5x - 3y + z = 5a + 8b \end{array} \right|$ *b)* $\left| \begin{array}{c} \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{6}{z} - \frac{7}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{7}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} = 3 \end{array} \right|$

21. *a)* $\left| \begin{array}{c} x^2 + y^2 = 122 \\ y^2 - z^2 = 40 \\ z^2 - x^2 = 80 \end{array} \right|$ *b)* $\left| \begin{array}{c} xy = 6 \\ yz = 12 \\ zx = 8 \end{array} \right|$ *c)* $\left| \begin{array}{c} x^2 + y^2 - z^2 = 5 \\ y^2 + z^2 - x^2 = 45 \\ z^2 + x^2 - y^2 = 27 \end{array} \right|$

22. *a)* $\left| \begin{array}{c} xy + yz = -24 \\ yz + zx = 21 \\ zx + xy = 25 \end{array} \right|$ *b)* $\left| \begin{array}{c} 3x + 35z = 7(2y + 5z) \\ 4z + 6x = 5(3z - 2y) \\ x^2 - 9y^2 - z^2 = 1479 \end{array} \right|$

§ 2.

23—25. Löse nachfolgende Gleichungen nach x und y auf:

23. *a)* $\left| \begin{array}{c} 3x = y^2 \\ x + y = 18 \end{array} \right|$ *b)* $\left| \begin{array}{c} x = 3y^2 \\ x + y^2 - 12y = 40 \end{array} \right|$ *c)* $\left| \begin{array}{c} 144 + x^2 = y^2 \\ y : (x - 4) = 3 : 1 \end{array} \right|$

24. *a)* $\left| \begin{array}{c} 3x = y + 5 \\ \frac{6x}{y} = \frac{2y+1}{2} \end{array} \right|$ *b)* $\left| \begin{array}{c} y^2 - x^2 = 11025 \\ \frac{y-11}{x-11} = 4 \end{array} \right|$ *c)* $\left| \begin{array}{c} y^2 - 7x = 9 \\ \frac{y-x}{y+x} = \frac{3}{5} \end{array} \right|$

25. *a)* $\left| \begin{array}{c} x^2 - y^2 = 5(b^2 - a^2) \\ 2x - y = a + 4b \end{array} \right|$ *b)* $\left| \begin{array}{c} x - y = b - a \\ cx^2 + dy^2 = ca^2 + db^2 \end{array} \right|$

26—28. Löse nachfolgende Gleichungen nach x und y auf:

26. *a)* $$\left|\begin{array}{c} x = \frac{7y-4}{2+y} \\ 3xy - 13y = 14 \end{array}\right|$$ *b)* $$\left|\begin{array}{c} x = \frac{15}{y-6} \\ 4x + \frac{11}{y} = 13 \end{array}\right|$$ *c)* $$\left|\begin{array}{c} 5x + \frac{2}{y} = 31 \\ 3y + \frac{25}{x} = 6 \end{array}\right|$$

27. *a)* $$\left|\begin{array}{c} 3y - xy = 5 \\ 4xy - 18 = 11x \end{array}\right|$$ *b)* $$\left|\begin{array}{c} (x+y)\,ab = (a-b)^2 \\ xy = -(x+y) \end{array}\right|$$ *c)* $$\left|\begin{array}{c} y = \frac{24}{x} \\ x^2 = 4 + 2y^2 \end{array}\right|$$

28. $$\left|\begin{array}{c} x^2 + y^2 = 50 \\ 2xy = x^2 - 75 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} x^2 + xy = 418 \\ xy - y^2 = 48 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} 3x^2 + xy = 308 \\ 3xy + 4y^2 = -65 \end{array}\right|$$

29. Das Aufschlagen eines in einen Schacht fallenden Steines wird oben nach der Zeit t gehört. Wielange (x) brauchte der Stein zum Fallen und wielange (y) brauchte der Schall?

§ 3.

30—35. Löse nachfolgende Gleichungen nach x und y auf:

30. *a)* $$\left|\begin{array}{c} 17x^2 - 5x + 11y = 36 \\ x^2 + 3x + 11y = -12 \end{array}\right|$$ *b)* $$\left|\begin{array}{c} 5x^2 + 5xy - 3y = 0{,}2 \\ 3x^2 + 3xy - 5y = -1{,}8 \end{array}\right|$$

31. $$\left|\begin{array}{c} x^2 + 3xy + 2y^2 = 168 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 32 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} x^2 + 5x + xy - y^2 = 74 \\ 3x^2 - 7x - xy + y^2 = 388 \end{array}\right|$$

32. *a)* $$\left|\begin{array}{c} \frac{5}{x} + \frac{3y}{2} = 1 \\ \frac{5}{3x-2} - y = \frac{2}{3} \end{array}\right|$$ *b)* $$\left|\begin{array}{c} \frac{20}{x} - \frac{20}{y+3} = 3 \\ \frac{7}{3x} + \frac{17}{y+5} = 2 \end{array}\right|$$ *c)* $$\left|\begin{array}{c} \frac{x+5}{2} = \frac{7}{y+9} \\ 14 + xy = 0 \end{array}\right|$$

33. $$\left|\begin{array}{c} 7x - 36 = xy \\ y - 25 = 2xy \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} 19x = 2xy + 11 \\ 8y = xy - 27 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} 195 - 56x = 169xy \\ 13y + 39 = 15xy \end{array}\right|$$

34. $$\left|\begin{array}{c} 3x = \frac{8y+19}{y+3} \\ 3y = \frac{5x+19}{x-5} \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} 3x + \frac{15}{y} = 9 \\ 4y - \frac{18}{x} = 11 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} \frac{20}{x} = \frac{20}{y} + 1 \\ \frac{56}{x+3} = \frac{56}{y+3} + 1 \end{array}\right|$$

35. $$\left|\begin{array}{c} x^2 + y^2 = 5 \\ (3+x)^2 + (6+y)^2 = 80 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} x^2 + y^2 = 3 \\ (x+y)^2 + y^2 = 3 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} x^2 + y^2 = 6 \\ (x+y)^2 + y^2 = 3 \end{array}\right|$$

36—41. Löse nachfolgende Gleichungen nach x und y auf:

36. *a)* $$\left|\begin{array}{c} x^2 + y^2 = 73 \\ 2xy = 48 \end{array}\right|$$ *b)* $$\left|\begin{array}{c} x^2 = 101 - y^2 \\ xy = 10 \end{array}\right|$$ *c)* $$\left|\begin{array}{c} x(x+4y) = 517 - y^2 \\ xy = 78 \end{array}\right|$$

37. *a)* $\left|\begin{matrix} x^2 + y^2 = 5\,(a^2 + b^2) \\ xy = 2a^2 + 3ab - 2b^2 \end{matrix}\right|$ *b)* $\left|\begin{matrix} xy = 35 \\ x - y = 2 \end{matrix}\right|$ *c)* $\left|\begin{matrix} x + y = 13 \\ xy = 42 \end{matrix}\right|$

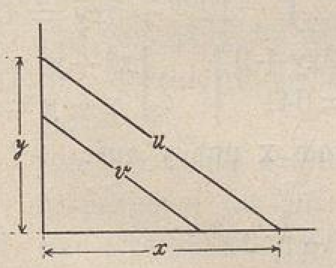
38. *a)* $\left|\begin{matrix} xy = a^2b^2 + (a - b)^2\,(a + b - 1) \\ x - y = (a - b)\,(a + b - 2) \end{matrix}\right|$ *b)* $\left|\begin{matrix} x + y = 4 \\ x^2y + xy^2 = -84 \end{matrix}\right|$

39. *a)* $\left|\begin{matrix} 3x + 2y = 4 \\ xy = -450 \end{matrix}\right|$ *b)* $\left|\begin{matrix} 5y - 6x = 7 \\ xy = 15 \end{matrix}\right|$ *c)* $\left|\begin{matrix} xy = 18 \\ (x + 3)\,(y - 1) = xy \end{matrix}\right|$

40. $\left|\begin{matrix} x^2 + y^2 = 50 \\ x - y = 6 \end{matrix}\right|$ $\left|\begin{matrix} x^2 + y^2 = 130 \\ x + y = 14 \end{matrix}\right|$ $\left|\begin{matrix} x^2 + y^2 = 2\,(a^2 + b^2) \\ x + y = 2a \end{matrix}\right|$

41. *a)* $\left|\begin{matrix} x^2 + y^2 = 970 \\ (x-11)^2+(y+11)^2=596 \end{matrix}\right|$ *b)* $\left|\begin{matrix} x^3-y^3=936 \\ x - y = 6 \end{matrix}\right|$ *c)* $\left|\begin{matrix} x^3+y^3=65 \\ x+y=5 \end{matrix}\right|$

42. In einen Kreis vom Durchmesser d soll ein Rechteck vom Inhalt F eingezeichnet werden. Wie groß müssen die Rechtecksseiten sein?

43. 

Zwischen die Schenkel eines rechten Winkels sollen 2 parallele Strecken u = 30 *cm* und v = 20 *cm* so gelegt werden, daß das entstehende Paralleltrapez den Inhalt F = 120 *qcm* hat. Wie groß müssen die größeren Abschnitte (x und y) auf den Schenkeln des rechten Winkels sein?

44. Eine rechteckige Blechtafel von 12 *cm* Breite und 26 *cm* Länge soll durch einen Schnitt in zwei einander ähnliche (nicht kongruente) Rechtecke geteilt werden. Wie kann dies geschehen?

45. In ein Rechteck von den Seiten a = 27 *dm* und b = 15 *dm* soll ein Rechteck eingezeichnet werden, dessen Ecken auf den Seiten des ersten Rechtecks liegen, so daß a in zwei Teile $a_1 = 1$ *dm* und $a_2 = 26$ *dm* geteilt wird. Wie groß (b_1 und b_2) sind die Teile von b? Wie groß (F_1) ist der Inhalt des eingezeichneten Rechtecks?

46. In ein Quadrat von der Seite a = 973 *cm* soll ein Parallelogramm von den Seiten b = 233 *cm* und c = 1157 *cm* eingezeichnet werden, dessen Ecken auf den Quadratseiten liegen. Wie groß sind die Katheten des durch b abgeschnittenen rechtwinkligen Dreiecks?

47. Ein Hohlwürfel von der Dicke δ soll das Volumen V haben. Wie groß (A und a) müssen die Würfelkanten sein?

§ 4.

48—53. Löse nachfolgende Gleichungen nach x und y auf:

	a)	b)
48.	$\left\lvert \begin{array}{c} (x+y)^2+8(x+y)=345 \\ (x-y)^2-6(x-y)=55 \end{array} \right\rvert$	$\left\lvert \begin{array}{c} x^2-6x+y^2=6y-2xy+160 \\ x^2y^2-6xy=3712 \end{array} \right\rvert$
49.	$\left\lvert \begin{array}{c} 6xy+x^2y^2=7 \\ x-y=8 \end{array} \right\rvert$	$\left\lvert \begin{array}{c} x^2+y^2=8(x-y)+138 \\ xy=77 \end{array} \right\rvert$

	a)	b)	c)
50.	$\left\lvert \begin{array}{c} x^2+y^2=68 \\ xy+x+y=-10 \end{array} \right\rvert$	$\left\lvert \begin{array}{c} x+y=xy \\ x^2+y^2=5x^2y^2 \end{array} \right\rvert$	$\left\lvert \begin{array}{c} x^2-2x+y^2=52 \\ xy-y=14 \end{array} \right\rvert$
51.	$\left\lvert \begin{array}{c} \frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}=5 \\ x+y+xy=27 \end{array} \right\rvert$	$\left\lvert \begin{array}{c} \frac{x}{y+3}+\frac{y}{x-13}=4 \\ 15(x+y)-2xy=195 \end{array} \right\rvert$	$\left\lvert \begin{array}{c} 7\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\left(\frac{x}{y}\right)=5 \\ 6x^2-3xy+y^2=94 \end{array} \right\rvert$

52. *a)* $\left\lvert \begin{array}{c} 3x^2+7xy-4y^2=47 \\ 5x^2+9xy-7y^2=41 \end{array} \right\rvert$ *b)* $\left\lvert \begin{array}{c} x^2-3xy+y^2=61 \\ 12y^2+5xy=48 \end{array} \right\rvert$

53. *a)* $\left\lvert \begin{array}{c} xy(x+y)=12 \\ x^3+y^3=28 \end{array} \right\rvert$ *b)* $\left\lvert \begin{array}{c} x^2+y^2=2xy+9 \\ x^4+y^4=641 \end{array} \right\rvert$ *c)* $\left\lvert \begin{array}{c} x^4+y^4=97 \\ x+y=5 \end{array} \right\rvert$

54—56. Löse nachfolgende Gleichungen nach x und y auf:

54. $x+y=x\cdot y=x^2-y^2$.

55. $x+y+x^2-y^2=1+xy=\frac{1}{4}(x+y)^2$.

56. $x+y=x\cdot y=x^3+y^3$.

57. Löse nach x, y und z auf:

a) $\left\lvert \begin{array}{c} x^2-yz=3a \\ y^2-zx=-\frac{1}{a} \\ x-y=1 \end{array} \right\rvert$ *b)* $\left\lvert \begin{array}{c} x^2+4xy+z^2=9 \\ 3x^2+y^2-z^2=72 \\ 2z^2-2yz-3x^2=153 \end{array} \right\rvert$

§ 5.

58—60. Löse nachfolgende Gleichungen nach x und y auf:

	a)	b)	c)
58.	$\left\lvert \begin{array}{c} \sqrt{x+y}=6-x-y \\ x^2+y^2=10 \end{array} \right\rvert$	$\left\lvert \begin{array}{c} \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \\ x+y=26 \end{array} \right\rvert$	$\left\lvert \begin{array}{c} \sqrt{x+y}-a=\frac{y}{2a} \\ \sqrt{x-y}+a=b \end{array} \right\rvert$
59.	$\left\lvert \begin{array}{c} x+y-\sqrt{xy}=19 \\ x^2+y^2+xy=133 \end{array} \right\rvert$	$\left\lvert \begin{array}{c} x+\sqrt{y}=14 \\ 2x-y=13 \end{array} \right\rvert$	$\left\lvert \begin{array}{c} x+y=3\sqrt{xy}-3 \\ x^2+y^2=5769 \end{array} \right\rvert$

60. *a)* $\left\lvert \begin{array}{c} \sqrt{x+7}-\sqrt{y+7}=2 \\ x\cdot y=-12 \end{array} \right\rvert$ *b)* $\left\lvert \begin{array}{c} \sqrt{1+5x}+\sqrt{1+5y}=10 \\ \sqrt{x-3}-\sqrt{y-3}=2 \end{array} \right\rvert$

XXI. Proportionalität.

§ 1.

1. Wann nennt man eine Größenart [a] proportional zu einer Größenart [b]?

Antwort: Eine Größenart [a] heißt proportional zu einer Größenart [b], wenn zu zwei beliebigen Werten b_1 und b_2 von [b] zwei Werte a_1 und a_2 von [a] zugehören, so daß die Proportion besteht $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$.

2. Erläutere die Proportionalität:

a) des Quadratumfangs U zur Seitenlänge a;

b) des Umfangs U eines regelmäßigen n-Ecks zur Seitenlänge a;

c) des Kreisumfangs U zum Radius r;

d) des Feingewichts a einer Legierung zu ihrem Rauhgewicht b;

e) der gleitenden Reibung ϱ zum Normaldruck N.

3. Wie nennt man:

a) eine Bewegung, bei welcher der Weg s proportional zur Zeit t ist;

b) eine Arbeitsleistung, bei welcher die Arbeit $\mathfrak{A}$ proportional zur Zeit t ist;

c) eine Bewegung, bei welcher die Zunahme δ der Geschwindigkeit proportional zur Zeit t ist;

d) eine Kraftverteilung, bei welcher die Kraft P proportional zum Querschnitt F ist;

e) einen Körper, für welchen das Gewicht G proportional zum Volumen V ist?

4. Was versteht man unter dem Modul m (oder Proportionalitätsfaktor) der Größenart [a] zur Größenart [b], wenn [a] proportional zu [b] ist?

Antwort: Unter dem Modul m versteht man den konstanten Wert des Quotienten $\frac{a}{b}$.

5. Gib die Werte der Moduln in Aufg. *2. a), b)* und *c)* an.

6. Wie nennt und bezeichnet man die Moduln in Aufg. *2. d)* und *e)*? Was für Zahlen sind die Moduln in Aufg. *2. a)* bis *e)*?

7. Wie nennt, bezeichnet und benennt*) man die Moduln in Aufg. *3. a)* bis *e)*?

*) An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, daß alle Größen mit gebrochenen Benennungen Moduln zweier ungleichartigen proportionalen Größenarten sind.

8. Wie kann man die Größenart [a] mit Hilfe der Größenart [b] und des Moduls m ausdrücken?
   Antwort: $a = m \cdot b$.
9. Bilde die in Aufg. *8* angegebene Gleichung für die Aufg. *2. d), e)* und *3. a)* bis *e)*.

§ 2.

