Pfingsttagung 2002

Workshop 118 / 218

Dr. Elvira Malitte

Interessante Aufgaben zur Tabellenkalkulation im Mathematikunterricht – Taschenrechner TI-83 Plus und TI-92 Plus mit Excel kompatibel?!

erstmalig veröffentlich in:
Bärbel Barzel, Detlef Berntzen, Victor Manuel David Sendas: Neues Lernen. Neue Medien. Viele Projekte im Land. Tagungsdokumentation. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. 21.-24. Mai 2002. Münster 2003 (=ZKL-Texte Nr. 25), ISBN 3-934064-30-2

Interessante Aufgaben zur Tabellenkalkulation im Mathematikunterricht – Taschenrechner TI-83+ und TI-92+ mit Excel kompatibel?!

Elvira Malitte, Halle (Saale)

Die Tabellenkalkulation bietet die Möglichkeit, interessante Probleme im Mathematikunterricht auf elementare Weise (ohne eine Programmiersprache erlernen zu müssen) zu bearbeiten. Tabellenkalkulationsprogramme stehen heute nicht nur auf einem PC z. B. mit Excel zur Verfügung, sondern wurden auch für die Kleinrechner, sowohl für den Grafikrechner TI-83+ als auch für die symbolischen Algebrarechner TI-89 und TI-92+ bzw. dessen Nachfolger Voyage 200 entwickelt und zwar als Flash-Applikation ***CellSheet****.*

Die „Mini"-Tabellenkalkulation ***CellSheet*** *ist beim Grafikrechner mit allen Grafik- und Statistikfunktionen verknüpft, beim CAS-Taschencomputer auch mit allen Computeralgebrafunktionen. Der* ***CellSheet*** *Converter erledigt PC-seitig die Kommunikation und den Datenaustausch zwischen Computer (PC) und den Kleinrechnern. Er konvertiert Dateien aus Excel in* ***CellSheet*** *Dateien und umgekehrt.*

*Mit der Tabellenkalkulation werden auch sehr vertraute Aufgabenstellungen des Mathematikunterrichtes in der SI oder SII aus anderer Sicht gesehen und bearbeitet. Es gelingt, die Wege zur Lösung weiter zu öffnen. An ausgewählten Unterrichtsbeispielen werden diese Möglichkeiten vorgestellt und dabei der Einsatz verschiedener Werkzeuge (****CellSheet*** *auf dem TI-83+ und auf dem Voyage 200 sowie Excel auf dem PC) diskutiert.*

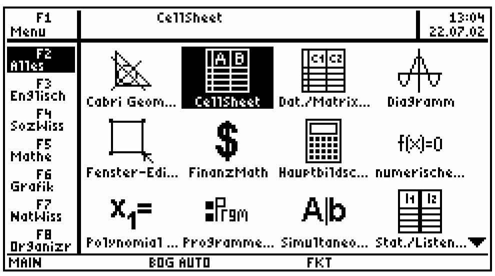
Die Tabellenkalkulation *CellSheet*

Wesentliche Charakteristiken einer Tabellenkalkulation sind in *CellSheet* realisiert:

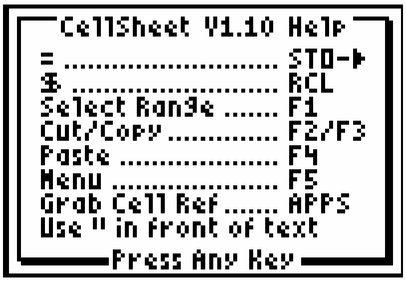
- Die Zellen können folgende Typen enthalten: Zahlen, Formeln, Ausdrücke, Strings, Funktionen.
- In Formeln können absolute und relative Zellbezüge und eine große Anzahl vordefinierter Funktionen verwendet werden.
- Übliche Arbeitstechniken, wie
  Markieren, Kopieren, Einfügen, Löschen von Zellen bzw. Bereichen,
  Einfügen oder Löschen von Zeilen oder Spalten,
  Importieren oder Exportieren von Matrizen, Listen, Variablen,
  Öffnen oder Speichern von Dateien,
  Sortieren ausgewählter Bereiche, ...
  lassen sich einfach ausführen.
- Verschiedene statistische Berechnungen sind vordefiniert.
- Die Darstellung numerischer Daten mit Hilfe verschiedener Diagrammtypen wird angeboten.
- ...

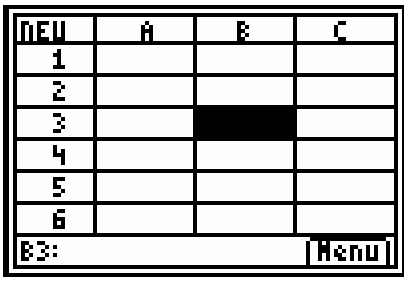
Damit sind durch *CellSheet* die Möglichkeiten des STAT-Menüs des TI-83+ bzw. des DATA-MATRIX-Editors der Symbolrechner deutlich erweitert worden.

