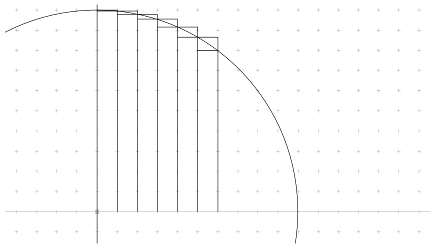
1. Kreise

Problemstellung
Flächeninhaltsberechnung eines Kreises mit dem Radius r.

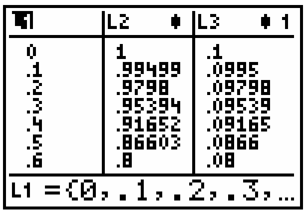
Lösungshinweise:
Rechteckstreifenmethode



Im Folgenden wird der Radius $r = 1$ gewählt!
Es gibt mehrere Möglichkeiten für die Behandlung dieser Methode unter Einsatz des GTR.

a) Arbeiten mit dem Listen-Menü

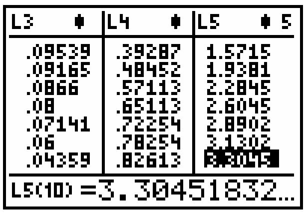
Das Arbeiten im Listen-Menü ist nur für eine geringe Zahl n der Unterteilungen praktikabel. Hier wird die Intervallschachtelung für den oberen Näherungswert durchgeführt. Die entsprechende untere Näherung kann von den Schülern selbst durchgeführt werden. Es wird eine Liste zur Bestimmung des Flächeninhalts des Kreises durch umbeschriebene Rechtecke aufgestellt.



L1	L2	L3 1
0	1	.1
.1	.99499	.0995
.2	.9798	.09798
.3	.95394	.09539
.4	.91652	.09165
.5	.86603	.0866
.6	.8	.08

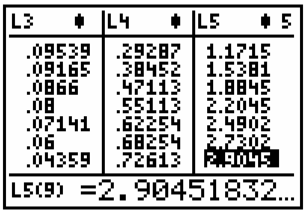
L1 ={0,.1,.2,.3,…

In L1 steht die Einteilung der x-Achse in z.B. 10 Teile für 10 Rechteckstreifen. Die Rechteckbreite beträgt somit 0,1. Manuelle Eingabe der Werte oder im Listenkopf “seq(0.1A,A,0, 9)“ eintragen. Durch Eingabe der Anführungszeichen zu Beginn und am Ende der Formel gibt der GTR die Formel im Listenkopf an. Der Befehl seq(findet sich unter LIST OPS 5: seq(.
In L2 tauchen die Rechteckhöhen auf: “ $\sqrt{1-(L1)^2}$ “.
In L3 wird zu jedem Rechteckstreifen im 1.Quadranten den zugehörigen Flächeninhalt: “ $0{,}1 \cdot L2$ “.
In L4 werden die einzelnen Summen der Rechteckstreifenflächeninhalte gebildet: LIST OPS 6: cumsum(.
In L5 schließlich werden die Werte aus der Liste L4 mit vier multipliziert, um den Flächeninhalt des gesamten Kreises anzunähern. In L5(10) steht das gewünschte Ergebnis: 3,3045.



L3	L4	L5 5
.09539	.39287	1.5715
.09165	.48452	1.9381
.0866	.57113	2.2845
.08	.65113	2.6045
.07141	.72254	2.8902
.06	.78254	3.1302
.04359	.82613	3.3045

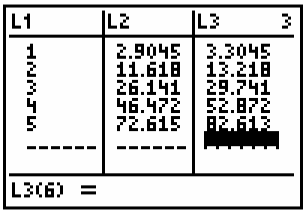
L5(10) =3.30451832…

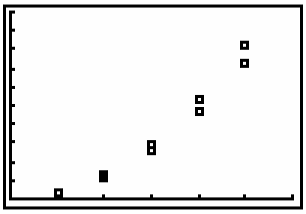


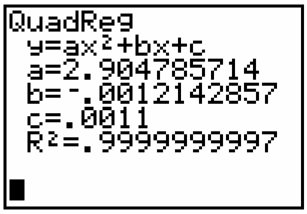
Für den unteren Näherungswert ergibt sich 2,9045.

Weiterführende Aufgabe
Variiere die Parameter n und r.

Lösungshinweise:
Wenn der Radius variiert wird, können die oberen und unteren Näherungswerte in Abhängigkeit vom Radius im GTR dargestellt werden. Hier wird $n = 10$ gewählt. Mit Hilfe einer geeigneten Regression kann eine erste Annäherung an π erfolgen. Näheres zur Durchführung einer Regression ist im Teil c) dieser ersten Methode nachzulesen.