10. Wann nennt man eine Größenart [a] proportional zu einer Größenart [b] und zu einer Größenart [c]?
    Antwort: Wenn [a] für gleiche Werte von [c] proportional zu [b] und für gleiche Werte von [b] proportional zu [c] ist.
11. Erläutere:
    a) der Rechtecksinhalt F ist proportional zur Breite b und zur Höhe h;
    b) der Dreiecksinhalt F ist proportional zur Grundlinie g und zur Höhe h;
    c) der Ellipseninhalt F ist proportional zur großen Halbachse R und zur kleinen Halbachse r;
    d) der Zylindermantel M ist proportional zum Grundradius r und zur Höhe h;
    e) das Drehmoment M ist proportional zur Kraft P und zum Hebelarm a;
    f) die Bogenlänge b ist proportional zum Radius r und zum Zentriwinkel φ;
    g) die Verlängerung δ ist proportional zur Anfangslänge l und zur Spannung σ;
    h) der Längenzuwachs δ ist proportional zur Stablänge l_0 bei 0^0 C und zur Endtemperatur t;
    i) der Volumzuwachs δ einer Gasmenge ist proportional zum Volumen V_0 bei 0^0 C und zur Endtemperatur t;
    k) die Arbeitsleistung $\mathfrak{A}$ ist proportional zur Anzahl n der Arbeiter und zur Zeit t;
    l) die erforderliche Wärmemenge W ist proportional zum Gewicht G und zur Temperaturänderung $\triangle$.
12. Beweise den Satz: Wenn [a] proportional zu [b] und zu [c] ist, so gilt die Gleichung:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2}.$$

Anl. Benutze vorübergehend den zu b_2 und c_1 zugehörigen Wert a_0 von [a].

13. Beweise den Satz: Wenn [a] proportional zu [b] und zu [c] ist, und das Produkt von [b] und [c] eine Bedeutung hat, so ist [a] auch proportional zu diesem Produkte.

14. Beweise den Satz: Wenn [a] proportional zu [b] und zu [c] ist, und [a] und [b] gleichartig sind, so ist der Verhältniswert von [a] zu [b] proportional zu [c].

15. Gib unter den in Aufg. *11* angeführten Beispielen diejenigen an, auf welche man: *a)* Aufg. *13*, *b)* Aufg. *14*, *c)* weder Aufg. *13* noch Aufg. *14* anwenden kann.

16. Gib für Aufg. *11 a)* bis *e)* die Moduln der Größenart [a] zum Produkt der Größenarten [b] und [c] an.

17. Wie nennt und bezeichnet man (Aufg. *11. f.* bis *i.*) den Verhältniswert:

a) der Bogenlänge b zum Radius r für den Zentriwinkel $\varphi = 180^0$; (Aufg. *21.*)

b) der Verlängerung δ zur Anfangslänge l für die Spannung $\sigma = 1$ *kg* pro *qcm*; (Aufg. *23.*)

c) des Längenzuwachses δ zur Stablänge l_0 bei 0^0 C für die Endtemperatur $t = 1^0$ C; (Aufg. *28.*)

d) des Volumzuwachses δ einer Gasmenge zum Volumen V_0 bei 0^0 C für die Endtemperatur $t = 1^0$ C? (Aufg. *33.*)

18. Wie nennt und bezeichnet man die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um $G = 1$ *kg* eines Stoffes um $\triangle = 1$ Celsiusgrad zu erwärmen? (Aufg. *11. l.* und *39.*)

19. Zwei Rechtecke, deren Inhalte sich zueinander wie m : n verhalten, rotieren um eine ihrer Seiten. Wie verhalten sich die Mantelflächen der bei der Rotation beschriebenen Zylinder?

20. Wie groß ist der Bogen b, welcher zum Radius $r = 150$ *cm* und zum Zentriwinkel $\varphi = 15^0\ 54'$ gehört?

21. Der Verhältniswert v des Bogens b zum Radius r heißt das Bogenmaß des Zentriwinkels φ. Wie groß (v) ist das Bogenmaß des Winkels $\varphi = 100^0$?

a) $\varphi = 17^0\ 6'$; *b)* $\varphi = 53^0\ 20'$; *c)* $\varphi = 251^0\ 6'$.

22. Ein $l = 5\ m$ langer Stab aus Schweißeisen erfährt bei der Zugspannung $\sigma = 600\ kg$ pro qcm eine Verlängerung $\delta = 1{,}5\ mm$. Um wieviel (δ_1) wird sich ein ebenso langer Stab bei der Zugspannung $\sigma_1 = 1500\ kg$ pro qcm verlängern?

a) Um wieviel (δ_2) wird sich ein 3,5 m langer Stab aus Schweißeisen bei der Zugspannung $\sigma = 600\ kg$ pro qcm verlängern?

b) Wie groß ist die Dehnung $\varepsilon = \frac{\delta}{l}$ für Schweißeisen bei einer Zugspannung $\sigma = 600\ kg$ pro qcm?

23. Wie groß ist gemäß der vorigen Aufgabe der Dehnungskoeffizient α für Schweißeisen? (Aufg. 17. b.)

24. Wie groß ist die Dehnung ε für Kupferdraht bei einer Zugspannung $\sigma = 880\ kg$ pro qcm, wenn der Dehnungskoeffizient $\alpha = \frac{1}{1\,300\,000}$ ist?

25. Um wieviel (δ) wird ein Kupferdraht von $l = 5\ m$ Länge bei einer Zugspannung $\sigma = 880\ kg$ pro qcm verlängert? $\left(\alpha = \frac{1}{1\,300\,000}\right)$.

a) Wie lang (l_1) wird der Kupferdraht?

26. An einem Messingdraht von $d = 0{,}4\ mm$ Dicke und $l = 20\ m$ Länge wirkt eine Zugkraft $P = 1256{,}6\ g$. Wie lang (l_1) wird der Draht werden, wenn der Dehnungskoeffizient $\alpha = \frac{1}{1\,000\,000}$ ist?
Anl. Bestimme zunächst σ, dann ε, dann δ.

27. Ein Stab aus Schweißeisen hat bei 0^0 C die Länge $l_0 = 90\ cm$ und erfährt beim Erwärmen auf $t = 91^0$ C die Verlängerung $\delta = 1\ mm$. Um wieviel (δ_1) wird sich derselbe Stab beim Erwärmen auf $t_1 = 52^0$ C ausdehnen?

a) Um wieviel (δ_2) wird sich ein Stab aus Schweißeisen, welcher bei 0^0 C die Länge von 1,50 m hat, beim Erwärmen auf $t = 91^0$ C ausdehnen?

b) Wie groß ist die Ausdehnung $\varepsilon = \frac{\delta}{l_0}$ für einen Stab aus Schweißeisen, welcher von 0^0 C auf 91^0 C erwärmt wird?

28. Wie groß ist gemäß der vorigen Aufgabe der (lineare) Ausdehnungskoeffizient α für Schweißeisen? (Aufg. 17. c.)

29. Wie groß ist die Ausdehnung $\varepsilon \left(= \frac{\delta}{l_0}\right)$ für Messingdraht beim Erwärmen von 0^0 C auf $t = 61{,}5^0$ C, wenn der Ausdehnungskoeffizient für Messing $\alpha = \frac{1}{51\,700}$ ist? (Res. abgerundet als Bruch mit dem Zähler 1.)

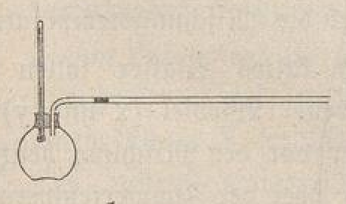
30. Ein Platinstab, welcher bei 0^0 C genau $l_0 = 18$ *cm* lang ist, wird auf 63^0 C erwärmt. Wie lang (l) wird derselbe, wenn für Platin $\alpha = \frac{1}{113\,100}$ ist?

31. Ein Stab, dessen Material den Ausdehnungskoeffizienten α besitzt, wird zuerst auf $t_1 = C_1{}^0$ Celsius und dann auf $t_2 = C_2{}^0$ Celsius erwärmt. Wie verhalten sich die beiden Endlängen l_1 und l_2?

a) Kupfer: $\alpha = \frac{1}{58\,200}$; $C_1 = 30$; $C_2 = 75$.

32. Wie groß (δ) müssen die Zwischenräume zwischen Eisenbahnschienen sein, welche bei 0^0 C eine Länge $l_0 = 9$ *m* haben, wenn dieselben bei $t_1 = 9^0$ C gelegt werden und mit einer Maximaltemperatur $t_2 = 60^0$ C gerechnet wird? $\left(\alpha \text{ für Stahl} = \frac{1}{85\,000}\right)$.

33. In der nebenstehenden Flasche ist bei 0^0 C ein Gasvolumen V_0 durch einen Flüssigkeitstropfen abgesperrt worden. Um wieviel (δ) wächst das Volumen dieser Gasmenge bei der Erwärmung auf $t = C^0$ Celsius, wenn der Ausdehnungskoeffizient der Gase $\alpha = \frac{1}{273}$ ist? (Aufg. *17. d.*) Wie groß ist das Gasvolumen (V) bei der Temperatur t? Antw. $V = V_0 \cdot \frac{273 + C^{*)}}{273}$.



a) $V_0 = 6$ *ccm*; $t = 91^0$ C; *b)* $V_0 = 37{,}5$ *ccm*; $t = 273^0$ C; *c)* $V_0 = 2{,}6$ l; $t = -14^0$ C; *d)* $V_0 = 1$ l; $t = -39^0$ C.

34. Wie verhalten sich die Volumina (V_1 und V_2) derselben Gasmenge bei den Temperaturen $t_1 = C_1{}^0$ Celsius und $t_2 = C_2{}^0$ Celsius (bei unverändeter Druckstärke)?

a) $t_1 = 27^0$ C; $t_2 = 127^0$ C; *b)* $t_1 = -13^0$ C; $t_2 = +7^0$ C; *c)* $t_1 = -8^0$ C; $t_2 = 45^0$ C; *d)* $t_1 = -9^0$ C; $t_2 = -20^0$ C.

35. In obenstehender Flasche (Aufg. *33*) ist 1 l Luft bei $19\frac{1}{2}{}^0$ C durch einen Flüssigkeitstropfen abgesperrt worden. Wie groß (V_0) ist das auf 0^0 C reduzierte Volumen dieser Luftmenge?

---

*) Bei dieser Aufg. kann die „absolute Temperatur" besprochen werden.

36. In vorstehender Flasche ist 1 l Luft bei $t_1 = C_1{}^0$ Celsius abgesperrt worden. Um wieviel (δ) nimmt das Volumen dieser Luftmenge zu, wenn man dasselbe (bei unverändeter Druckstärke) auf $t_2 = C_2{}^0$ Celsius erwärmt?
a) $t_1 = 12^0\,C$; $t_2 = 69^0\,C$; *b)* $t_1 = -3^0\,C$; $t_2 = 51^0\,C$.

37. Luft von $-12^0\,C$ werde in einer Heizkammer (Luftheizung) auf $69^0\,C$ erwärmt. Um wieviel (x) % des ursprünglichen Volumens dehnt sich die Luft hierbei aus? (Res. ganzzahlig abgerundet.)

38. 1 *kg* Luft erfüllt bei $0^0\,C$ (und 1 *Atm.* Druckstärke) einen Raum $V_0 = 773$ *cdm.* Wie groß ist das spezifische Gewicht der Luft bei $115^0\,C$ (und 1 *Atm.* Druckstärke)?
(Res. in *kg* pro *cdm* auf 6 Dezimalstellen.)

39. Um 3,5 *kg* Eisenfeile von $12^0\,C$ auf $112^0\,C$ zu erwärmen, ist die Wärmemenge W = 39,9 *Kal.* erforderlich. Wie groß (c) ist hiernach die spezifische Wärme des Eisens? (Aufg. *18.*)

40. a_1 *kg* eines Körpers von der spezifischen Wärme c_1 und der Temperatur $t_1 = C_1{}^0$ Celsius werden mit a_2 *kg* eines Körpers von der spezifischen Wärme c_2 und der Temperatur $t_2 = C_2{}^0$ Celsius gemischt. Wieviel $(x)^0$ Celsius beträgt die Mischungstemperatur?

41. 400 *g* warmes Wasser und 300 *g* kaltes Wasser sollen die Mischungstemperatur von $34^0\,C$ ergeben. Wieviel $(x \text{ und } y)^0\,C$ muß das warme und das kalte Wasser vor der Mischung besitzen, wenn ersteres doppelt soviel Celsiusgrade über der Zimmertemperatur von $24^0\,C$ besitzen soll wie letzteres unter der Zimmertemperatur?

42. Zu 600 *g* Olivenöl von $13^0\,C$ werden 500 *g* Eisenstaub von $94^0\,C$ geschüttet, wodurch die Temperatur des Öles auf $32^0\,C$ steigt. Läßt man dieses Gemisch auf $28^0\,C$ abkühlen und mischt dasselbe dann mit 810 *g* Wasser von $80^0\,C$, so erhält man die Mischungstemperatur von $68^0\,C$. Wie groß (c_1 und c_2) ist hiernach die spezifische Wärme des Olivenöls und diejenige des Eisens?

§ 3.

43. Wann nennt man eine Größenart [a] umgekehrt proportional zu einer Größenart [b]?
Antwort: [a] heißt umgekehrt proportional zu [b], wenn zu zwei beliebigen Werten b_1 und b_2 von [b] zwei Werte a_1 und a_2 von [a] zugehören, so daß die Proportion besteht $a_1 : a_2 = b_2 : b_1$.

44. Wann nennt man eine Größenart [a] proportional zu einer Größenart [b] und umgekehrt proportional zu einer Größenart [c]?

45. Erläutere:

a) die Druckstärke p eines Gases ist proportional zur Gasmenge G und umgekehrt proportional zum Volumen V;

b) die Beschleunigung (Verzögerung) p ist proportional zur beschleunigenden (verzögernden) Kraft P und umgekehrt proportional zum bewegten Gewicht G; (Aufg. *3. c.*)

c) der elektrische Leitungswiderstand w ist proportional zur Länge l des Leiters und umgekehrt proportional zum Querschnitt F desselben.

46. Beweise den Satz: Wenn [a] proportional zu [b] und umgekehrt proportional zu [c] ist, so gilt die Gleichung:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_2}{c_1} \text{ oder } = \frac{b_1}{b_2} : \frac{c_1}{c_2}.$$

47. Welche Beziehung besteht zwischen der beschleunigenden Kraft P und dem bewegten Gewicht G beim freien Fall? Welchen Wert hat die Beschleunigung beim freien Fall (für den 50ten Breitengrad)?

48. Wie nennt und bezeichnet man den elektrischen Widerstand eines Leitermaterials für $l = 1$ *m* Länge und $F = 1$ *qmm* Querschnitt?

49. 1 *cbm* Luft wiegt (bei 0^0 C) und bei 1 *Atm.* Druckstärke 1,293 *kg*. Welche Druckstärke (p) besitzen $G = 431$ *g* Luft (bei 0^0 C), welche auf einen Raum $V = 20$ l zusammengepreßt sind? (Aufg. *45. a.*)

50. Bei nebenstehender Luftpumpe verhält sich der vom Kolben beschriebene Raum $\varkappa$ zum Rauminhalt ϱ der Glocke und Leitung wie 1 : 4. Wie groß ist die Druckstärke (p_1) der Luft unter der Glocke am Ende des ersten Kolbenhubes, wenn die anfängliche Druckstärke $p_0 = 1$ *Atm.* war?

a) Wie groß ist die Druckstärke (p_4) am Ende des vierten Kolbenhubes (ohne Rücksicht auf die in die Hahnbohrung eindringende Außenluft)?

51. Zwei mit gewöhnlicher Luft gefüllte Kugeln von den Rauminhalten $V_1 = 4$ l und $V_2 = 5$ l sind durch eine Luftpumpe verbunden. Wie groß wird die Druckstärke (p_1 und p_2) in jeder Kugel, wenn aus der ersten Kugel die Hälfte der ursprünglich in ihr enthaltenen Luft in die zweite Kugel hinübergepumpt wird?

52. Aus Versuchen mit der Fallmaschine ergibt sich, daß eine Kraft $P_1 = 6\ g$ dem bewegten Gewicht $G_1 = 392\ g$ die Beschleunigung $p_1 = 1{,}5\ \frac{dm}{Sek.^2}$ erteilt. Wie groß (p_2) muß die Beschleunigung sein, welche eine Kraft $P_2 = 4\ g$ dem bewegten Gewicht $G_2 = 588\ g$ erteilt? (Aufg. 45. b.)

53. Wie groß ist die Beschleunigung (Verzögerung) p, welche die beschleunigende (verzögernde) Kraft P einem Körper vom Gewicht G erteilt?

Anl. Die Kraft G würde dem Gewicht G die Beschleunigung $g = 9{,}81\ \frac{m}{Sek.^2}$ erteilen.

54. Ein Eisenbahnzug vom Gesamtgewicht $G = 150000\ kg$ wird durch die Dampfkraft von $1600\ kg$ auf horizontaler Bahn gleichmäßig beschleunigt bewegt. Wie groß ist die Beschleunigung p, wenn der Gesamtwiderstand $900\ kg$ beträgt?

Anl. Bestimme die resultierende beschleunigende Kraft P.

a) Wie groß (v) wird die Geschwindigkeit dieses Eisenbahnzuges 3 *Min.* nach Beginn der Bewegung und wie groß (s) der in dieser Zeit zurückgelegte Weg sein?

55. Ein belasteter Schlitten vom Gesamtgewicht $G = 500\ kg$ wird auf horizontaler, glatter Eisbahn bei einer bestimmten Geschwindigkeit c sich selbst überlassen. Wie groß (p) ist die Verzögerung, wenn der Reibungskoeffizient $f = 0{,}04$ ist (ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand)? Anl. Bestimme zunächst die Reibung ϱ.

a) Wie lange (t) und wie weit (s) wird sich der Schlitten bewegen, bis er durch die Reibung zur Ruhe kommt, wenn $c = 3{,}27\ \frac{m}{Sek.}$ war?

56. Die Drahtstärken zweier Kupferdrähte von gleichem Gewicht verhalten sich wie 5 : 8. Wie verhalten sich die Querschnitte F_1 und F_2, die Längen l_1 und l_2 und die elektrischen Leitungswiderstände w_1 und w_2 der beiden Drähte? (Aufg. 45. c.)

57. Wie groß ist der elektrische Leitungswiderstand w eines 4 *mm* starken Telegraphendrahtes von 12 Meilen Länge, wenn der spezifische Leitungswiderstand des Eisens $c = 0{,}12$ *Ohm* ist? (Aufg. 48)

58. Um aus Neusilberdraht von 1,6 *mm* Dicke einen elektrischen Widerstand von 1 *Ohm* herzustellen, braucht man eine Drahtlänge von 5 *m*. Wie groß (c) ist hiernach der spezifische Widerstand des Neusilbers?

§ 4.

59. Wann nennt man eine Größenart [a] proportional zur n^{ten} Potenz einer Größenart [b]?
Anl. $a_1 : a_2 = b_1^n : b_2^n$.

60. Wann nennt man eine Größenart [a] umgekehrt proportional zur n^{ten} Potenz einer Größenart [b]?

61. Gib die Art und den Grad an für die Proportionialität:
a) des Quadratinhalts F zur Seitenlänge a;
b) des Kreisinhalts F zum Radius r;
c) der Würfeloberfläche O zur Kantenlänge a;
d) der Kugeloberfläche O zum Radius r;
e) der Druckstärke p des Windes zur Windgeschwindigkeit c;
f) des Weges s bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit zur Zeit t;
g) der erforderlichen Pendellänge l zur Schwingungszeit t;
h) der Beleuchtungsstärke B zur Entfernung e von der Lichtquelle;
i) des Würfelvolumens V zur Kantenlänge a;
k) des Kugelvolumens V zum Radius r;
l) des Trägheitsmomentes J eines Quadrates zur Seitenlänge a.

62. Gib die Art und den Grad an für die Proportionalität:
a) des Cylindervolumens V zum Grundradius r und zur Höhe h;
b) des Kreisausschnittes F zum Radius r und zum Centriwinkel φ;
c) des Trägheitsmomentes J eines Rechtecks (bezogen auf die Mittelparallele zur Breitseite) zur Breite b und zur Höhe h.

63. Lebhafter Wind von der Geschwindigkeit $c = 9$ *m* pro *Sek.* übt die Druckstärke $p = 9{,}921$ *kg* pro *qm* aus; welche Druckstärke (p_1) hat Sturm von der Geschwindigkeit $c_1 = 27$ *m* pro *Sek.*? (Aufg. *61. e.*)
a) Welchen Druck (P_1) übt dieser Sturm auf eine zu ihm senkrechte Fläche von 18 *qm* aus? (Res. auf *kg* abgerundet.)

64. Ein Sekundenpendel hat (für 50° nördl. Breite) die Länge l = 993,8 *mm*. Wie lang (l_1) müßte ein Pendel sein, dessen einfache Schwingung eine halbe Sekunde dauert? (Aufg. *61. g.*)

65. Ein Photometer wird von einer 1 *m* entfernten Glühlampe ebenso stark beleuchtet, wie von einer 20 *cm* entfernten Normalkerze. Wieviel (x) Normalkerzen ersetzt die Glühlampe? (Aufg. *61. h.*)

66. Eine Lichtquelle L_1 von n_1 Normalkerzen und eine Lichtquelle L_2 von n_2 Normalkerzen haben voneinander die Entfernung l. Wie weit (x) von L_1 üben beide die gleiche Beleuchtungsstärke aus?
a) $n_1 = 12$; $n_2 = 75$; $l = 2{,}10$ *m*.

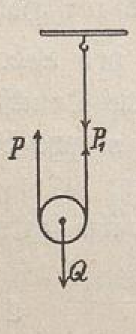
67. Aus einer Bleikugel von 20 *mm* Durchmesser sollen durch Umschmelzen 8 gleich große Kugeln hergestellt werden. Wie groß muß der Durchmesser (d_1) dieser Kugeln sein? (Aufg. *61. k.*)

68. Wie groß ist die Fläche F und der Umfang U eines Kreisausschnitts vom Zentriwinkel $\varphi = 46^0\ 18'$, wenn der Radius r = 180 *mm* ist?

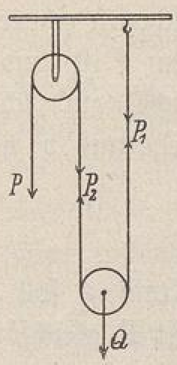
XXII. Vermischte Aufgaben.

1. Leite den Wert der zum gleichförmigen Heben einer Last Q (ohne Reibung) erforderlichen Kraft P aus dem Energiegesetze ab:
a) für die feste Rolle; *b)* für die lose Rolle; *c)* für den gewöhnlichen Flaschenzug; *d)* für den Differentialflaschenzug; *e)* für die schiefe Ebene; *f)* für die Schraube. (XIX. Aufg. *16.*)

2. Um mittelst einer festen Rolle die Last Q = 25 *kg* gleichförmig zu heben, ist mit Rücksicht auf Seilsteifigkeit und Reibung eine Kraft P = 27,5 *kg* erforderlich. Wie groß (η) ist der Wirkungsgrad dieser Rolle?

3. 

Die Last Q soll mittelst einer losen Rolle gleichförmig gehoben werden. Wie groß (P_1 und P) sind die Zugkräfte in beiden Seilteilen, wenn die Zugkraft im ablaufenden Seile um 10 % größer ist als im auflaufenden Seile? Wie groß (η) ist der Wirkungsgrad dieser Rolle? (Das Gewicht der Rolle ist in Q inbegriffen). Anl. $P_1 + P = Q$.

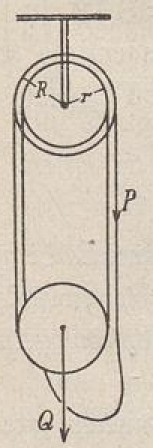


4. Mittelst einer losen und einer festen Rolle soll die Last Q gleichförmig gehoben werden. Wie groß ist die erforderliche Kraft P, wenn bei jeder Rolle die Zugkraft im ablaufenden Seile um 10 % größer ist als im auflaufenden Seile? Wie groß (η) ist der Wirkungsgrad dieser Vorrichtung?
a) Wie groß ist die zum gleichförmigen Senken von Q erforderliche Gegenkraft P?

5. Die Last Q soll mittelst eines gewöhnlichen Flaschenzuges von 2 losen und 2 festen Rollen gleichförmig gehoben werden. Wie groß ist die erforderliche Kraft P, wenn für jede Rolle die Zugkraft im ablaufenden Seile um 10 % größer ist als im auflaufenden Seile? Wie groß (η) ist der Wirkungsgrad dieses Flaschenzuges?
a) Wie groß ist die zum gleichförmigen Senken von Q erforderliche Gegenkraft P?

6. Aufg. 5 und 5 *a*) für einen gewöhnlichen Flaschenzug von 2 losen und 3 festen Rollen.

7. Aufg. 5 und 5 *a*) für einen gewöhnlichen Flaschenzug von 3 losen und 3 festen Rollen. (Vgl. XXIV. Aufg. *13*.)



8. Für ein Kettenrad muß das die Drehung fördernde Moment um 5 % größer sein als das hemmende Moment. Wie groß ist hiernach bei einem Differentialflaschenzug die zum gleichförmigen Heben der Last Q erforderliche Kraft P,
a) wenn r : R = 17 : 20 ist;
b) wenn r : R = 19 : 20 ist? (Setze 1,05 = w.)

9. Wie groß ist in Aufg. 8 *a*) und *b*) die zum gleichförmigen Senken von Q erforderliche Gegenkraft P?

10. Erläutere das Resultat von Aufg. 9 *b*). Was versteht man unter Selbsthemmung? Für welches Verhältnis von r : R ist in Aufg. 8 zum gleichförmigen Herablassen einer Last keine Kraft erforderlich?

11. Wie groß ist bei einem Differentialflaschenzug im Falle der Selbsthemmung die zum gleichförmigen Senken der Last Q erforderliche Kraft P′ und wo muß dieselbe angreifen?
a) wenn r : R = 19 : 20 ist?

12. Wie groß muß das Verhältnis der Basis einer schiefen Ebene zur Länge derselben sein, wenn der Reibungskoeffizient f ist und die zur gleichförmigen Aufwärtsbewegung erforderliche, zur schiefen Ebene parallele Kraft P zur Last Q das Verhältnis v haben soll? Anl. $P = Q\left(\frac{h}{l} + f \cdot \frac{b}{l}\right)$

a) $f = 0{,}148$; $v = 0{,}34$.

13. Auf einer schiefen Ebene vom Steigungsverhältnis ε soll eine Last Q durch eine zur Basis parallele Kraft P gleichförmig aufwärts bewegt werden. Wie groß muß P sein,

a) ohne Rücksicht auf die Reibung;

b) wenn der Reibungskoeffizient f ist?

14. Wie groß ist in der vorigen Aufgabe die zum gleichförmigen Senken der Last Q erforderliche, zur Basis parallele Gegenkraft P?

15. Wie lauten die Resultate der Aufg. *13* und *14* für eine Schraube vom mittleren Schraubenradius r und der Ganghöhe h, wenn P am mittleren Schraubenumfang tangential wirkt?

a) Wann besitzt eine Schraube Selbsthemmung?

16. Wie groß muß die Ganghöhe h einer flachgängigen Schraube sein, deren Kerndurchmesser $d_1 = 8{,}04$ *cm* und deren Bolzendurchmesser $d = 9$ *cm* ist, wenn der Reibungskoeffizient $f = 0{,}12$ ist und eine am mittleren Schraubenumfang wirkende tangentiale Kraft $P = 95$ *kg* den Druck $Q = 600$ *kg* hervorrufen soll? (Aufg. *15.*)

a) Besitzt diese Schraube Selbsthemmung?

---

17. Auf einer Bahnstrecke von 1820 *km* will man dadurch 2 Stunden Fahrzeit ersparen, daß man die durchschnittliche Geschwindigkeit um 5 *km* pro *Std.* steigert. Wie groß (t) ist die gekürzte Fahrzeit?

18. Von zwei um 9870 *m* voneinander entfernten Punkten brechen 2 Boten A und B gleichzeitig auf und begegnen sich nach 47 *Min.*; nachdem A 45 *Min.* unterwegs ist, wird ihm ein Radfahrer C nachgesandt, welcher nach 12 *Min.* dem B begegnet und nach weiteren $10^1/_2$ *Min.* den A einholt. Wie groß (c_1, c_2 und c_3) waren die Geschwindigkeiten der drei Boten?

19. Eine Welle überträgt N Pferdestärken bei der Tourenzahl n. Wie groß (M) ist das ausgeübte Moment?

20. Eine Schwungradwelle, welche mit dem Schwungrad zusammen 10000 *kg* wiegt und 60 Umdrehungen pro *Min.* macht, ist in Lagern von 20 *cm* Durchmesser gelagert. Wie groß ist der durch die Zapfenreibung verlorene Effekt, wenn der Reibungskoeffizient $f = 0{,}05$ ist?

21. Eine rollende Kugel hat auf gleichartiger, horizontaler Bahn nach der Zeit t_1 den Weg s_1 und nach der Zeit t_2 den Weg s_2 zurückgelegt. Wie groß war die Anfangsgeschwindigkeit c, die Geschwindigkeit v_1 zur Zeit t_1 und die Geschwindigkeit v_2 zur Zeit t_2? Wie groß war die Verzögerung p?
a) $t_1 = 8$ *Sek.*; $s_1 = 144$ *m*; $t_2 = 18$ *Sek.*; $s_2 = 279$ *m*.

22. Nach welcher Zeit (x) kommt die in der vorigen Aufgabe beschriebene Kugel zur Ruhe?

23. Eine Lokomotive A passiert eine bestimmte Stelle mit der Geschwindigkeit c_1; nach der Zeit t passiert eine Lokomotive B dieselbe Stelle auf parallelem Geleise in gleicher Richtung mit der Geschwindigkeit c_2. Wie lange (x) nach diesem zweiten Zeitpunkt hat die Lokomotive B die Lokomotive A eingeholt, wenn B sich mit der Beschleunigung p und A sich mit derselben Beschleunigung bewegt?
a) Dasselbe, wenn A sich gleichförmig bewegt.

24. Ein Stein A fällt von der Höhe h frei herab; gleichzeitig wird ein Stein B aus doppelter Höhe so herabgeworfen, daß er gleichzeitig mit A unten aufschlägt. Mit welcher Geschwindigkeit (c) wurde B herabgeworfen?

25. Ein Stein A fällt von der Höhe h frei herab; gleichzeitig wird ein Stein B von einem um δ höher gelegenen Orte mit der Geschwindigkeit c herabgeworfen. Wie hoch (x) über dem Erdboden holt Stein B den Stein A ein?
a) $h = 20$ *m*; $\delta = 40$ *m*; $c = 30$ *m* pro *Sek.*

26. Das Aufschlagen eines Steines, der frei in einen Brunnen fällt, wird oben nach der Zeit t gehört. Wie tief (h) ist der Brunnen?

27. Eine Lokomotive von 30 *t* Gewicht besitzt auf horizontaler Bahn die Geschwindigkeit von 11 *m* pro *Sek.* Damit diese Lokomotive auf 121 *m* zum Stillstand kommt, wird gebremst. Wie groß muß der Bremswiderstand (in der Bewegungsrichtung) sein, wenn der Widerstand ohne Bremsung 1 % des Gewichtes beträgt?

28. Auf einem 5 *m* langen Brett, dessen eines Ende sich 3 *m* hoch befindet, gleitet ein Holzblock herab. Der Reibungskoeffizient ist = 0,4. Wann und mit welcher Geschwindigkeit kommt der Block am Fuße des Brettes an? Anl. p =?

29. Ein Körper vom Gewicht G und der Geschwindigkeit c werde durch eine beliebige Kraft P gleichmäßig verzögert. Wie groß ist die Arbeit (A), die der Körper bis zu seinem Stillstand leistet? Wie groß ist hiernach die Energie der Wucht (W) eines Körpers vom Gewicht G und der Geschwindigkeit c? Anl. p = ?; t = ?; s = ?

30. Welche Wucht (W) besitzt ein fallender Stein vom Gewicht G = 3 *kg* in dem Augenblick, in welchem seine Geschwindigkeit v = 27 *m* pro *Sek.* beträgt?

31. Welche Wucht (W) besitzt der Ring eines Schwungrades bei n = 50 Umdrehungen pro *Min.*, wenn sein Gewicht G = 16000 *kg* auf einem Kreisumfang vom Durchmesser d = 6 *m* vereinigt gedacht werden kann?

32. Auf horizontaler Bahn soll ein D-Zug von 260 *t* Gewicht innerhalb 5 *Min.* die Geschwindigkeit von 79,2 *km* pro *Std.* erlangen, dann 58 *Min.* mit dieser Geschwindigkeit weiterfahren und darauf auf 1,6 *km* Länge durch Bremsen zum Stehen gebracht werden. Reibung und Luftwiderstand betrage zusammen 0,6 % der Last. Wie groß ist die Arbeit und der mittlere Effekt der Lokomotive in den ersten 5 *Min.* und während der folgenden gleichförmigen Fahrt? Wie groß muß auf der letzten Strecke der Bremswiderstand sein? Wie lange dauert die ganze Fahrt?

33. Eine Kugel von 20 *kg* Gewicht wird mit der Geschwindigkeit von 4,43 *m* pro *Sek.* auf einer schiefen Ebene, welche auf 100 *m* Länge um 1 *m* steigt, hinaufgestoßen. Wie weit (s) rollt dieselbe, wenn Reibung und Luftwiderstand 0,3 *kg* beträgt?

---

34. An einem Hebel halten sich 2 Gewichte G_1 und G_2 das Gleichgewicht. Wieviel (δ) muß man zu G_1 hinzufügen, wenn man die Gewichte vertauscht und wiederum Gleichgewicht herstellen will?
a) $G_1 = 8$ *kg*; $G_2 = 12$ *kg*.

35. An einem Hebel halten sich zwei Gewichte, deren Unterschied = δ und deren Entfernung voneinander = e ist, das Gleichgewicht. Wie groß wird das resultierende Moment, wenn man beide Gewichte vertauscht?

36. An einem Hebel befindet sich ein unbekanntes Gewicht G_1 mit einem bekannten Gewicht G_2 im Gleichgewicht. Vertauscht man beide Gewichte, so muß man zu G_1 ein bekanntes Gewicht δ hinzufügen, um wieder Gleichgewicht herzustellen. Wie groß ist hiernach G_1?