Der Beweis für die Proportionalität zwischen dem Quadrat des Radius´ und dem Flächeninhalt des Kreises kann über die Ähnlichkeit von Kreisen geführt werden.

b) Arbeiten im HOME-Fenster und im Listen-Menü

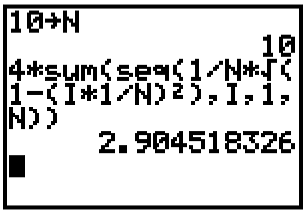
Im HOME-Fenster wird zu verschiedenen Radien direkt die Unter- und Obersumme z.B. U_{10} und O_{10} berechnet.

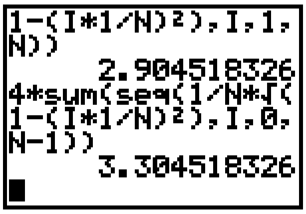
$$U_n = 4\cdot\left(\frac{r}{n}\cdot\sqrt{r^2-\left(1\cdot\frac{r}{n}\right)^2}+\frac{r}{n}\cdot\sqrt{r^2-\left(2\cdot\frac{r}{n}\right)^2}+....+\frac{r}{n}\cdot\sqrt{r^2-\left(n\cdot\frac{r}{n}\right)^2}\right)$$

$$= 4\cdot\frac{r}{n}\cdot\left[\sqrt{r^2-\left(1\cdot\frac{r}{n}\right)^2}+\sqrt{r^2-\left(2\cdot\frac{r}{n}\right)^2}+...+\sqrt{r^2-\left(n\cdot\frac{r}{n}\right)^2}\right]$$

$$= 4\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{r}{n}\cdot\sqrt{r^2-\left(i\cdot\frac{r}{n}\right)^2}.$$

Für die Obersumme gilt: $O_n = 4\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\frac{r}{n}\cdot\sqrt{r^2-\left(i\cdot\frac{r}{n}\right)^2}$.





Zunächst wird die Unter- und Obersumme für $n = 10$ berechnet.
GTR-Eingabe:
10→ n (STO-Taste)

$$4\text{sum}(\text{seq}((\frac{1}{N}\sqrt{1-\left(i\cdot\frac{1}{N}\right)^2},i,1,10)),$$

bzw.

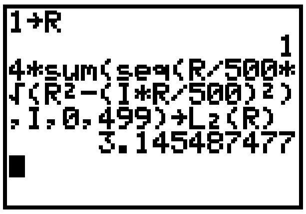
$$4\text{sum}(\text{seq}((\frac{1}{N}\sqrt{1-\left(i\cdot\frac{1}{N}\right)^2},i,0,9)),$$

Dieser Vorgang wird im HOME-Fenster mit einer größeren Anzahl an Unterteilungen n wiederholt.

Schließlich ergibt sich folgende Tabelle:

n	U_n	O_n
10	2,9045	3,3045
50	3,0983	3,1783
100	3,1204	3,1604
200	3,1312	3,1512

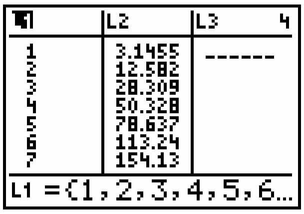
Im Folgenden ist es das Ziel, einen funktionalen Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt und dem Radius zu erhalten. Dabei wird mit $r = 1$ gestartet. Gleichzeitig ist aufgrund des Vorgehens mit dem Taschenrechner $r \in \text{IN}$ erforderlich. Es werden 500 Unterteilungen gewählt und die Obersumme berechnet.



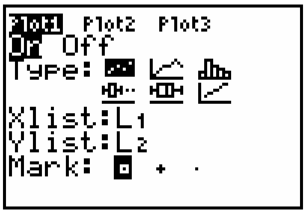
GTR-Eingabe:
1 → r (STO-Taste)
sum(seq((

$$\frac{r}{500}\sqrt{r^2-\left(i\cdot\frac{r}{500}\right)^2},i,0,499))\rightarrow \text{L2(r}$$

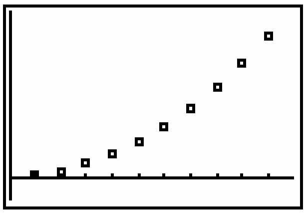
) (Speicherung des Wertes in der Liste L2 an r-ter Stelle).
Dieser Vorgang wird im HOME-Fenster mit verschiedenen Radien wiederholt.



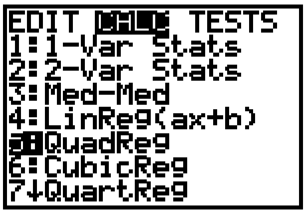
Anschließend werden im Listen-Menü in der Liste L1 die verschiedenen Radien (hier von r=1 bis r=10) eingegeben. Dieses kann von Hand geschehen, oder über Eintragung des Befehls seq(A,A,1,10)→ L1 in den Kopf der Liste L1. Die Liste L2 wurde bereits automatisch ausgefüllt.