37. Ein I-Träger № 15 mit $\gamma = 16\,kg$ pro lfd. m ist $u = 0{,}5\,m$ vom linken Ende und am rechten Ende unterstützt. Derselbe trägt in der Entfernung $a_1 = 1{,}4\,m$ vom linken Ende eine Einzellast $P_1 = 80\,kg$. Wie lang (l) muß der Träger sein, damit
   a) beide Auflagerdrucke einander gleich werden;
   b) der linke Auflagerdruck K_1 doppelt so groß wird wie der rechte Auflagerdruck K_2?

38. Eine Stange vom Eigengewicht G trägt in der Entfernung a_1 vom linken Ende die Einzellast P_1. Das rechte Auflager ist am rechten Ende der Stange. Wieweit (u) vom linken Ende der Stange muß sich das linke Auflager befinden, damit der rechte Auflagerdruck $= \frac{1}{2}$ G wird?
   a) Dasselbe für $P_1 = \frac{1}{2}$ G.

39. Eine Stange, deren Gewicht pro lfd. $m = \gamma$ ist, trägt an bestimmter Stelle die Einzellast P_1. Das rechte Auflager ist am rechten Stabende, das linke Auflager irgendwo zwischen dem linken Stabende und P_1. Wie lang (l) muß die Stange sein, damit sich die Auflagerdrucke K_1 und K_2 zueinander verhalten, wie die Entfernungen der Last P_1 vom linken Stabende und vom linken Auflager?
   a) Dasselbe, wenn das linke Auflager in der Mitte zwischen P_1 und dem linken Stabende ist.

---

40. Eine achtprozentige Sodalösung wird nachträglich mit 50 % Wasser verdünnt. Wieviel % Lösungsgehalt auf Hundert hat die neue Lösung?

41. Wieviel (x) Wasser muß man verdampfen, um aus einer p-prozentigen Salzsole vom Gewicht b eine q-prozentige Salzsole herzustellen?
   a) $b = 5{,}9\,kg$; $p = 3{,}2$; $q = 11{,}8$.

42. Aus 141 g Soda soll eine vierprozentige und eine fünfprozentige Lösung von gleichem Gewicht hergestellt werden. Wie kann dies geschehen?

43. In einem Behälter sind 828 *g* einer 3,5-prozentigen Sodalösung und in einem anderen Behälter 518 *g* einer 3,6-prozentigen Sodalösung. Zu beiden Lösungen soll zusammen 1 *kg* Wasser zugesetzt werden, sodaß der Lösungsgehalt auf Hundert für beide Lösungen derselbe wird. Wie kann dies geschehen?

44. An Stelle zweier unverzinslicher Forderungen von je 1320 *M.*, zahlbar nach 2 resp. 4 Jahren, wird eine Barzahlung von 2300 *M.* geleistet. Wieviel (p) % Rabatt auf Hundert wurden gewährt?

---

45. Kann ein gußeiserner Würfel mit kugelförmigem Hohlraum im Wasser schweben? ($s = 7{,}25$ *kg* pro *cdm.*)

46. Ein hölzerner Kegel von der Höhe h und dem spezifischem Gewicht s schwimmt auf Wasser. Wie tief (x) sinkt derselbe ein, wenn er
a) mit der Spitze nach unten eingetaucht und am Umkippen gehindert ist;
b) mit der Grundfläche nach unten eingetaucht ist?

47. Eine schmiedeeiserne Hohlkugel von der Wandstärke δ soll im Wasser schweben. Wie groß müssen die Radien sein? ($s = 7{,}8$ *kg* pro *cdm.*) Anl. Bilde R : r.

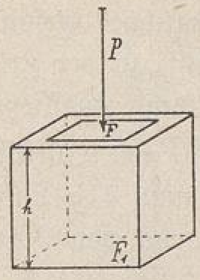
48. Ein Hohlzylinder aus Blech vom Gewicht $\gamma = 6{,}861$ *kg* pro *qm* und der Länge $l = 30$ *cm* soll liegend im Wasser um ein Viertel seines Durchmessers einsinken. Wie groß (d) muß letzterer sein?

49. Eine Legierung aus $p_1 = 62\,\%$ Kupfer ($s_1 = 8{,}89$ *kg* pro *cdm*) und $p_2 = 38\,\%$ Zinn ($s_2 = 7{,}31$ *kg* pro *cdm*) hat das spezifische Gewicht $s = 8{,}91$ *kg* pro *cdm.* Wieviel beträgt die Verdichtung ε, d. h. das Verhältnis des Legierungsvolumens zum Volumen der Bestandteile?

---

50. Eine runde Hohlsäule aus Gußeisen hat den äußeren Umfang $U = 44$ *cm* und die Wandstärke $\delta = 20$ *mm*; bestimme die zulässige Belastung P, ohne den Radius zu berechnen, wenn $k_d = 500$ *kg* pro *qcm* angenommen wird.

51. Wie groß (σ) ist die Druckspannung, welche das Eigengewicht einer prismatischen Säule von der Höhe h und dem spez. Gewicht s in der untersten Fuge hervorruft?
a) Ziegelstein: $s = 1{,}6$ *kg* pro *cdm*; $h = 17$ *m*.

52. 

Eine prismatische Säule von der Höhe h soll eine Last P aufnehmen. Wie groß muß die Auflagerfläche F der Last und der Querschnitt F_1 der Säule sein, wenn das spezifische Gewicht des Säulenmaterials = s und die zulässige Druckspannung desselben, sowie des darunter befindlichen Mauerwerks = k ist?

53. In der vorigen Aufg. besteht die Säule aus 4 prismatischen Teilen von den Höhen h_1, h_2, h_3, h_4. Wie groß müssen die Querschnitte F_1, F_2, F_3 und F_4 der einzelnen Prismen sein?

54. In Aufg. *52.* besteht die Säule aus n gleich hohen prismatischen Teilen. Wie groß (F_n) muß der Querschnitt des untersten Prismas sein?

55. 12 Hanfseile sollen einen Effekt von 100 HP. übertragen. Wie groß muß ihr Durchmesser d sein, wenn die Seile an einem Schwungrad vom Durchmesser D = 3 *m* und der Tourenzahl n = 55 angreifen und k = 4,5 *kg* pro *qcm* gesetzt wird?

56. Ein Riemen von 30 *cm* Breite und 8 *mm* Dicke soll 12 HP. übertragen. Wie groß (c) muß seine Geschwindigkeit sein, wenn k = 10 *kg* pro *qcm* gesetzt wird?

---

57. In einem Wasserbehälter ist eine Ausflußöffnung von der Größe F = 2 *qcm*, deren Schwerpunkt um x = 85 *cm* unter dem Niveau liegt. Wie groß (c) ist die theoretische Ausflußgeschwindigkeit und wieviel (V) Wasser fließt bei konstantem Niveau in t = 1 *Min.* aus? Anl. $c = \sqrt{2gx}$.

58. Aus einem Wasserbehälter soll aus einer Bodenöffnung von der Größe F bei konstanter Druckhöhe in der Zeit t die Wassermenge V ausfließen. Wie hoch (h) muß das Gefäß mit Wasser gefüllt sein?

59. Aus der Bodenöffnung F eines prismatischen Behälters vom Querschnitt F_0 fließe Wasser aus, ohne daß dasselbe durch einfließendes Wasser ersetzt werde. Wie groß (p) ist die Abnahme der Ausflußgeschwindigkeit pro *Sek.* unter der Annahme, daß diese Abnahme gleichmäßig erfolgt?
Anl. Führe vorübergehend t, h_1, h_2, c_1, c_2 ein.

60. In welcher Zeit (t) ist das in der vorigen Aufgabe genannte Gefäß leer gelaufen, wenn die ursprüngliche Wasserhöhe h war?

61. Wie verhält sich die Zeit, in welcher ein prismatisches Gefäß aus einer Bodenöffnung o h n e Nachfüllung leer läuft, zu der Zeit, in welcher dasselbe Volumen bei k o n s t a n t e m Niveau ausfließt?

62. 1 *g* Luft erfüllt bei 0° C und 1 *Atm.* (= 760 *mm* Quecksilber) den Raum von 773 *ccm*. Welchen Raum nimmt 1 *g* Luft bei 0° C und *a)* 4,3 *Atm.* Druckstärke; *b)* dem Druck von 950 *mm* Quecksilber ein?

63. Wieviel wiegt 1 *cbm* Luft von 0° C bei *a)* 4,3 *Atm.* Druckstärke; *b)* dem Druck von 950 *mm* Quecksilber? (Aufg. *62.*)

64. Wieviel (x) *mm* hoch müßte eine Quecksilbersäule sein, welche ebenso viel wiegen soll, wie eine Luftsäule gleichen Querschnitts von 100 *cm* Höhe bei 0° C und dem Barometerstand b? (Res. auf 7 Dezimalstellen genau.) (b = Anzahl *mm* Quecksilber.)

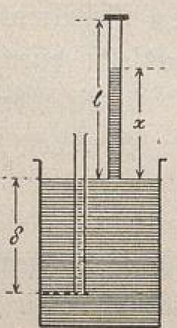
65. Um wieviel (x) *mm* sinkt der Barometerstand, wenn man sich (bei 0° C) von einem Punkte, dessen Barometerstand b ist, um 1 *m* erhebt? Wieviel (b_1) beträgt der Barometerstand des höheren Punktes? Wie verhält sich $b : b_1$? (Resultate auf 7 Dezimalstellen genau.) (Vgl. XXIV. Aufg. *3.*)

66. Bei einer Luftverdichtungspumpe verhält sich der vom Kolben beschriebene Raum $\varkappa$ zum Rauminhalt ϱ des Rezipienten wie 1 : 3. Wieviel (n) Kolbenspiele sind erforderlich, um die Luft im Rezipienten auf 20 *Atm.* zu verdichten (ohne Rücksicht auf den schädlichen Raum)?

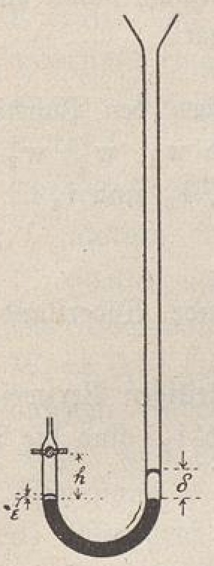
67. Beim Füllen einer Barometerröhre von l = 1 *m* Länge wird in derselben eine Luftsäule von h = 68 *cm* Höhe belassen. Der Barometerstand beträgt b = 750 *mm*. Wie hoch (b_1) steht das Quecksilber in der Röhre, wenn nach dem Einsetzen in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß das offene Röhrenende

a) das äußere Quecksilber gerade berührt;

b) um δ = 18 *cm* untergetaucht ist?

68. 

Eine beiderseits offene zylindrische Röhre von der Länge l = 982,8 *mm* wird bis zur Tiefe δ = 70 *cm* in Wasser getaucht und dann oben verschlossen. Wie hoch (x) steht das Wasser in der Röhre, wenn man dieselbe soweit heraushebt, daß der untere Rand das äußere Wasser gerade berührt, und der Barometerstand b = 750 *mm* Quecksilber beträgt?



69. In einer Mariotteschen Röhre ist eine Luftsäule von $h = 17$ *cm* Höhe beim äußeren Luftdruck abgesperrt worden. Man gießt dann solange Quecksilber nach, bis dasselbe im offenen Schenkel um $\delta = 12$ *cm* gestiegen ist. Wie hoch (b) ist der Barometerstand, wenn das Quecksilber im kurzen Schenkel gleichzeitig um $\varepsilon = 2$ *cm* steigt?

70. In einer Mariotteschen Röhre ist eine Luftsäule von $h = 5{,}2$ *cm* Höhe beim Barometerstand $b = 748$ *mm* Quecksilber abgesperrt worden. Um wieviel (δ und ε) steigt das Quecksilber in beiden Schenkeln, wenn man 814,3 *ccm* Quecksilber nachgießt und wenn die lichte Weite der Röhre $d = 36$ *mm* ist? Wie groß ist der Druck der komprimierten Luft?

71. In einer Mariotteschen Röhre ist eine Luftsäule von $h = 9$ *cm* Höhe beim Barometerstand $b = 740$ *mm* Quecksilber abgesperrt worden. Wieviel (V) Quecksilber muß man nachgießen, damit dasselbe im offenen Schenkel um $\delta = 40$ *cm* steigt, wenn die lichte Weite der Röhre $d = 4$ *mm* ist? (Res. einstellig in *ccm.*)

72. In einer Mariotteschen Röhre ist eine Luftsäule von der Höhe $h = 16$ *cm* beim Barometerstand $b = 752$ *mm* Quecksilber abgesperrt worden. Um wieviel (δ) muß durch Nachgießen der Stand im offenen Schenkel erhöht werden, damit die abgesperrte Luft auf $\frac{1}{n}$ ihres Volumens zusammengedrückt wird? Wie groß (x) ist die Höhe der nachzugießenden Quecksilbersäule?

a) $n = 2$; *b*) $n = 3$; *c*) $n = 4$.

73. Eine Luftmenge, welche bei der Temperatur $t_1 = C_1{}^0$ Celsius und der Druckstärke p_1 das Volumen V_1 besitzt, wird zunächst bei unveränderter Druckstärke auf $t_2 = C_2{}^0$ Celsius erwärmt und dann bei dieser Temperatur auf die Druckstärke p_2 gebracht. Wie groß (V_2) wird das Volumen der Luft? (XXI. Aufg. *34* und *45.*)

74. 1 *cbm* Luft von 0^0 C und 1 *Atm.* werde auf $54{,}6^0$ C erwärmt und auf 3 *Atm.* komprimiert. Wie groß (V) ist dann das Volumen der Luft?

a) Wie groß ist das spezifische Gewicht der Luft bei $54{,}6^0$ C und 3 *Atm.*?

75. Auf wieviel $(x)^0$ C muß man 1 *kg* Luft erwärmen, damit dieselbe bei 5 *Atm.* Spannung 1 *cbm* Rauminhalt hat?

---

76. Ein elektrischer Strom i verzweigt sich zwischen den Punkten A und B in 4 Teile; die Zweigwiderstände sind w_1, w_2, w_3 und w_4. Wie groß sind die Zweigströme i_1, i_2, i_3 und i_4?
Anl. $i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4$ und:
$\delta = i_1 \cdot w_1 = i_2 \cdot w_2 = i_3 \cdot w_3 = i_4 \cdot w_4$.

77. Wie groß (w) ist in Aufg. *76* der resultierende Widerstand der Verzweigung? Anl. $\delta = i \cdot w$.

78. Die Zweigwiderstände w_1 und w_2 einer zweiteiligen Verzweigung verhalten sich wie m zu n. Wie groß (i_1 und i_2) sind die Teile, in welche sich der Hauptstrom i teilt?
a) $m : n = 2 : 15$; $i = 3{,}4$ *Amp.*;
b) $m : n = 1 : \frac{1}{9}$; $i = 6{,}7$ *Amp.*

79. Die Widerstände einer dreiteiligen Verzweigung bilden die Proportion $w_1 : w_2 : w_3 = 58 : 14 : 21$. Bilde die Proportion zu $i_1 : i_2 : i_3$.
a) Wie groß ist der Hauptstrom i und die Zweigströme i_1 und i_3, wenn $i_2 = 8{,}7$ *Amp.* ist?

80. Die Widerstände einer vierteiligen Verzweigung sind $w_1 = 1$ *Ohm*, $w_2 = 9$ *Ohm*, $w_3 = 99$ *Ohm*, $w_4 = 0{,}5$ *Ohm*. Bilde die Proportion zu $i_1 : i_2 : i_3 : i_4$.

81. Ein Kupferdraht soll $G = 19{,}98$ *kg* wiegen und den Widerstand $w = 4{,}44$ *Ohm* besitzen. Wie groß muß seine Länge l und sein Querschnitt F sein? ($s = 0{,}9$ *kg* pro *cdm*; $c = 0{,}018$ *Ohm*). (XXI. Aufg. *48.*)

82. $n = 12$ Chromsäure-Elemente, deren jedes die elektromotorische Kraft $e = 2$ *Volt* und den inneren Widerstand $r = 0{,}66$ *Ohm* besitzt, sind in $q = 3$ Reihen so nebeneinander geschaltet, daß in jeder Reihe $p = 4$ Elemente hintereinander geschaltet sind. Wie groß ist die elektromotorische Kraft E und der innere Widerstand R dieser Batterie? Wie groß ist die Hauptstromstärke i und die Klemmenspannung K, wenn die Batterie durch einen äußeren Widerstand $W = 2{,}8$ *Ohm* geschlossen ist?
a) $q = 1$; $p = 12$; *b*) $q = 2$; $p = 6$; *c*) $q = 4$; $p = 3$;
d) $q = 6$; $p = 2$; *e*) $q = 12$; $p = 1$.

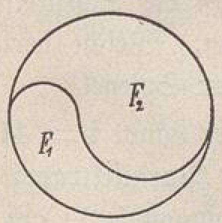
83. In den Stromkreis einer Batterie, deren elektromotorische Kraft $E = 10$ *Volt* ist, ist ein Ampèremeter von 1 *Ohm* Spulenwiderstand eingeschaltet. Dasselbe zeigt eine Stromstärke $i = 3{,}75$ *Amp.* Wie groß (x) wäre die Stromstärke ohne das Ampèremeter?

a) Welche Stromstärke (y) ginge durch die Spule des Ampèremeters, wenn man $\frac{1}{99}$ *Ohm* in Nebenschluß zu demselben schalten würde?

84. Ein Leclanché-Element liefert bei einem äußeren Widerstand $W_1 = 0{,}91$ *Ohm* einen Strom $i_1 = 1$ *Amp.*, dagegen bei einem äußeren Widerstand $W_2 = 5{,}71$ *Ohm* einen Strom $i_2 = 0{,}25$ *Amp.* Wie groß ist die elektromotorische Kraft (e) und der innere Widerstand (r) des Elementes?

a) Wie groß (K_1 und K_2) ist in beiden Fällen die Klemmenspannung?

---

85. 

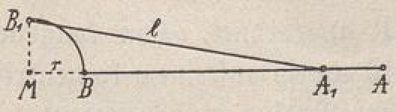
Der Durchmesser eines Kreises ist im Verhältnis m : n geteilt und über beiden Teilen sind nach verschiedenen Seiten Halbkreise gezeichnet. Wie verhalten sich die so entstandenen beiden Teile des ursprünglichen Kreises zueinander?

86. Ein Kasten soll 270 *qcm* Bodenfläche, zwei Wandflächen von je 150 *qcm* und zwei Wandflächen von je 180 *qcm* haben. Wie lang müssen die Kanten sein?

87. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist der Inhalt F und die Höhe h vorgeschrieben. Wie groß müssen die Seiten sein?

a) $F = 6$ *qcm*; $h = 2{,}4$ *cm*.

88. Welchen Teil seines Hubes macht der Kolben eines Dampfzylinders



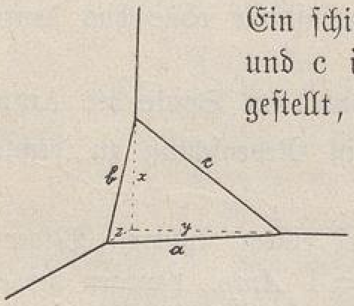
für die erste Vierteldrehung der Kurbel, wenn die Länge l der Pleuelstange AB sich zur Länge r der Kurbel MB verhält wie 61 zu 11?

a) Dasselbe, wenn $l : r = 5 : 1$ ist.

89. Ein Kanal soll an Stelle eines rechteckigen Querprofils von der Tiefe h ein ebenso tiefes trapezoidales Querprofil von gleichem benetzten Umfang erhalten. Um wieviel (δ) müssen sich die Parallelseiten dieses Trapezes unterscheiden?

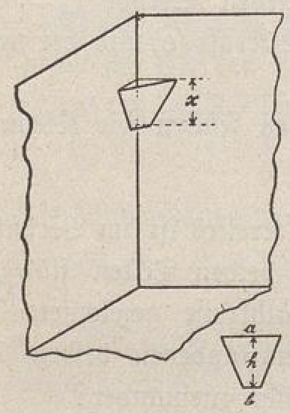
90. Wie verhalten sich im rechtwinkligen Dreieck die Katheten a und b zur Hypotenuse c, wenn:
a) $(a + b) : c = 89 : 65$; *b)* $(a + c) : b = 5 : 2$ ist?

91.



Ein schiefwinkliges Dreieck von den Seiten a, b und c ist so in eine (rechtwinklige) Zimmerecke gestellt, daß die 3 Eckpunkte des Dreiecks auf 3 Zimmerkanten liegen. Wie groß (V) ist die so entstehende Pyramide?
a) $a = 65$ *cm*; $b = 51{,}478$ *cm*; $c = 75$ *cm*.

92.

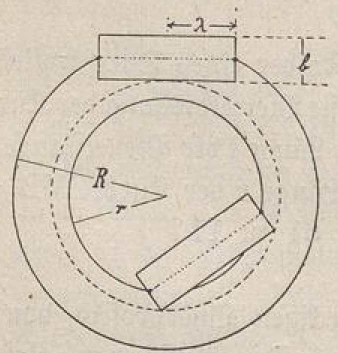


Ein Eckspiegel hat die Form eines gleichschenkligen Paralleltrapezes mit den Parallelseiten $a = 60$ *cm*, $b = 20$ *cm* und der Höhe $h = 52$ *cm*. Derselbe ist an 2 zueinander senkrechten Zimmerwänden (symmetrisch) so befestigt, daß die Schenkelseiten an den Wänden anliegen. Welche vertikale Höhe (x) beansprucht der Spiegel?

93. Aus einem Draht von der Länge $l = 41$ *cm* soll ein gleichschenkliges Paralleltrapez mit einer Diagonale gebogen werden, so daß die Diagonale 11 *cm* und jede Schenkelseite 5 *cm* lang ist. Wie groß werden die Parallelseiten?

94. Um ein gleichschenkliges Paralleltrapez mit den Parallelseiten $a = 70$ *cm*, $b = 50$ *cm* und der Höhe $h = 40$ *cm* soll ein Kreis beschrieben werden. Wie groß ist der Radius r desselben?

95.



Ein Rechteck von der Länge $l = 2\,\lambda$ ist mit den Mittelpunkten seiner kürzeren Seiten beweglich auf einem Kreise vom Radius R angeordnet. Ein kongruentes Rechteck ist ebenso auf einem konzentrischen Kreise vom Radius r angeordnet. Wie breit (b) darf jedes Rechteck sein, wenn sich dieselben bei der Bewegung gerade berühren sollen?

a) Dasselbe, wenn die Rechtecke sich nur bis auf die Entfernung δ nahe kommen dürfen.

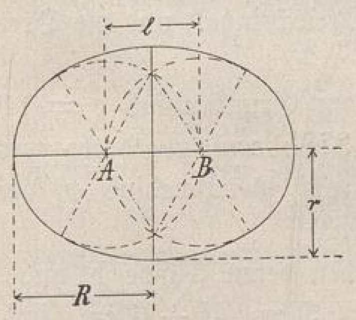
b) Beweise nachstehende Konstruktion der in Aufg. *95* gesuchten Breite b:

Man zeichne in die gegebenen konzentrischen Kreise zwei Sehnen von der Länge l parallel und auf verschiedenen Seiten des Mittelpunkts M ein, fälle von M auf diese Sehnen die Lote MA und Ma und schlage um A mit dem Radius Aa einen Kreis, der den Kreis mit dem Radius r in U schneide. Dann ziehe man AU und nenne den zweiten Schnittpunkt von AU mit dem kleineren der konzentrischen Kreise V. Dann ist $AV = b$.

96. Die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks ist $= a + \frac{b}{n}$. Der wievielte (m^{te}) Teil von a ist $(c - b)$?
a) $n = 3$; *b*) $n = 2$.

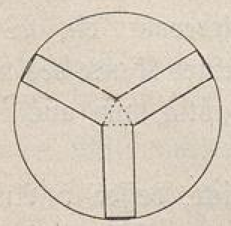
97. In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Endpunkte der Hypotenuse mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Katheten verbunden. Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks, wenn diese Verbindungsstrecken $= u$ und v sind?

98. Schlägt man um 2 Punkte A und B mit der Länge $l = AB$ als Radius Kreise und um deren Schnittpunkte Kreisbögen mit dem doppelten Radius bis zur Berührung mit den ersten Kreisen, so entsteht eine ellipsenähnliche Figur. Wie groß sind die Halbachsen R und r, der Umfang U und der Inhalt F dieser Figur? Um wieviel (δ) ist F größer, als der Inhalt einer richtigen Ellipse mit denselben Halbachsen?



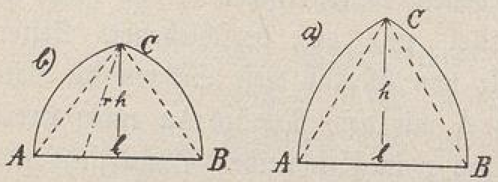
99. In einem Viereck ABCD ist $\sphericalangle \alpha = 30^0$, $\sphericalangle \beta = 60^0$, $\sphericalangle \gamma = 150^0$ und $AB = u$, $CD = v$ bekannt. Wie groß ist BC und AD?

100. Aus einem kreisförmigen Blech vom Durchmesser d soll eine dreistrahlige Figur ausgeschnitten werden, deren Mittelstück ein gleichseitiges Dreieck und deren Strahlen 3 kongruente Rechtecke sind. Wie breit müssen diese Rechtecke sein, damit das Mittelstück $\frac{1}{23}$ der ganzen Figur ist?

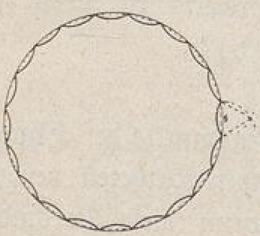


a) Dasselbe, wenn das Mittelstück $\frac{1}{5}$ der ganzen Figur sein soll.

101. Ein Spitzbogen besteht aus 2 einander gleichen, vom Kämpferpunkt A resp. B bis zur Spitze C reichenden Kreisbögen, deren Mittelpunkte auf AB liegen. Die Spannweite AB sei $= l$; wie groß ist die Höhe h, die Bogenlänge $b = ACB$ und der Inhalt F des Spitzbogens:



a) beim gleichseitigen Spitzbogen, für den $\sphericalangle ABC = 60^0$ ist?
b) beim stumpfen Spitzbogen, für den $\sphericalangle ABC = 54^0$ ist?

102. 
Zur Kannelierung dorischer Säulen bedient man sich eines dem Querschnittskreise eingeschriebenen Zwanzigecks, über dessen Seiten man nach innen Bögen zeichnet, deren Radius gleich der Seitenlänge ist. Wie groß ist der kannelierte Querschnitt, wenn die Seite des Zwanzigecks $= s$ ist?

103. Von einem Dreieck sind die Radien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 der angeschriebenen Kreise bekannt. Wie groß ist der Dreiecksinhalt und die Dreiecksseiten?

104. Von einem eisernen Vollzylinder vom Grundradius $r = 11$ *cm* und der Höhe $h = 20$ *cm* sollen 3785 *ccm* abgedreht werden, so daß sich nachher die Höhe h_1 zum Grundradius r_1 verhält wie $5 : 3$. Wie kann dies geschehen?

105. Eine rechteckige Photographie, zwischen deren Fläche F und Umfang U die Beziehung besteht: $F = 3\,cm\,(U + 6\,cm)$ soll auf einen Karton so aufgezogen werden, daß der Rand überall gleich breit und seine Fläche $= {}^1/_2\,F$ wird. Wie breit (δ) muß der Rand sein?

106. Ein Holzwürfel soll ringsum mit 602 einander gleichen Holzwürfelchen so umkleidet werden, daß wiederum ein Würfel entsteht. Wieviel (x) Würfelchen liegen in einer Kante des neuen Würfels? Wieviel (y) Würfelchen wären nötig, um aus ihnen allein den neuen Würfel zu bilden?

107. Ein oben offener Zinkkasten von 0,5 *cm* Dicke, dessen 5 Außenflächen Quadrate sind, soll 26,82 *kg* wiegen. Wie groß muß die Außenkante sein? ($s = 7{,}2$ *kg* pro *cdm*).

XXIII. Summen.

§ 1.

1. Wie schreibt man abgekürzt die algebraische Summe der Größen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k, \ldots a_n$? Antwort: Σa_k.
2. Wie schreibt man die algebraische Summe der Produkte $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots a_k b_k, \ldots a_n b_n$?
3. Wie schreibt man die algebraische Summe der Produkte $a_1 c, a_2 c, a_3 c, \ldots a_k c, \ldots a_n c$?
4. Erläutere die Gleichung: $\Sigma a_k c = c \cdot \Sigma a_k$.
5. An einem Körper greifen die beliebig gerichteten parallelen Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots P_k, \ldots P_n$ an, von deren beiden Richtungen die eine als positiv, die andere als negativ festgesetzt ist. Wie groß ist die resultierende Kraft R?
6. An einem drehbaren Körper wirken die Momente $M_1, M_2, M_3, \ldots M_k, \ldots M_n$. Wie groß ist das resultierende Moment M?
7. n zylindrische Gefäße von den Querschnitten $F_1, F_2, F_3, \ldots F_k, \ldots F_n$ sind bis zu den Höhen $h_1, h_2, h_3, \ldots h_k, \ldots h_n$ mit Wasser gefüllt und dann durch Kommunikationsröhren verbunden. Wie hoch (h) stellt sich das Wasser in allen Gefäßen?
8. n Körper, deren Volumina $V_1, V_2, V_3, \ldots V_k, \ldots V_n$ und deren spezifische Gewichte $s_1, s_2, s_3, \ldots s_k, \ldots s_n$ sind, sind miteinander verbunden. Wie groß ist das mittlere spezifische Gewicht s?
9. Von einem bestimmten Stoff werden a_1 *kg* von C_1 ⁰ Celsius, a_2 *kg* von C_2 ⁰ Celsius, a_3 *kg* von C_3 ⁰ Celsius, $\ldots a_k$ *kg* von C_k ⁰ Celsius, $\ldots a_n$ *kg* von C_n ⁰ Celsius ohne Wärmeverlust gemischt. Wieviel (x) ⁰ Celsius beträgt die Mischungstemperatur?
10. In der vorigen Aufgabe werden nicht nur verschiedene Mengen, sondern auch verschiedene Stoffe benutzt, deren spezifische Wärmen $c_1, c_2, c_3, \ldots c_k, \ldots c_n$ sind. Wieviel (x) ⁰ Celsius beträgt die Mischungstemperatur?
11. In Aufg. 5 seien die von einem bestimmten Drehpunkt gemessenen (positiv und negativ zu zählenden) Hebelarme der gegebenen Kräfte $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k, \ldots a_n$. Wie groß (x) ist der Hebelarm der resultierenden Kraft?

12. Eine bestimmte Arbeit würde von einem ersten Arbeiter allein in a_1 Tagen, von einem zweiten allein in a_2 Tagen, von einem dritten allein in a_3 Tagen und von einem vierten allein in a_4 Tagen vollendet. Wieviel (x) Tage brauchen diese vier Arbeiter zusammen zu der betreffenden Arbeit?

13. In jedes von n zylindrischen, verschieden weiten Gefäßen ist dieselbe Wassermenge eingegossen worden. Nachdem die Wasserhöhen h_1, h_2, h_3, ... h_k, ... h_n der einzelnen Gefäße gemessen sind, werden dieselben durch Kommunikationsröhren verbunden. Wie hoch (h) stellt sich das Wasser in allen Gefäßen?

14. Zwischen 2 Punkten A nnd B einer elektrischen Leitung befinden sich n Drähte (nfache Verzweigung) von den Widerständen w_1, w_2, w_3, ... w_k, ... w_n. Wie groß (w) ist der resultierende Widerstand dieser Verzweigung? (XXII. Aufg. 77.)

§ 2.

15. Berechne $\Sigma k = 1 + 2 + 3 + \ldots . k + \ldots . n$.

Anl. $\Sigma k = n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots . (n - k + 1) + \ldots . 1$.

16. Berechne Σk durch wiederholte Benutzung der Gleichung: $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$.

Anl.
$$\begin{aligned} 2^2 &= 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 \\ 3^2 &= 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 \\ &- - - - - - - \\ (k + 1)^2 &= k^2 + 2 \cdot k + 1 \\ &- - - - - - - - - \\ (n + 1)^2 &= n^2 + 2 \cdot n + 1 \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Addition der Gleichungen:

$(n + 1)^2 = 1^2 + 2 \cdot \Sigma k + n$; also $\Sigma k = ?$

17. Berechne Σk durch wiederholte Benutzung der Gleichung: $(a + 1)^2 = (a - 1)^2 + 4a$.

18. Berechne die Summe der n ersten ungeraden Zahlen:

a) nach derselben Methode wie Aufg. *15*;

b) unter Benutzung des Resultats von Aufg. *15*;

c) durch wiederholte Benutzung der Gleichung: $(a + 1)^2 = a^2 + [2(a + 1) - 1]$.

19. Berechne $\Sigma k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots . k^2 + \ldots . n^2$ durch wiederholte Benutzung der Gleichung: $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.

20. Berechne Σk^2 durch wiederholte Benutzung der Gleichung: $(a + 1)^3 = (a - 1)^3 + 6a^2 + 2$.

21. Berechne $\Sigma k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots . k^3 + \ldots . n^3$:

a) nach entsprechender Methode wie Aufg. *19*;

b) nach entsprechender Methode wie Aufg. *20*.

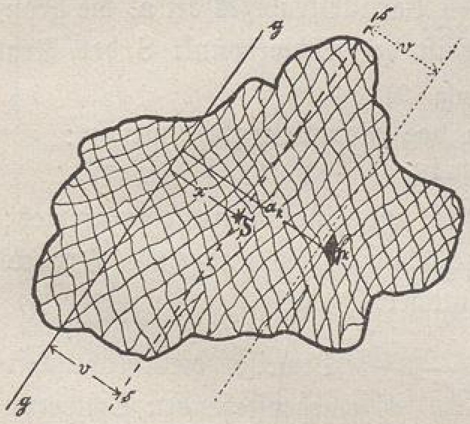
22. In welcher Beziehung steht Σk^3 zu Σk?