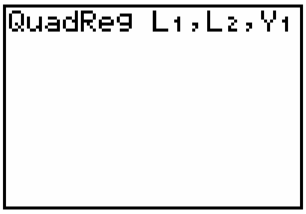
Eine grafische Darstellung der beiden Größen Radius und Flächeninhalt zeigt den möglichen Zusammenhang. Dazu wird über STAT PLOT die Graphik definiert. Über ZOOM 9:ZoomStat kann die Fenstergröße automatisch passend eingestellt werden.



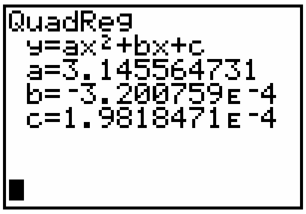
Es ergibt sich die nebenstehende Graphik. Die Lage der Punkte lässt auf einen quadratischen Zusammenhang zwischen dem Radius und dem Flächeninhalt schließen.



Im GTR wird eine entsprechende Regression ausgeführt, um auf den funktionalen Zusammenhang zu kommen.
Im STAT-Menü wählt man dazu mit CALC den Funktionstyp 5: QuadReg aus.

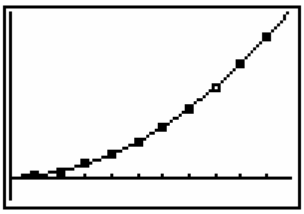


Um das nebenstehende Bild zu erhalten, muss zum Befehl QuadReg noch
L1 **,** L2 **,** VARS Y-VARS 1: Function 1: Y1
hinzufügt werden.



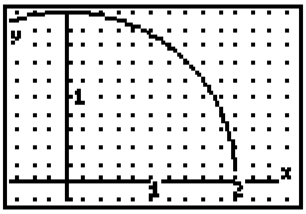
Mit ENTER erhält man den Funktionsterm.

Die quadratische Regression ergibt $A = 3{,}146 \cdot r^2$.



Im Graph-Fenster ist die Ausgleichskurve zu sehen. Es zeigt sich, dass die gefundene Näherungsgleichung akzeptabel ist.

Klassenarbeitsaufgabe zum Flächeninhalt des Kreises:
Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius r = 2 cm.



a) Berechne mit Hilfe der Rechteckstreifenmethode annähernd den Flächeninhalt des Kreises.
Lege dazu 8 Rechtecke <u>in und um</u> den Kreis herum.
<u>Notiere kurz, wie Du die Einteilung der x-Achse vornimmst und was für weitere Listen Du benötigst.</u>

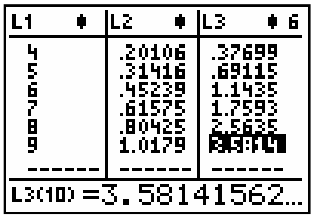
b) Vergleiche die beiden Näherungswerte aus a) miteinander.
Was fällt auf? Begründe!

Im Unterricht mit einer anderen Rechteckstreifenzahl behandelt.

2. Körper

Problemstellung:
Bestimme das Volumen eines Kegels mit dem Radius r und der Höhe h.

Lösungen:
a) Listen-Menü (praktikabel für n <11)



L1: Scheibennummer (0-9)
Einzeleingabe oder über seq(
L2: Volumen der n-ten Scheibe

$$\left(L1\cdot\frac{1}{10}\cdot R\right)^2\cdot\pi\cdot\frac{H}{10}$$

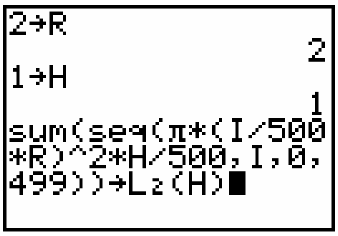
L3: Summe der Zylindervolumen
cumSum(L2)
Hier ist r=2 cm und h = 1 cm.

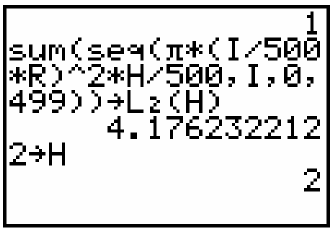
b) HOME-Fenster, Listen-Menü (praktikabel auch für große n)

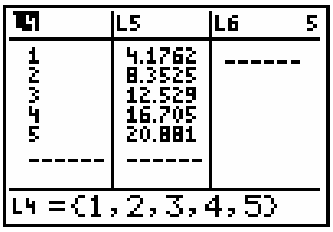
Zusammenhang zwischen dem Volumen V und der Höhe h eines Kegels.
Im Beispiel wurde der Radius r = 2 cm gewählt.
Im folgenden wurden 500 Zylinderscheiben in den Kegel hineingelegt.
Damit folgt als Annäherung für das Volumen des Kegels:

$$U_{500}=\sum_{i=0}^{499}\pi\cdot\left(\frac{i}{500}\cdot R\right)^2\cdot\frac{H}{500}\quad .$$

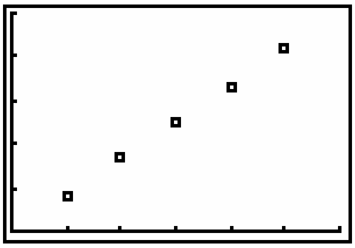
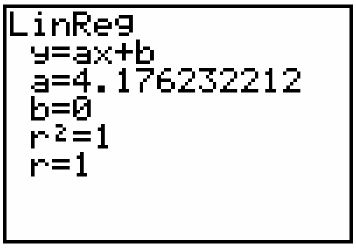
Im HOME-Fenster wird direkt die Summe der Flächeninhalte der n Scheiben berechnet und automatisch im Listen-Menü abgespeichert.
Dieser Vorgang wird dann für verschiedene Höhen wiederholt.

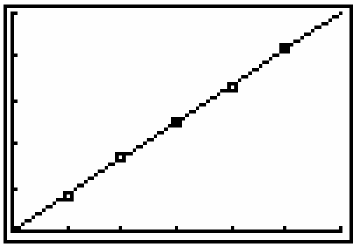






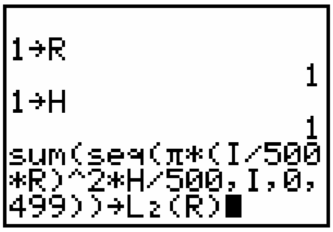
Auswertung der Graphik, die sich durch das Plotten der beiden Listenwerten ergibt:

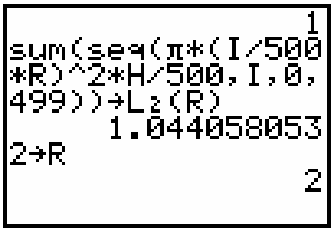



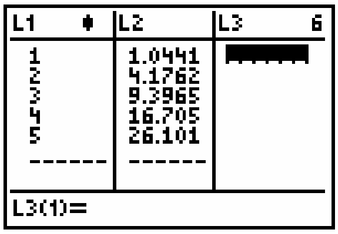


Somit ergibt sich für r = 2 cm folgender Zusammenhang: V= 4,176 h .

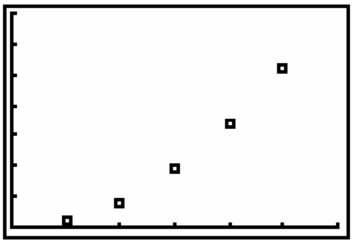
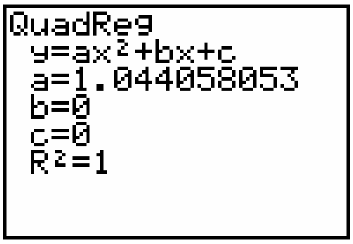
Analog lässt sich ein Zusammenhang zwischen dem Volumen V und dem Radius R eines Kegels ermitteln (Höhe hier h=1LE).
Erneut wurden 500 Scheiben in den Kegel hineingelegt.

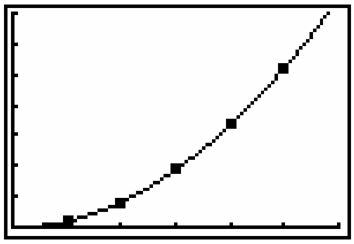






Auswertung der Graphik, die sich durch das Plotten der beiden Listenwerten ergibt:



Somit ergibt sich für h = 1 cm folgender Zusammenhang: V = 1,044 r^2 .

Ergebnis:

Aus den beiden obigen Gleichungen ergibt sich:
$V \quad r^2 \cdot h \quad \Leftrightarrow V = k \cdot r^2 \cdot h$, mit k konstant.
Für k folgt: $k = \frac{1{,}044}{1 \cdot 1} = \frac{4{,}1762}{2^2 \cdot 1} = 1{,}044 \approx \frac{\pi}{3}$.
Also: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Übung:

Gleiche Ausführungen lassen sich auch für die Obersumme durchführen.

Klassenarbeitsaufgabe zur Körperberechnung:
Hier soll die Formel für das Volumen einer Halbkugel hergeleitet werden.
Dazu werden – ähnlich wie bei der Herleitung der Formel für das Volumen des Kegels- Zylinder in die Halbkugel gelegt. Der erste Zylinder soll hier der unterste sein.

a) Begründe kurz, warum man an die Radien der einzelnen Zylinder nicht mittels des Strahlensatzes kommt.
b) Begründe, warum für den untersten Scheibenradius