23. Wie groß ist:

a) $\frac{\Sigma k}{n^2}$; *b)* $\frac{\Sigma k^2}{n^3}$; *c)* $\frac{\Sigma k^3}{n^4}$?

24. Gib für die in Aufg. *23. a)*, *b)* und *c)* genannten Brüche die Grenzwerte an, denen dieselben zustreben, wenn n ∞ wird.

§ 3.*)

25. 

Eine Fläche F sei in sehr viele (n) sehr kleine Flächenteilchen $f_1, f_2, f_3, \ldots . f_k, \ldots . f_n$ geteilt, deren senkrechte Entfernungen von einer in der Ebene von F angenommenen Achse g mit $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_k, \ldots . a_n$ bezeichnet seien. Wie weit (x) ist der Schwerpunkt S der Fläche F von der Achse g entfernt?

Bemerkung: Die Entfernungen $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_k, \ldots . a_n$ und x sind auf der einen Seite von g positiv, auf der anderen negativ zu zählen.

26. Welchen Wert hat $\Sigma f_k a_k$, wenn die Achse g eine Schwerlinie der Fläche F ist?

27. Kehre den in der vorigen Aufgabe enthaltenen Satz um.

28. Beweise die Sätze:

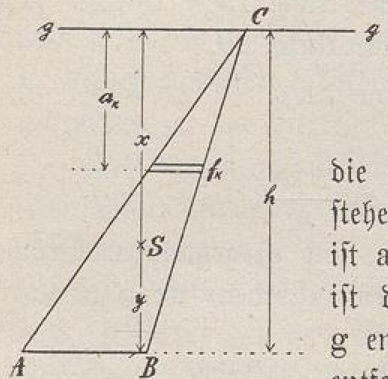
a) Besitzt eine Fläche F eine Symmetrieachse, so ist dieselbe eine Schwerlinie von F.

b) Ist eine Fläche F Summe (oder Differenz) mehrerer Flächen $F_1, F_2, F_3 \ldots .$, deren Schwerpunkte $S_1, S_2, S_3, \ldots .$ auf einer Geraden liegen, so ist diese Gerade eine Schwerlinie von F.

---

*) Bei Durchnahme dieses Paragraphen ist der experimentelle oder trigonometrische Beweis des Satzes, daß alle Schwerlinien einer Fläche sich in einem Punkte schneiden, zu erwähnen.

29. Durch den Eckpunkt C eines $\triangle$ ABC sei $g \parallel AB$ gezogen, und das Dreieck durch weitere Parallelen zu AB in sehr viele (n) gleich hohe Streifen geteilt. Als Entfernung eines Streifens von g gelte die Entfernung der von g weiter abstehenden Begrenzungsparallele. Wie groß ist a_k? Wie groß ist f_k? Wie weit (x) ist der Schwerpunkt S des Dreiecks von g entfernt? Wie weit (y) ist S von AB entfernt? (Aufg. *24. b.* und *25.*)

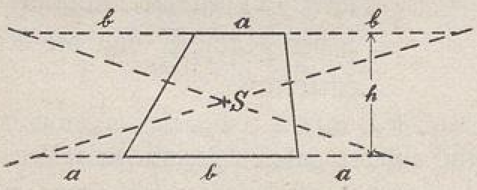


30. Die kleinere Parallelseite eines Paralleltrapezes sei a, die größere b und die Höhe h. Wie weit ist der Schwerpunkt S des Trapezes von a und b entfernt? (Aufg. *24. b.*)

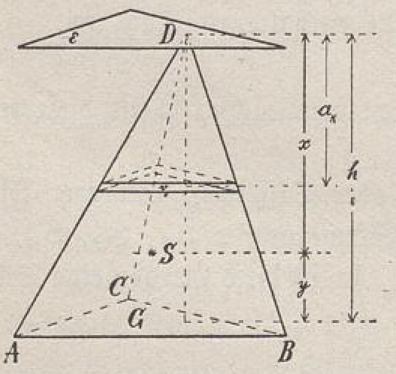
31. Löse Aufg. *30*, indem man das Paralleltrapez auffaßt:

a) als Summe zweier Dreiecke;
b) als Summe eines Dreiecks und eines Parallelogrammes;
c) als Differenz eines Parallelogrammes und eines Dreiecks;
d) als Differenz zweier ähnlicher Dreiecke.

32. Beweise die Richtigkeit der nebenstehenden Schwerpunktskonstruktion für das Paralleltrapez.



33. Durch die Spitze D der Pyramide ABCD sei eine Ebene $\varepsilon \parallel ABC$ gelegt, und die Pyramide durch weitere zu ABC parallele Ebenen in sehr viele (n) gleich hohe prismenartige Teilchen zerlegt. Wie groß (v_k) ist das $k^{\underline{te}}$ dieser Teilchen, wenn die Fläche ABC = G ist? Wie groß ist der Rauminhalt $V = \Sigma v_k$ der Pyramide? (Aufg. *24. b*)

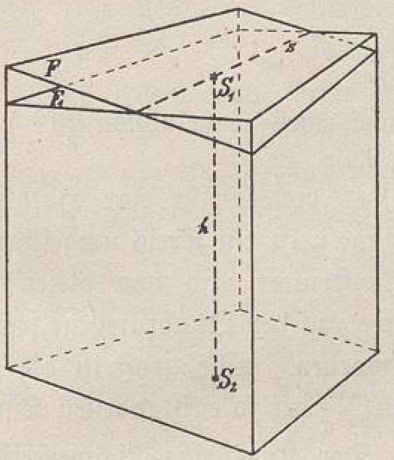


a) Wie groß ist die Entfernung a_k der Spitze D von v_k? Wie weit (x) ist der Schwerpunkt S der Pyramide von ε entfernt? Wie weit (y) ist S von der Ebene ABC entfernt? (Aufg. *24. c.*)

34. Wie weit (x) ist der Schwerpunkt eines Pyramidenstumpfes von der Grundfläche entfernt?

Antwort: $x = \frac{h}{4} \cdot \frac{G_1 + 2\sqrt{G_1 \cdot G_2} + 3G_2}{G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2}$.

a) Dasselbe für einen Kegelstumpf von der Höhe h, dem Grundradius R und Deckradius r.

35. 

Die zur Grundfläche parallele Deckfläche F eines geraden Prismas (oder Zylinders) soll durch eine schiefe Deckfläche F_1 ersetzt werden, so daß das Volumen des Prismas (oder Zylinders) unverändert bleibt. Welche Eigenschaft muß die Schnittlinie s von F und F_1 für beide Flächen besitzen?

Anl. $\Sigma f_k \cdot h_k = ?$ $\Sigma f_k \cdot a_k = ?$

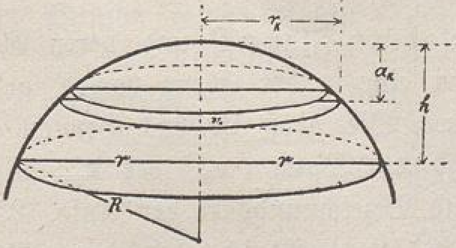
36. Kehre den in der vorigen Aufgabe enthaltenen Satz um.

37. Ein beliebiges schief abgeschnittenes n-seitiges Prisma (oder ein Zylinder) habe den Querschnitt F und zwischen Grund- und Deckfläche die Schwerpunktsentfernung $S_1 S_2 = h$. Wie groß ist sein Volumen? Anm. Beweise geometrisch, daß $S_1 S_2$ zur Prismenkante parallel ist.

38. Ein dreiseitiges Prisma habe den Querschnitt F und die Kantenlängen a, b und c. Wie groß ist sein Volumen? (Aufg. 37.)

39. Ein schief abgeschnittener, gerader Kreiszylinder habe den Grundradius r, die kürzeste Zylinderseite a und die längste Zylinderseite b. Wie groß ist sein Volumen? (Aufg. 37.)

40. Ein Kugelabschnitt (Kalotte) von der Höhe h ist durch Ebenen parallel zum Grundkreis in n gleich hohe Kugelzonen,



welche als Zylinder aufgefaßt werden können, geteilt. Wie groß (v_k) ist das k^{te} dieser Teilchen, wenn der Kugelradius R ist? Wie groß ist das Volumen V des Kugelabschnitts?

a) Wie lautet die Gleichung für V, wenn statt des Kugelradius R der Grundradius r gegeben ist?

41. Wie weit (x) ist der Schwerpunkt S des Kugelabschnitts vom Scheitel desselben entfernt? Wie weit (y) ist S vom Kugelmittelpunkt entfernt? (Aufg. *24.*)

42. Wie groß ist das Volumen eines Kugelausschnitts vom Kugelradius R und der Kalottenhöhe h?

43. Wie weit (z) ist der Schwerpunkt S des Kugelausschnitts vom Kugelmittelpunkt entfernt?

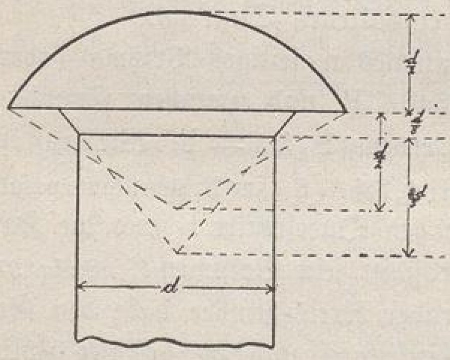
Antwort: $z = \frac{3}{8}(2R - h)$.

44. Wie groß (M) ist die Mantelfläche eines Kugelabschnitts?
Anleitung: Benutze das Resultat von Aufg. *42.*

45. Welche Werte ergeben die Aufg. *40* bis *44* für eine Halbkugel?

46. Um ein Quadrat von der Seitenlänge a ist ein Kreis umgeschrieben, über demselben eine Halbkugel konstruiert und von dieser durch Ebenen, welche in den Quadratseiten auf der Quadratebene senkrecht stehen, vier Stücke abgeschnitten worden. Wie groß ist die ganze Oberfläche (O) und der Luftraum (V) der so entstandenen Kuppel?

47.



Der Kopf eines schweißeisernen Nietes vom Durchmesser d (für feste und dichte Verbindungen) besteht aus einer Kalotte vom Radius d und der Höhe $\frac{d}{2}$ und einem Kegelstumpf von der Höhe $\frac{d}{8}$, dessen Ergänzungskegel den Grundradius $\frac{d}{2}$ und die Höhe $\frac{3d}{5}$ hat. Wieviel (G) wiegt ein Nietkopf für $d = 20$ *mm*? ($s = 7{,}8$ *g* pro *ccm.*)

§ 4.

48. Eine homogene ebene Platte, deren Fläche F und deren Gewicht pro $qm = \gamma$ ist, rotiere um eine in der Ebene von F gelegene Achse mit der Tourenzahl n. Wie groß ist das Gewicht (g_k), die Geschwindigkeit (c_k) und die Wucht ($\mathfrak{w}_k$) des $k^{\underline{ten}}$ Plattenteilchen, wenn die Figur und Bezeichnungsart der Aufg. *25* beibehalten wird? Wie groß ($\mathfrak{W}$) ist die Wucht der ganzen Platte?

Antwort: $\mathfrak{W} = \frac{\gamma \cdot n^2}{1789{,}1\ m} \cdot \Sigma f_k \cdot a_k^2$.

49. In der vorigen Aufgabe heißt derjenige Faktor der Wucht, welcher nur vom Profil und der Lage der Achse g abhängt, das Trägheitsmoment J der Fläche F für die Achse g. Wie groß ist demnach J?

a) Welche Maßeinheit hat ein Trägheitsmoment?

50. Begründe den Additions- (und Subtraktions-) Satz:

Ist eine Fläche F Summe (resp. Differenz) mehrerer Flächen $F_1, F_2, F_3, \ldots,$ so findet man das Trägheitsmoment von F für irgend eine Achse g, indem die Trägheitsmomente von $F_1, F_2, F_3, \ldots$ für diese Achse g addiert (resp. subtrahiert).

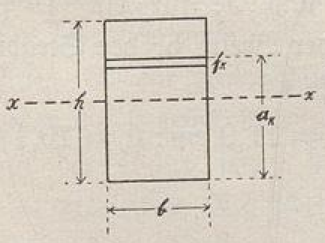
51. Beweise den Verschiebungssatz:

Ist J_s das Trägheitsmoment einer Fläche F für eine Schwerlinie s, so ist das Trägheitsmoment J_g für eine im Abstande v zu s parallel gezogene Achse g:

$J_g = J_s + v^2F$. (Aufg. *26.*) (Figur vgl. Aufg. *25.*)

a) Welchen Wert hat das Trägheitsmoment J_s einer Fläche für eine Schwerlinie im Vergleich zu den Trägheitsmomenten für andere Achsen derselben Richtung?

52.



Ein Rechteck von der Breite b und der Höhe h ist durch Parallelen zur Breitseite in sehr viele (n) gleich hohe Streifen geteilt. Wie groß ist f_k? Wie groß ist a_k, von einer Breitseite aus gemessen? Wie groß ist das Trägheitsmoment des Rechtecks für diese Breitseite? (Aufg. *24. b.*)

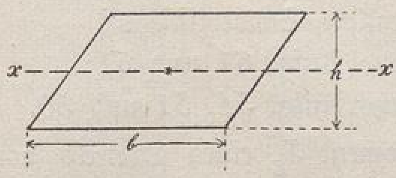
53. Wie groß ist das Trägheitsmoment J_x des vorgenannten Rechtecks für die Mittelparallele zur Breitseite?

a) Benutze Aufg. *52* für jede Rechteckshälfte und Aufg. *50.*

b) Benutze Aufg. *52* für das ganze Rechteck und Aufg. *51.*

c) Benutze die als bekannt vorausgesetzte Gleichung $J_x = u \cdot b \cdot h^3$ für jede Rechteckshälfte, ferner Aufg. *51* und *50* und löse die entstehende Gleichung nach u auf.

54.

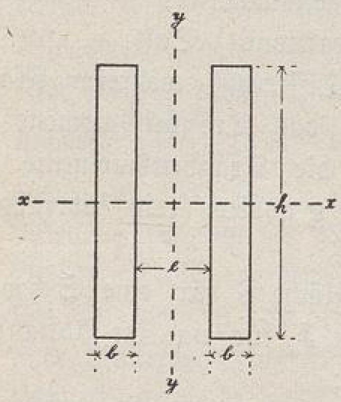


Wie groß ist J_x des nebenstehenden Parallelogrammes?

55. Wie groß ist das Trägheitsmoment J_y des in Aufg. *52* genannten Rechtecks für die Mittelparallele zur Längsseite?

56. Wie groß ist J_x oder J_y für ein Quadrat von der Seitenlänge a?

57. Wie groß ist das Trägheitsmoment J_x einer quadratischen Hohlsäule, deren äußere Quadratseite A und deren innere Quadratseite a ist?
a) $A = 50$ *cm*; $a = 42$ *cm*; *b)* $A = 32$ *cm*; $a = 26$ *cm*.

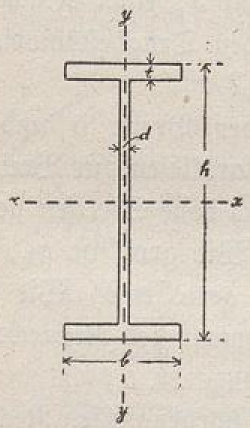


58. Wie groß ist J_x und J_y für eine aus 2 parallel liegenden Rechtecken von der Breite b und der Höhe h bestehende Fläche, wenn die innere Entfernung der beiden Rechtecke e ist?

Antw. $J_y = \frac{1}{6}\, bh\,(4b^2 + 6be + 3e^2)$.

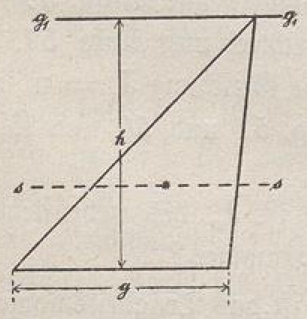
59. Für welchen Wert der inneren Entfernung e werden in der vorigen Aufgabe J_x und J_y einander gleich?

a) Welchen Wert hat diese innere Entfernung, wenn $h = 2b$ ist und $J_x = J_y$ sein soll?



60. Wie groß ist J_x und J_y für ein I-Profil von der Höhe h, der Breite b, der Stegdicke d und der Flanschdicke t?
a) $h = 28$ *cm*; $b = 11{,}9$ *cm*; $d = 10{,}1$ *mm*; $t = 15{,}2$ *mm*.

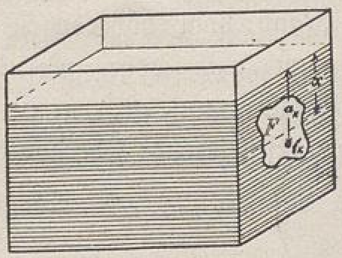
61. Wie groß ist das Trägheitsmoment J eines Dreiecks von der Grundlinie g und der Höhe h für eine durch die Spitze parallel zu g gezogene Achse g_1? (Aufg. *24c.*)



62. Wie groß ist das Trägheitsmoment J_s des vorgenannten Dreiecks für die zur Grundlinie parallele Schwerlinie s?
a) Benutze Aufg. *61* und *51*;
b) Benutze Aufg. *54, 51* und *50.*

63. Wie groß ist das Trägheitsmoment J_g eines Dreiecks von der Grundlinie g und der Höhe h für die Grundlinie als Achse?