   $r_1^{\,2} = r^2 - \left(\frac{r}{n}\right)^2$ gilt und

   entsprechend für den 2. Scheibenradius

   $r_2^{\,2} = r^2 - \left(\frac{2r}{n}\right)^2$ gilt.
c) Zeige dass für die Untersumme gilt:

   $$U_n = \pi \cdot \left(r^2 - \left(\frac{r}{n}\right)^2\right) \cdot \frac{r}{n} + \pi \cdot \left(r^2 - \left(\frac{2r}{n}\right)^2\right) \cdot \frac{r}{n} + ... + \pi \cdot \left(r^2 - \left(\frac{(n-1) \cdot r}{n}\right)^2\right) \cdot \frac{r}{n}$$
d) Die Gleichung aus c) kann zu $U_n = \pi \cdot r^3 \cdot \frac{n-1}{n} - \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{n^3}$

   umgeformt werden.
   Versuche mit dieser Gleichung eine Formel für das Volumen einer Halbkugel zu bekommen.

Im Unterricht behandelt:

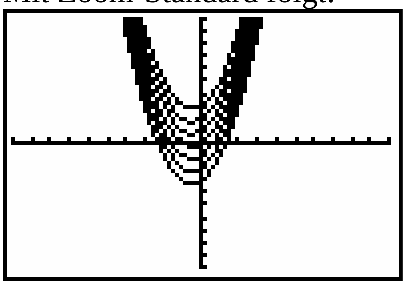
- *Körperberechnungen, ohne Kugelbehandlung;*
- *Volumen des Kegels wurde über ein- und umbeschriebene Zylinder hergeleitet;*

3. Funktionen

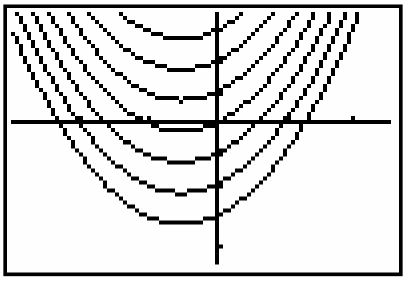
Aufgabe 1
Gegeben ist die Parabelschar mit der Funktionsgleichung $y = x^2 + x + c, \qquad c \in R$.

a) Wie wirkt sich eine Veränderung von c auf den Graphen aus?
b) Treffe eine Aussage über die Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von der Wahl von c.

Lösung
Mit Zoom-Standard folgt:



Hier ist c= (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)
Es zeigt sich, dass eine Vergrößerung des Wertes für c eine Verschiebung der Parabel in y-Richtung nach oben bedeutet.



Mit ZoomBox wird der entscheidende Ausschnitt vergrößert.
Vermutung: Für c $\leq$ 0 existieren zwei Nullstellen.

Eine exakte Rechnung liefert den genauen Wert für c, so dass zwei Nullstellen vorliegen.
Wir berechnen die Nullstelle der Parabelschar für ein allgemeines c.

$$0 = x^2 + x + c \Leftrightarrow -c = x^2 + x \Leftrightarrow -c + 0{,}25 = x^2 + x + 0{,}25 \Leftrightarrow -c + 0{,}25 = (x + 0{,}5)^2$$

$$\pm\sqrt{0{,}25 - c} = x + 0{,}5$$

Die Wurzel existiert aber nur, wenn 0,25-c größer oder gleich null ist.

Ist $0{,}25 - c > 0 \Leftrightarrow 0{,}25 > c$, existieren zwei Lösungen und die Parabel hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse.

Ist $0{,}25 - c = 0 \Leftrightarrow 0{,}25 = c$, hat die Gleichung nur eine Lösung und die Parabel somit genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse.

Wir fassen zusammen:
Wenn c < 0,25 ist, dann hat die Parabel zwei Nullstellen,
wenn c = 0,25 ist, dann hat die Parabel genau eine Nullstelle, der Scheitelpunkt liegt dann auf der x-Achse,
wenn c > 0,25 ist, dann hat die Parabel keine Nullstelle, sie verläuft dann nur im 1. und 2. Quadranten.

Aufgabe 2
Du bekommst von einem netten Menschen 2000 Euro geschenkt, die Du für einen Zinssatz von 2% zur Bank bringst. Die Zinsen werden mitverzinst.

a) Gib die Zuordnungsvorschrift *Zeit in Jahren* → *Kapital in Euro* an.
b) Auf wie viel Euro ist das Kapital nach 5 bzw. nach 10 Jahren angewachsen?
c) Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?
d) Variiere das Startkapital und bestimme jeweils zum Zinssatz von 2% die Verdoppelungszeit.
Was stellst Du fest? Formuliere einen Satz.
e) Variiere nun den Zinssatz von 1% bis 6% und bestimme jeweils die Verdoppelungszeit.
Notiere die Ergebnisse in der folgenden Tabelle:

Zinssatz p	1	2	3	4	5	6
Verdoppelungszeit d						

Gebe die Tabelle in Listen des TI-83 ein.
Stelle die Verdoppelungszeit d in Abhängigkeit vom Zinssatz p graphisch dar.
(Rechtsachse: Zinssatz, Hochachse: Verdoppelungszeit)
f) Welcher Zusammenhang könnte zwischen der Verdoppelungszeit und dem Zinssatz bestehen?
Führe mit dem TI-83 eine geeignete Regression durch. Schau eventuell im Handbuch nach, welche Regressionen der Taschenrechner durchführt.
Gib dann den formelmäßigen Zusammenhang an.

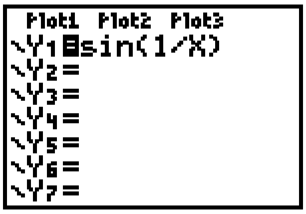
Aufgabe 3
Zeichne mit dem Taschenrechner den Graphen von g mit $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$.

Wähle Xmin = -10, Xmax = 10, Ymin = -2, Ymax = 2.

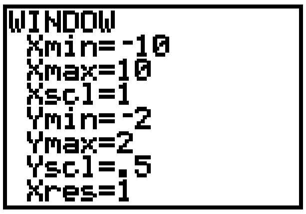
a) Beschreibe und begründe den Verlauf des Graphen für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$.

b) „Zoome“ den Graphen im Bereich um den Koordinatenursprung durch ZOOM, 2:Zoom In, ENTER heran. Dieser Vorgang kann wiederholt werden. Beschreibe und begründe den Verlauf des Graphen in der Nähe von null.

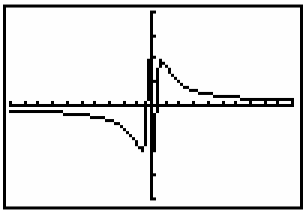
Lösungshinweise:



Der Taschenrechner muss im MODE-Menü auf Radian und Func gestellt werden.
Im Y=-Menü wird unter Y1 der Funktionsterm eingetragen.

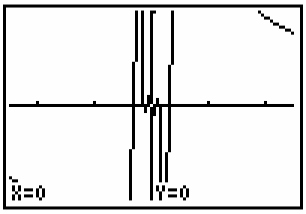


Eine mögliche „günstige“ WINDOW-Einstellung ist im nebenstehende Bild gegeben.

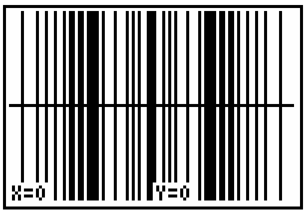


Mit GRAPH wird die Kurve im GTR gezeichnet.

Im GRAPH-Menü ist zu erkennen, dass die x-Achse Asymptote des Graphen von g ist. Begründung: Wird x betragsmäßig immer größer, geht der Bruch im Sinus gegen null. Der Sinus von einem Wert nahe bei null ist aber ebenfalls nahezu null.



Vom GRAPH-Menü aus wird der Graph nun im Bereich um den Ursprung herangezoomt. Das geschieht über ZOOM 2:ZoomIn ENTER.
Das 1. Bild zeigt den Graphen, nachdem einmal gezoomt wurde.



Durch erneutes Betätigen von ENTER kann weiter gezoomt werden.
Nach insgesamt viermal zoomen ergibt sich das 2. Bild.

In der Nähe von null nimmt die Anzahl der Nullstellen immer weiter zu. Begründung: Für $x \to 0$ wird der Bruch im Sinus betragsmäßig immer größer. Dann gibt es aber auch immer mehr Werte, von denen der Sinus null ist.

Aufgabe 4
Das Wiener Riesenrad gehört zu den eindrucksvollsten Riesenrädern.

In der folgenden Tabelle stehen einige technische Daten:

Höchster Punkt des Riesenrades	64,75 m über dem Boden
Durchmesser des Rades	60,96 m(= 200 engl. Fuß)
Äußerer Durchmesser der Radkonstruktion	55,78 m
Innerer Durchmesser der Radkonstruktion	49,68 m
Achse des Riesenrades	10,87 m lang, 0.5 m stark, 16.3 t schwer
Gewicht der ganzen Radkonstruktion	244,85 t
Gesamtgewicht aller Eisenkonstruktionen	430,05 t
Geschwindigkeit	0,75 m/sec = 2,7 km/h
Anzahl der Waggons	bis 1944: 30 Waggons, ab 1947: aus Sicherheitsgründen 15 Waggons. Die Waggons tragen die Nummern 2, 4, 6, usw. bis 30, wobei seit 1987 Waggon Nr. 30 als Luxuswaggon geführt wird.

a) Beschreibe den Bewegungsablauf verschiedener Wagen, sowie die gegenseitige Lage der Wagen zueinander.
Veranschauliche die zeitabhängige Höhe auf dem Taschenrechner graphisch.

b) Variiere die Umlaufgeschwindigkeit und stelle die Auswirkungen graphisch dar.