64. Eine vertikale Fläche F erfahre horizontalen Druck durch eine Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht s.



Wie groß ist der Druck p_k auf ein Flächenteilchen f_k, dessen Entfernung vom Niveau der Flüssigkeit a_k ist? Wie groß ist der resultierende Druck P für die ganze Fläche F? Wie groß ist P, wenn die horizontale Schwerlinie der Fläche F vom Flüssigkeitsniveau die Entfernung x hat?

65. Wie groß ist in der vorigen Aufgabe das Moment des auf f_k wirkenden Druckes p_k in Bezug auf die Niveaulinie als Drehachse? Wie groß ist das resultierende Moment M des auf F wirkenden Druckes P in Bezug auf dieselbe Achse? Wie weit (y) unter der Niveaulinie liegt der Druckmittelpunkt, d. h. der Angriffspunkt des resultierenden Druckes P?

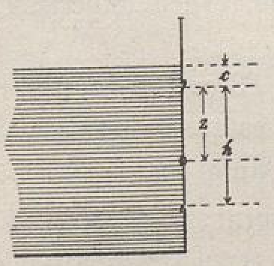
66. Wie groß ist in der vorigen Aufgabe y, wenn das Trägheitsmoment der Fläche F für die Niveaulinie J ist?

67. Ein prismatischer Behälter ist bis zur Höhe h mit Wasser gefüllt. Wie tief (y) unter dem Wasserspiegel liegt der Druckmittelpunkt für jede Gefäßwand?

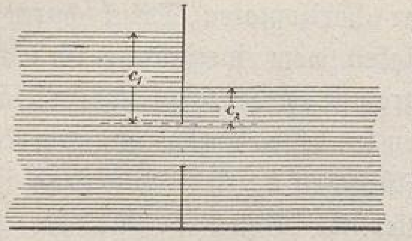
68. Aufg. *67* für eine Wand, welche ein mit der Spitze nach unten gekehrtes Dreieck bildet. (Aufg. *63.*)

69. In der Wand eines prismatischen Wasserbehälters befindet sich eine rechteckige Glasscheibe von der Höhe h = 1 *m*, deren oberer Rand vom Wasserspiegel die Entfernung c = 20 *cm* hat. Wie weit (z) liegt der Druckmittelpunkt unter dem oberen Scheibenrand und wie weit (u) unter dem Schwerpunkt der Scheibe. Wie groß (P) ist der resultierende Wasserdruck, wenn die Scheibe b = 40 *cm* breit ist?

70. In der senkrechten Wand eines Wasserbehälters befindet sich eine



rechteckige Klappe von der Höhe h, welche sich um eine horizontale Achse drehen läßt, so daß sie sich oben nach außen öffnet. Diese Achse hat vom oberen Rand der Klappe die Entfernung z. Wie hoch (c) über den oberen Rand der Klappe darf das Wasser steigen, ehe die Klappe sich öffnet?

71. 

In einer vertikalen Schleusenwand ist eine rechteckige Klappe, deren oberer Rand vom höheren Wasserspiegel um c_1, vom niedrigeren Wasserspiegel um c_2 entfernt ist. Wo greift der resultierende Überdruck an?

§ 5.

72. Die in Aufg. *48* beschriebene ebene Platte rotiere um eine zu ihr senkrechte sog. Polarachse l mit der Tourenzahl n. Wie groß (W) ist die Wucht der Platte?
Anl. Die Entfernung des Flächenteilchen f_k von der Polarachse heiße r_k.

73. Wie groß ist das polare Trägheitsmoment J von F? (Aufg. *49.*)

74. Wie groß ist das polare Trägheitsmoment J_z eines Kreises vom Radius r für die in seinem Mittelpunkt errichtete Polarachse z?
Anl. Teile einen Radius in n gleiche Teile und lege durch die Teilpunkte konzentrische Kreise.

75. Für 2 aufeinander senkrechte Achsen g und h sind die Trägheitsmomente J_g und J_h einer Fläche F bekannt. Wie groß ist das polare Trägheitsmoment J_l für die im Schnittpunkt von g und h errichtete Polarachse l? Anl. Pythagoras!

76. Wie groß ist das polare Trägheitsmoment eines Rechtecks für eine
a) im Schwerpunkt errichtete Polarachse z?
b) im Mittelpunkt der Breitseite errichtete Polarachse l?
c) im Mittelpunkt der Längsseite errichtete Polarachse l?

77. Wie groß ist das Trägheitsmoment eines Kreises vom Radius r für irgend einen Durchmesser? (Aufg. *74* und *75.*)

78. Wie groß ist das Trägheitsmoment eines Quadrates von der Seitenlänge a für eine beliebige Schwerlinie?

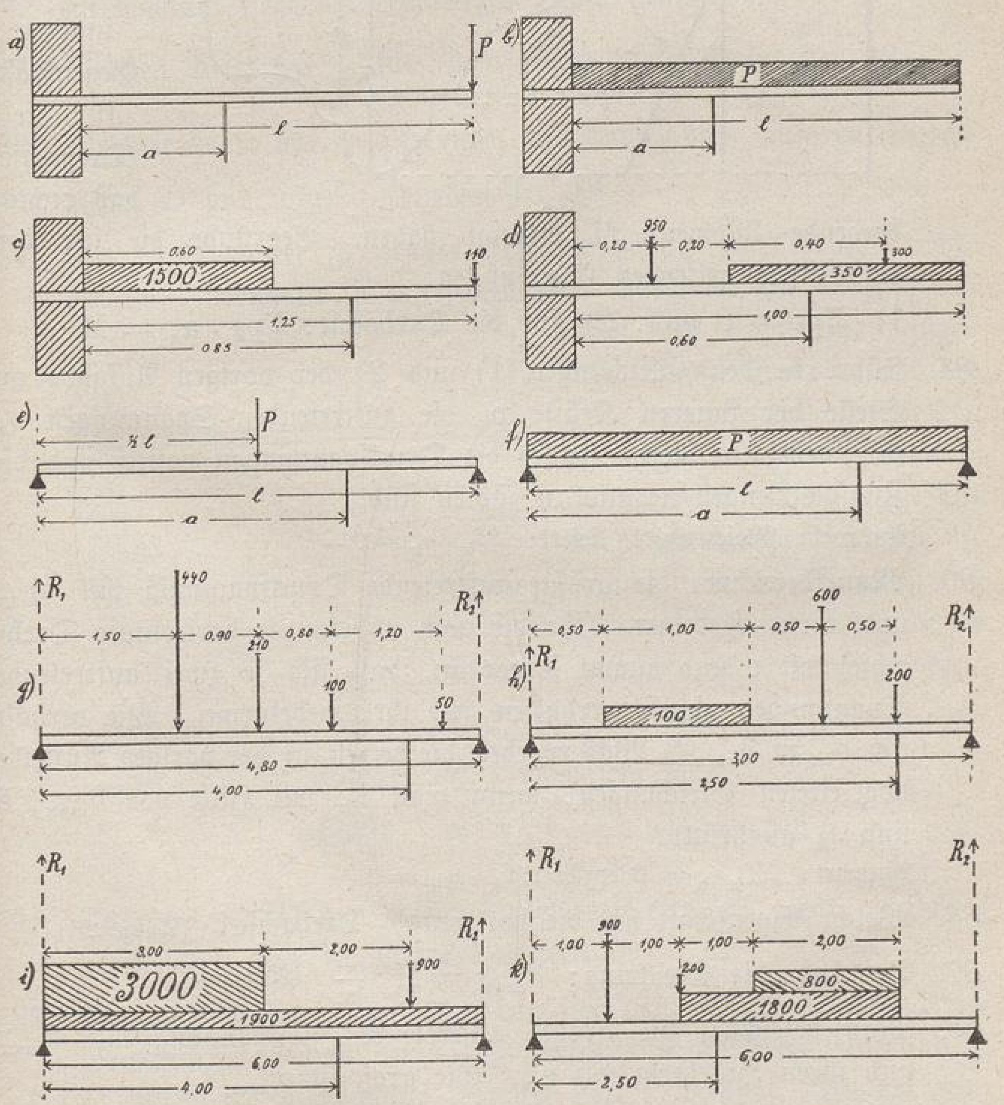
79. Wie groß ist das auf einen Durchmesser bezogene Trägheitsmoment J eines ringförmigen Querschnitts, dessen äußerer Durchmesser D und dessen lichte Weite d ist?
a) $D = 30\ cm$; $d = 24\ cm$; *b)* $D = 13\ cm$; $d = 9{,}4\ cm$.

80. Gib den Verschiebungssatz (Aufg. *51*) für polare Trägheitsmomente an und beweise denselben mit Hilfe von Aufg. *75*.

81. Wie groß ist das polare Trägheitsmoment eines Kreises vom Radius r für eine exzentrische Polarachse, deren Exzentrizität e ist?

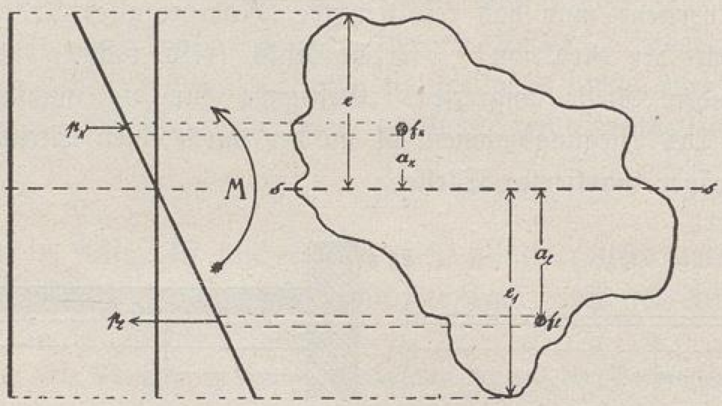
§ 6.

82. Unter dem Biegungsmoment M eines Trägers an einer bestimmten Stelle versteht man das resultierende Moment aller Kräfte einschließlich der Reaktion*), welche links (resp. rechts) von der betreffenden Stelle angreifen. Bestimme für die nachstehenden Träger das Biegungsmoment M an der durch einen Strich unter dem Träger markierten Stelle.



*) Die Reaktionen sind die Gegenkräfte zu den Auflagerdrucken; für die hier gezeichneten Träger auf 2 Auflagern sind die Reaktionen negativ.

83. Das an nebenstehendem Querschnitt F wirkende linksdrehende Biegungsmoment M dreht denselben solange um eine horizontale Achse, bis die infolge dieser Formänderung entstandenen inneren Gegenkräfte für die Drehachse das rechtsdrehende Moment M erlangt haben. Begründe die für den Endzustand geltenden Gleichungen:



1) $\Sigma p_k = 0$ und: 2) für die Drehachse: $\Sigma p_k \cdot a_k = M$.

84. Führe in den Gleichungen 1) und 2) der vorigen Aufgabe an Stelle der inneren Kräfte p_k die auftretenden Spannungen σ_k ein, wobei (in diesem Falle) die Druckspannungen positiv und die Zugspannungen negativ zu zählen sind.

Antwort: Gleichung 1) liefert: $\Sigma f_k \cdot \sigma_k = 0$.

85. Man bezeichnet die größte auftretende Druckspannung mit σ_{max} und ihren Hebelarm (für die noch unbekannte horizontale Drehachse) mit e und nimmt ferner an, daß sich je zwei auftretende Spannungen ebenso verhalten wie ihre Hebelarme. Wie verhält sich σ_k zu σ_{max}? Was ergeben die beiden in der vorigen Aufgabe abgeleiteten Gleichungen, wenn man σ_k mit Hilfe von σ_{max}, e und a_k ausdrückt?

Antwort: $\Sigma f_k \sigma_k = 0$ ergibt $\Sigma f_k \cdot a_k = 0$.

86. Welche Eigenschaft hat die horizontale Drehachse? (Aufg. 27.)

87. Begründe die Gleichung: $\sigma_{max} = M : \frac{J}{e}$. (Aufg. 49.)

88. Man bezeichnet die größte auftretende Zugspannung mit σ'_{max} und ihren Hebelarm mit e'. Wie groß ist σ'_{max}?

89. Welchen beiden Bedingungen muß das Biegungsmoment M genügen, wenn die zulässige Druckspannung des Trägermaterials mit k_d und die zulässige Zugspannung mit k_z bezeichnet wird?

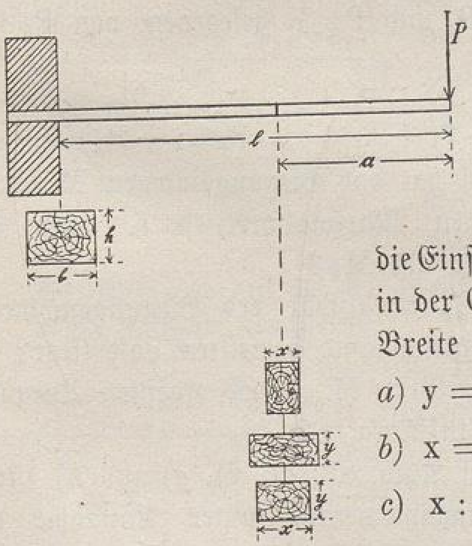
90. Welcher Bedingung muß das Biegungsmoment M für ein Pro genügen, dessen Höhe durch die horizontale Schwerlinie halbiert wird, wenn man den kleineren der Werte k_d und k_z mit k bezeichnet? Antwort: $M \leqq k_b \cdot \frac{J}{e}$.

91. Welchen Wert hat $\frac{J}{e}$ für ein Rechteck von der Breite b und der Höhe h? Welcher Bedingung muß das Biegungsmoment M für ein hochkant stehendes rechteckiges Profil genügen?

92. Welchen Wert hat $\frac{J}{e}$ für einen Kreis vom Durchmesser d?

93. Welchen Wert hat $\frac{J}{e}$ für einen Kreisring, vom äußeren Durchmesser D und inneren Durchmesser d?

94. Ein eingespannter Freiträger von der Länge l und überall rechteckigem Querschnitt ist am freien Ende durch die Einzellast P belastet. An der Einspannungsstelle ist die Breite b und die Höhe h; an den anderen Stellen soll der Querschnitt derart verkleinert sein, daß σ_{max} für alle Stellen denselben Wert wie für die Einspannungsstelle hat. Wie groß muß in der Entfernung a vom freien Ende die Breite x und die Höhe y sein, wenn:



a) $y = h$ sein soll;

b) $x = b$ sein soll;

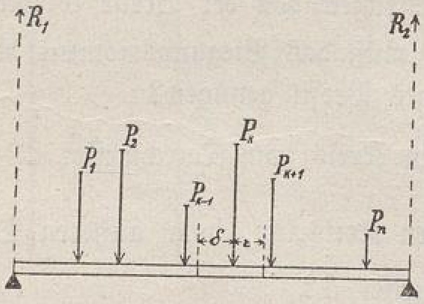
c) $x : y = b : h$ sein soll?

95. Aufg. *94. a*), *b*) und *c*) für denselben Freiträger, wenn die Last P gleichmäßig über die Länge l verteilt ist.

96. Ein eingespannter Freiträger von der Länge l und überall kreisförmigem Querschnitt ist *a*) am freien Ende durch die Einzellast P, *b*) durch die gleichmäßig verteilte Last P belastet. An der Einspannungsstelle ist der Durchmesser d; wie groß (x) muß derselbe in der Entfernung a vom freien Ende sein, damit dort σ_{max} denselben Wert hat, wie an der Einspannungsstelle?

97. Ein eingespannter Freiträger ist durch mehrere vertikal nach unten gerichtete Kräfte belastet. Für welche Stelle ist der (absolute) Wert des Biegungsmomentes am größten?

98. Ein an beiden Enden unterstützter Träger ist durch die vertikal nach unten gerichteten Einzelkräfte P_1, P_2, ... P_{k-1}, P_k, P_{k+1}, ... P_n belastet, welche am linken Auflager die Reaktion R_1 und am rechten Auflager die Reaktion R_2 hervorrufen. Für den Angriffspunkt von P_k ist das linksseitige positive Biegungsmoment M ermittelt. Wie groß ist das linksseitige Biegungsmoment



a) M_1 an einer zwischen P_k und P_{k-1} gelegenen, von P_k um δ entfernten Stelle;

b) M_2 an einer zwischen P_k und P_{k+1} gelegenen, von P_k um ε entfernten Stelle?

Antwort: $M_1 = M - (R_1 + P_1 + P_2 + \ldots . P_{k-1}) \cdot (-\delta)$;
$M_2 = M + (R_1 + P_1 + P_2 + \ldots . P_{k-1} + P_k) \cdot (-\varepsilon)$.

99. Unter welchen Bedingungen hat das Biegungsmoment M für den Angriffspunkt von P_k einen Maximalwert, d. h. einen Wert größer als M_1 und größer als M_2?

100. Wie bestimmt man eine Maximalstelle des Biegungsmomentes, wenn dieselbe unter einer gleichmäßig verteilten Last liegt?

101. Bestimme den (absoluten) Wert M_{max} des größten Biegungsmomentes für die Träger in Aufg. 82.

102. Berechne für die Träger in Aufg. 82. *c*), *d*), *g*) und *h*) für die Maximalstelle des Biegungsmomentes unter Annahme eines hochkant stehenden rechteckigen Profiles

a) die erforderliche Breite, wenn die Höhe $h = 18$ *cm* ist;

b) die erforderliche Höhe, wenn die Breite $b = 10$ *cm* ist;

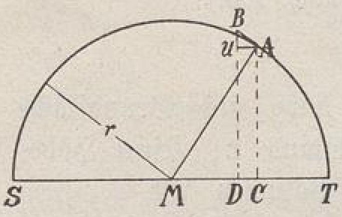
c) die erforderliche Breite und Höhe, wenn $b : h = 3 : 4$ sein soll;

und Eichenholz mit $k_b = 80$ *kg* pro *qcm* benutzt wird.

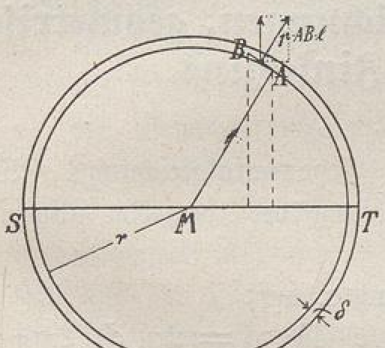
103. Berechne für die Träger in Aufg. 82. *i*) und *k*) für die Maximalstelle des Biegungsmomentes das erforderliche hochkant stehende I-Profil, wenn für Schmiedeeisen $k_b = 875$ *kg* pro *qcm* angenommen wird.

§ 7.

104. Jn einem Halbkreis über dem Durchmesser SMT = 2 r sei AB ein so kleines Bogenstück, daß dasselbe als Tangente im Punkte A aufgefaßt werden kann. Von A und B seien die Lote AC und BD auf den Durchmesser gefällt und AU parallel zum Durchmesser gezogen. Beweise mit Hilfe ähnlicher Dreiecke die Gleichung: AB · AC = r · CD und bilde Σ (AB · AC) für den Halbkreis. Antwort: Σ (AB · AC) = 2 r².

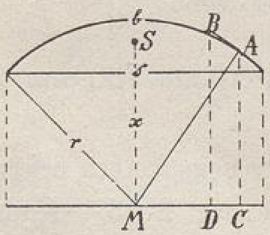


105. Auf die innere Mantelfläche eines Hohlzylinders von nebenstehendem Querschnitt und der Länge l wirke ein überall radial nach außen gerichteter Druck von der Druckstärke p. Wie groß ist die Zugkraft P, welche den Zylinder längs zwei diametral gegenüberliegenden, der Längsachse parallelen Schnitten S und T zu zerreißen sucht? Wie groß ist die hierdurch im Material hervorgerufene Zugspannung σ?



Anl. Bestimme den auf den Streifen AB · l wirkenden Druck und dessen zu ST senkrechte Komponente.

106. Von einem Kreisbogen sei der Radius r, die Bogenlänge b und die Sehnenlänge s bekannt. Wie weit (x) ist der Schwerpunkt S des Bogens vom Kreismittelpunkt M entfernt?

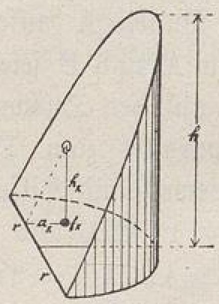


Anl. Bilde entsprechend der Aufg. *104* hier Σ AB · AC für den Bogen b.

107. Wie groß ist in der vorigen Aufgabe x für einen *a*) Halbkreisbogen; *b*) Sechstelkreisbogen; *c*) Viertelkreisbogen; *d*) Dreiviertelkreisbogen?

108. Wie weit (y) ist in Aufg. *106* und *107* der Schwerpunkt des zum Bogen b zugehörigen Kreisausschnittes vom Kreismittelpunkt entfernt?

109. Ein halbkreisförmiges Ringstück habe den äußeren Radius R und den inneren Radius r. Wie weit (x) ist sein Schwerpunkt vom Kreismittelpunkt entfernt? (Aufg. *108.*)



110. Ein Zylinderhuf habe als Grundfläche einen Halbkreis vom Radius r; seine Höhe sei h. Wie groß ist sein Volumen V?
Anl. $\Sigma f_k \cdot a_k = ?$; $h_k : a_k = ?$; $\Sigma f_k \cdot h_k = ?$ (Aufg. *108.*)

XXIV. Exponentialgleichungen, geometrische Reihen und Zinseszins.

§ 1.

1. Was versteht man unter einer Exponentialgleichung? Welcher Entwicklungsschritt ist zur Auflösung derselben (im allgemeinen) erforderlich?

2. Löse nachfolgende Gleichungen nach x auf:
a) $3^x = 81$; *b)* $a^{x+3} = a^7$; *c)* $4^{3x-2} = 2$; *d)* $2^{-x} = 8$;
e) $5^x = 5{,}87$; *f)* $(3^1/_3)^x = 411{,}5$; *g)* $(2{,}1783)^{7x} = 3{,}237$.

3. Der Barometerstand am Meeresspiegel beträgt 760 *mm* Quecksilber. Wieviel beträgt der Barometerstand in der Höhe von 100 *m*? ($\log 0{,}9998749 = 0{,}9999457 - 1$.) (Vgl. XXII, Aufg. *65.*)
a) in der Höhe von 200 *m*.
b) In welcher Höhe beträgt der Barometerstand 730 *mm* Quecksilber?

4. Bei einer Kolbenluftpumpe verhält sich der vom Kolben beschriebene Raum $\varkappa$ zum Inhalt ϱ des Rezipienten wie 2 : 3. Nach wieviel (n) Kolbenspielen beträgt die Druckstärke im Rezipienten nur noch 0,1296 *Atm.* (ohne Rücksicht auf den schädlichen Raum)? (Vgl. XXI, Aufg. *50.*)

5. Der Rezipient einer Luftpumpe faßt $\varrho = 2700$ *ccm*. Wie groß ($\varkappa$) muß der vom Kolben beschriebene Raum sein, damit (ohne Rücksicht auf den schädlichen Raum) der Luftdruck im Rezipienten nach 10 Kolbenspielen auf $\frac{1}{10}$ *Atm.* gesunken ist?

§ 2.

6. Wann nennt man die Reihe der Größen: $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_k, \ldots . a_n$ eine geometrische Reihe? Wie nennt man den konstanten Wert $(a_{k+1} : a_k)$? Wie groß ist a_n?

7. Drücke in der vorigen Aufgabe die Summe $s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots . a_k + \ldots . a_n$ aus mittelst *a)* a_1, q und n; *b)* a_1, a_n und q.

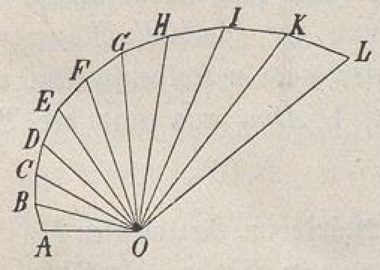
8. Welchem Grenzwert strebt die Summe s zu, wenn $q < 1$ ist und n ∞ wird?

9. Löse die Gleichung $s = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$ nach jeder der vorkommenden Größen auf.

10. Jemand will sich n Gewichtsstücke, mit 1 *g* beginnend, anschaffen, um mit denselben möglichst weit auf 1 *g* genau wägen zu können. Wieviel wiegt dieser Gewichtssatz, wenn:
   a) die Gewichtsstücke nur auf der einen Wageschale benutzt werden sollen;
   b) es erlaubt ist, Gewichtsstücke auch auf die Schale des zu wägenden Körpers zu legen?

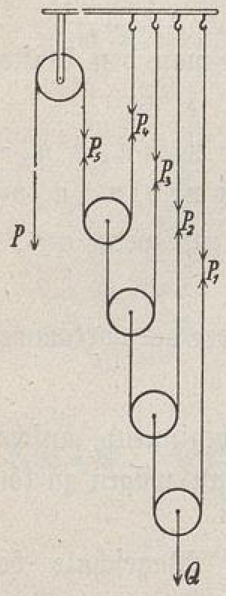
11. Ein aus der Höhe h herabfallender Gummiball springt jedesmal um 4/9 seiner Fallhöhe wieder empor. Welchen Weg legt der Ball im ganzen zurück und wie lange dauert die Bewegung (ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand)?

12. An ein Dreieck AOB, in welchem AO = 9 *cm*, OB = 10 *cm* und AB = 2,5 *cm* ist, ist das ähnliche Dreieck BOC, an dieses das ähnliche Dreieck COD u. s. f. angezeichnet, bis die Figur aus n = 10 Dreiecken besteht. Wie groß ist die äußere Umfassungslinie ABCDEFGHIKL und der Inhalt der ganzen Figur?



13. Die Last Q soll mittelst eines gewöhnlichen Flaschenzuges von im ganzen n Rollen gleichförmig gehoben werden. Wie groß ist die erforderliche Kraft P, wenn für jede Rolle die Zugkraft im ablaufenden Seile um 10 % größer ist als im auflaufenden Seile? Wie groß (η) ist der Wirkungsgrad dieses Flaschenzuges? (Setze $1{,}1 = w$.)
   a) Q = 1200 *kg*; n = 8.

14. Wieviel Rollen muß der Flaschenzug in Aufg. *13* haben, wenn die erforderliche Kraft höchstens ein Drittel der Last betragen soll?



15. Die Last Q soll mittelst eines Potentialflaschenzuges, der außer einer festen Rolle n lose Rollen besitzt, gleichförmig gehoben werden. Wie groß ist die erforderliche Kraft P, wenn w = 1,1 gesetzt wird und die Gewichte der losen Rollen nicht berücksichtigt werden? Wie groß (η) ist der Wirkungsgrad dieses Potentialflaschenzuges? *a*) Q = 1200 *kg*; n = 4.

16. Berücksichtige in der vorigen Aufgabe die Gewichte der losen Rollen, deren jedes = G sei. *a*) Q = 1200 *kg*; n = 4; G = 10 *kg*.

17. Bei einer Luftverdichtungspumpe sei das Verhältnis des Rezipienteninhalts ϱ zur Summe des Rezipienteninhalts ϱ und des schädlichen Raumes σ mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet. Wieviel (G_n) Luft ist im Rezipienten nach n Kolbenspielen, wenn das spezifische Gewicht der Luft bei 1 *Atm.* = s und der vom Kolben beschriebene Raum = $\varkappa$ ist?
a) Wie groß (p_n) wird die Druckstärke im Rezipienten?
b) Welchen Grenzwert hat G_n und p_n für $n = \infty$?

18. Bei einer Luftpumpe sei der vom Kolben beschriebene Raum = $\varkappa$, der Inhalt des Rezipienten = ϱ und der schädliche Raum = σ. Wieviel (G_n) Luft ist im Rezipienten nach n Kolbenspielen, wenn das spezifische Gewicht der Luft bei 1 *Atm.* = s und der Bruch $\frac{\varrho}{\varrho + \sigma + \varkappa} = \mathfrak{v}$ gesetzt wird?
a) Wie groß (p_n) wird die Druckstärke im Rezipienten?
b) Welchen Grenzwert hat G_n und p_n für $n = \infty$?

19. Beweise durch Umformung der gefundenen Ausdrücke, daß in der vorigen Aufgabe:
$$G_n = \frac{\varrho \cdot s}{\sigma + \varkappa}(\mathfrak{v}^n \cdot \varkappa + \sigma) \text{ und } p_n = \frac{\mathfrak{v}^n \cdot \varkappa + \sigma}{\sigma + \varkappa} \textit{ Atm.} \text{ ist.}$$

20. Bei der vorgenannten Luftpumpe ist $\varkappa$ = 620 *ccm*, ϱ = 2482 *ccm* und σ = 0,5 *ccm*. Wie groß ist die Druckstärke im Rezipienten nach 5 Zügen, ausgedrückt in *mm* Quecksilber?

21. Wieviel *mm* Quecksilber beträgt in der vorigen Aufgabe die geringste erreichbare Druckstärke (für $n = \infty$)?

22. Nach wieviel (n) Zügen beträgt bei der vorgenannten Luftpumpe die Druckstärke im Rezipienten noch 3 *mm* Quecksilber, wenn der Barometerstand $b = 750$ *mm* ist? (n ganzzahlig abgerundet).

§ 3.

23. Ein Kapital a_1 steht zu p % auf Zinseszins. Wie groß ist das Endkapital b_n am Ende des n^{ten} Jahres?

24. Wie nennt man $q = \frac{100 + p}{100}$?

25. Bestimme den Zinsfaktor q für $p = 3$ %.
a) $p = 4^1/_2$ %; *b*) $p = 2^3/_4$ %; *c*) $p = 3^1/_3$ %; *d*) $p = 4{,}6$ %.

26. Bestimme den Zinsfuß p für $q = 1{,}042$.
a) $q = 1{,}035$; *b*) $q = 1{,}0525$; *c*) $q = 1{,}0433\ldots$; *d*) $q = 1{,}037$.

27. Löse die Gleichung $b_n = a_1 \cdot q^n$ auf:
a) nach a_1; *b*) nach q; *c*) nach n.

28. Zu welchem Betrage wachsen 4500 *M.* zu $4^1/_2$ % in 13 Jahren an?

29. Zu welchem Betrage wachsen 1700 *M.* in $23^1/_2$ Jahren bei einem halbjährlichen Zinsfuß von $1^5/_8$ % an?

30. Wieviel (a_1) muß man zu $5^1/_5$ % auf Zinseszins legen, um nach 50 Jahren 12618 *M.* zu erhalten?

31. Jemand will eine nach 8 Jahren fällige Schuld von 1033 *M.* durch Barzahlung tilgen. Wieviel muß er zahlen, wenn $p = 4^1/_4$ % Zinseszins gerechnet wird?

32. Jemand hatte vor 5 Jahren bei einer Sparkasse 1320 *M.* eingezahlt und erhebt 1570 *M.* Wieviel (p) % hatte die Sparkasse gerechnet?

33. Zu wieviel Prozent muß ein Kapital auf Zinseszins stehen, um sich in 28 Jahren zu verdreifachen?

34. In wieviel Jahren wächst ein Kapital von 625 *M.* zu 4,5 % auf 713 *M.* 23 ₰ an?

35. In wieviel Jahren verzehnfacht sich ein Kapital, welches zu $3^3/_4$ % auf Zinseszins steht?

36. Jemand legt zu Beginn eines jeden Jahres den Betrag r zu p % auf Zinseszins. Wieviel (b_n) beträgt sein Kapital am Ende des n^{ten} Jahres?

37. Ein Arbeiter legt zu Beginn eines jeden Jahres 120 *M.* auf die Sparkasse. Wieviel beträgt sein Vermögen am Ende des 25ten Jahres, wenn die Sparkasse 3 % gibt?

38. Wieviel (r) muß man zu Beginn jedes Jahres zu 3,8 % anlegen, um nach 17 Jahren 2418,50 *M.* zu besitzen?

39. Jemand hat 18 Jahre hindurch zu Beginn jedes Jahres eine Rente von 380 *M.* erhalten. Wie groß ist die Summe aller Renten mit Zinseszins am Ende des 18ten Jahres bei 4,3 %?
a) Wieviel muß man bar zahlen, um eine solche Rente zu kaufen?

40. Aufg. *39* und *39a*), wenn die Rente am Ende jedes Jahres, also zuletzt am Ende des 18ten Jahres, gezahlt wird?

41. Jemand will durch Barzahlung von 6000 *M.* eine Rente erwerben, welche 20 Jahre hindurch am Ende jedes Jahres gezahlt werden soll. Wie hoch ist die Rente bei Annahme von $3^1/_3$ %?

42. Wieviel Jahre hindurch kann man am Ende jedes Jahres eine Rente von 850 *M.* erhalten, wenn man 9000 *M.* bar einzahlt und 4 % Zinseszins gerechnet wird?
a) Dasselbe, wenn die Rente = r und die Barzahlung = 10r ist?

43. Wie groß ist der Barwert einer ewigen Rente ($n = \infty$) von 500 *M.* bei Annahme von 4,6 % Zinseszins?

44. Jemand legt das Kapital a_1 zu p % auf Zinseszins und zahlt außerdem am Ende jedes Jahres den Betrag r ein. Wie groß ist sein Kapital nach n Jahren geworden?
a) Dasselbe, wenn die nte Einzahlung des Betrages r nicht mehr erfolgt.

45. 4500 *M.* stehen zu 3,6 % auf Zinseszins. Wieviel beträgt das Endkapital nach 16 Jahren, wenn am Ende jedes Jahres (außer den Zinsen) 180 *M.* zugelegt werden?
a) Wieviel beträgt das Endkapital nach 32 Jahren, wenn die Zulagen vom Anfang des 17ten Jahres ab unterbleiben?

46. Jemand hat 4000 *M.* zu 4,3 % auf Zinseszins stehen. Wieviel (r) muß er am Ende jedes Jahres zulegen, um zu Beginn des 25ten Jahres 35 000 *M.* zu besitzen?

47. Jemand hat eine Schuld von 1800 *M.* mit 4 % zu verzinsen und zahlt 12 Jahre hindurch am Ende jedes Jahres 150 *M.* ab. Wieviel beträgt seine Schuld noch nach der 12ten Abzahlung?

Aug. Weisbrod, Frankfurt a. M.