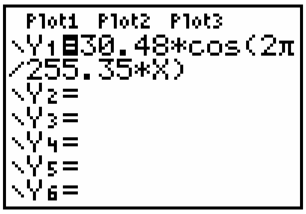
Lösungshinweise:

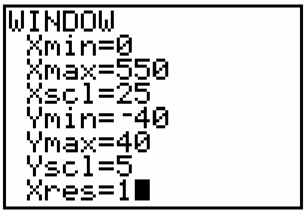
Zu Teilaufgabe a)

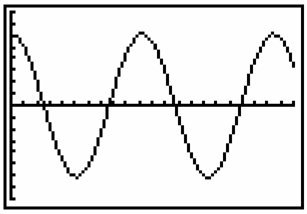
Im Folgenden betrachten wir die Gondeln, die hier Wagen heißen, mit den Nummern 2, 4, 10 und 30. Der Wagen Nr.2 möge sich zu Beginn unserer Beobachtung gerade im höchsten Punkt befinden. Im GTR soll nun die zeitabhängige Höhe der Wagen graphisch dargestellt werden. Der Koordinatenursprung wird in die Drehachse gelegt.
Unter MODE wird der GTR auf Radian und Func gestellt.
Zur Vereinfachung nehmen wir als Radius den halben Durchmesser des Riesenrades. Weiterhin möge sich das Riesenrad gegen den Uhrzeigersinn drehen.
Aus dem Umfang des Rades und der Geschwindigkeit kann die Umlaufdauer ermittelt werden: $T = \dfrac{191{,}51\text{m}}{0{,}75\text{m}/\text{s}} = 255{,}35\text{s}$. Damit folgt für den zugehörigen Term für Wagen Nr.2:

$$h_2(t) = 30{,}48\text{m} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{255{,}35\text{s}} \cdot t\right).$$

Dieser Term wird im Y=-Menü unter Y1 eingegeben. Mit dem entsprechenden Einstellungen für das WINDOW-Menü ergibt sich mit GRAPH die zugehörige Kurve.







Laut Angaben befinden sich insgesamt 15 Wagen am Riesenrad, die gleichmäßig verteilt sind. Damit folgt ein Winkelunterschied von 24° von Wagen zu Wagen. Wir nehmen noch an, dass die Wagen im Uhrzeigersinn durchnummeriert sind. Umgerechnet im Bogenmaß sind das $\dfrac{\pi}{180°} \cdot 24° = \dfrac{2}{15}\pi$. Somit folgt für die Wagen 4, 10 und 30:

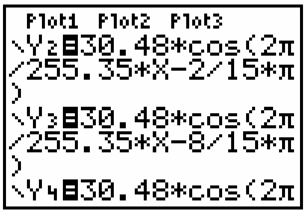
Wagen 4: $h_4(t) = 30{,}48\text{m} \cdot \cos\left(\dfrac{2\pi}{255{,}35\text{s}} \cdot t - \dfrac{2}{15}\pi\right).$

Wagen 10:

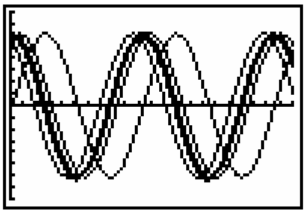
$$h_{10}(t) = 30{,}48\text{m} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{255{,}35\text{s}} \cdot t - \frac{8}{15}\pi\right).$$

Luxuswagen:

$$h_{30}(t) = 30{,}48\text{m} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{255{,}35\text{s}} \cdot t + \frac{2}{15}\pi\right) = 30{,}48\text{m} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{255{,}35\text{s}} \cdot t - \frac{28}{15}\pi\right).$$



Diese Terme werden unter Y= eingetragen.
Die Einstellungen im WINDOW-Menü bleiben bestehen.

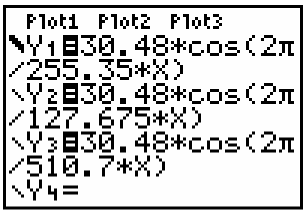


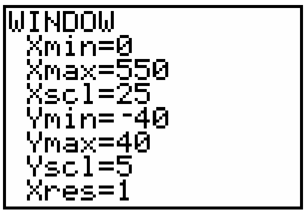
Unter GRAPH sind die Kurven zu sehen. Der Graph zu h_2 ist fett gezeichnet. Ein Graph kann fett gezeichnet werden, indem man mit dem Cursor vor das Gleichheitszeichen des entsprechenden Terms im Y=-Menü geht und anschließend solange ENTER getätigt, bis vor dem Y ein dicker Strich zu sehen ist.

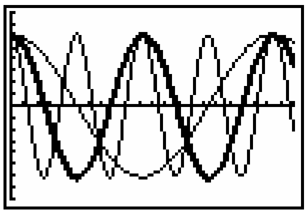
Zu erkennen ist, dass die übrigen Graphen aus dem Grundgraphen durch eine Verschiebung hervorgegangen sind.
Allgemein gilt: Wird der Graph der Sinusfunktion um k nach rechts verschoben, so verändert sich der Funktionsterm zu sin(x-k).

Zu Teilaufgabe b)

Die Veränderung im Funktionsterm durch eine andere Umlaufgeschwindigkeit wird am Wagen 2 verdeutlicht.
Wird die Umlaufgeschwindigkeit verdoppelt, so halbiert sich die Umlaufdauer T und der Faktor $\frac{2\pi}{T}$ verdoppelt sich. Gleichzeitig erkennt man, dass der zugehörige Graph durch eine Streckung mit dem Faktor 0,5 aus dem vorherigen Graphen hervorgeht.
Umgekehrt bedeutet eine Halbierung der Umlaufgeschwindigkeit eine Halbierung des Faktors, was sich im Graphen durch eine Streckung mit dem Faktor 2 bemerkbar macht.







Zweistündige Mathematikarbeit

Aufgabe 1:
Herr Pfiffig bringt einen Betrag von 60000 DM für fünf Jahre zur Bank. Der jährliche Zinssatz beträgt 4%, die Zinsen am Ende eines Jahres verbleiben auf dem Konto.

a) Stelle in einer Tabelle die Entwicklung des Kapitals dar.
Gib die Zuordnungsvorschrift *Zeit in Jahren* → *Kapital in DM* an.
Erläutere das Zustandekommen dieser Vorschrift.

b) Gib auch die rekursive Darstellung an.
Worin unterscheidet sich diese Darstellung von einer rekursiven Darstellung eines linearen Wachstums?

c) Herr Pfiffig hätte die 60000 DM auch für vier Jahre – auch mit Zinseszins - festlegen können. Die Bank hätte ihm dann folgende variable Zinssätze geboten: Für die ersten beiden Jahren jeweils 1%, für das dritte und vierte Jahr jeweils 7%.
Rechne „zu Fuß“ nach, welches Angebot günstiger ist.

Aufgabe 2:
Angenommen du schließt mit einem Geldinstitut einen Sparvertrag über sechs Jahre zu folgenden Konditionen ab: Vierteljährlich jeweils zu Beginn des Vierteljahres (Quartals) zahlst Du 250 DM ein. Der Zinssatz beträgt 3%, die Zinsen verbleiben für die Dauer des Vertrags auf dem Konto.

a) Berechne „zu Fuß“ den Kontostand am Ende des ersten Jahres und am Ende des zweiten Jahres.

b) Stelle eine rekursive Darstellung der Vorschrift *Zeit in Jahren* → *Kapital in DM* auf.

Aufgabe 3:
Es wird das folgende M & M –Experiment durchgeführt. Dieses Experiment wird mit M & M –Bonbons durchgeführt, das sind Schokolinsen, die auf einer Seite ein aufgedrucktes m tragen.
Zu Beginn werden vier M & M –Bonbons geworfen. Für jede Schokolinse mit einem oben liegenden m wird eine Schokolinse hinzu gelegt. Alle zusammen werden wieder geworfen und das Zählen beginnt erneut.
Die folgende Messreihe zeigt das Ergebnis einer Durchführung:

Wurfnr.	0	1	2	3	4	5
Anzahl der Linsen	4	6	9	14	20	30

Trage die Messwerte in Listen des TI-83 ein stelle sie graphisch dar.
Bestimme mit dem TI-83 eine Ausgleichskurve (Regression).
Notiere die Vorschrift *Wurfnummer x* → *Anzahl der Bonbons* .
Begründe die Vorschrift!

Aufgabe 4:
Die Stiftung Warentest untersucht Biere. Sie vergibt das Prädikat „sehr gute Bierschaumhaltbarkeit“, wenn nach 2 Minuten noch mehr als die Hälfte des Bierschaums vorhanden ist.
Zur Zeit misst sie für eine spezielle Sorte die Bierschaumhöhe. Zu Beginn der Messung war die Höhe 10 cm.
Man stellt fest, dass sich die Bierschaumhöhe alle 15 Sekunden um jeweils 9 % verringert.
Erhält die untersuchte Marke das Prädikat? Begründe durch Rechnung.
Gib auch den Zerfallsfaktor pro Minute an.

Aufgabe 5:

Zeichne mit dem TI-83 die Graphen von f mit $f(x) = 3^x$ und g mit $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ in <u>ein</u> geeignetes Koordinatensystem.

a) Notiere, was auffällt.

b) Verallgemeinere die Aussage aus a) für beliebige Basen b.

c) Beweise die Verallgemeinerung aus b).

d) Nenne zwei weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion der Form $x \mapsto b^x$.

Im Unterricht behandelt:

- *Finanzmathematik, lineares und exponentielles Wachstum;*
- *Exponentieller Zerfall;*
- *Vom Inhalt her neu: Nr.3 und Nr.5;*