Die Applikation enthält eine eingebaute Hilfefunktion, die grundlegende Informationen zur Anwendung bereitstellt. Die folgenden Abbildungen zeigen die Auswahl der *CellSheet*-Applikation aus einer Vielzahl standardmäßig angebotener Applikationen auf dem Voyage 200 und den zugehörigen Hilfebildschirm.



Beim Start von *CellSheet* auf dem TI-83+ wird der Hilfebildschirm (vgl. nachfolgende Abbildung links) automatisch angezeigt und steht dann stets über **Menu** (s drücken) zur Verfügung. Die nachfolgende rechte Abbildung zeigt ein noch leeres Datenblatt mit der Dateibezeichnung NEU, den standardmäßigen Bezeichnungen der Zeilen und Spalten und der Möglichkeit einer freien Zellenauswahl; hier wurde B3 aktiviert. Jede Zelle des Tabellenblattes kann jederzeit erreicht werden.





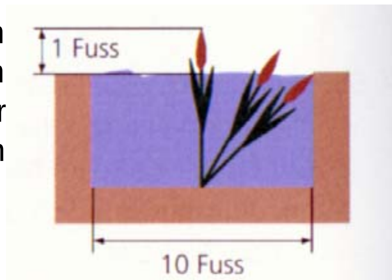
Die Tabellenkalkulation ermöglicht, auch sehr vertraute Aufgabenstellungen des Mathematikunterrichtes bereits in der SI aus anderer Sicht zu sehen und zu bearbeiten. Damit stehen zusätzliche Lösungswege zur Verfügung. Zunächst betrachten wir zwei historische Probleme aus dem Blickwinkel der Tabellenkalkulation.

Aufgabe 1

In einem alten chinesischen Rechenbuch findet sich folgende Aufgabe:

Ein quadratischer Teich ist 10 Fuß lang. In seinem Mittelpunkt steht ein Schilfrohr, das 1 Fuß aus dem Wasser herausragt. Zieht man das Schilfrohr ans Ufer genau zur Mitte einer Seite, reicht es gerade bis an den Rand des Teiches.

Wie tief ist der Teich dort, wo das Schilfrohr steht?



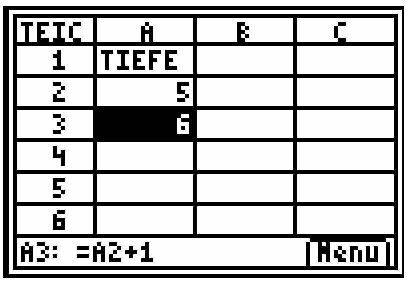
Aus: Mathematik, Sachsen-Anhalt, Klasse 8, Sekundarschule, Berlin: paetec, S. 140

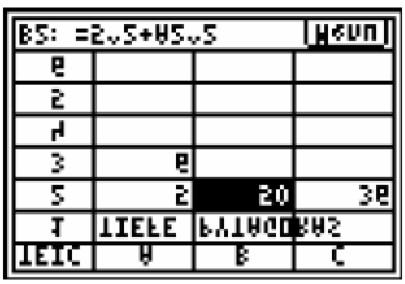
Anmerkungen zur Aufgabe 1:

Die Aufgabe 1 festigt üblicherweise den Umgang mit Variablen und das Lösen spezieller quadratischer Gleichungen – hier $5^2 + x^2 = (x + 1)^2$. Einige der dazu erforderlichen Fähigkeiten können beim Lösen mittels Tabellenkalkulation in den Hintergrund treten: Ist die Gleichung über den Satz des Pythagoras gefunden, kann die Termumformung und das formelhafte Lösen der quadratischen Gleichung ersetzt werden durch die Auswertung einer entsprechenden Tabelle.

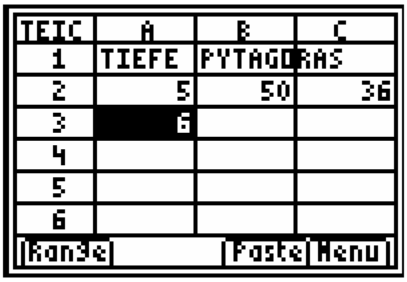
Entwickeln einer Tabelle in *CellSheet* auf dem TI-83+

Die Spalte A enthält einen Startwert für die gesuchte Tiefe des Teiches und eine Formel zur schrittweisen Vergrößerung dieses Wertes. Mit den Werten aus der Spalte A werden durch die angegebenen Formeln in den Spalten B und C die beiden Seiten unserer Gleichung berechnet (vgl. dazu die nachfolgenden drei Abbildungen).



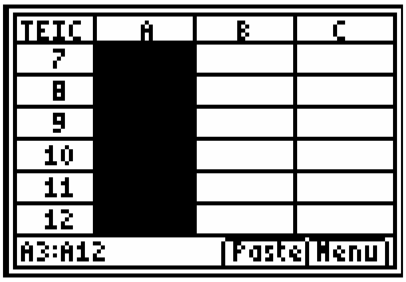


Das Übertragen der Formeln mit den relativen Zellbezügen in einen größeren Bereich erfolgt durch die üblichen Arbeitsschritte Kopieren (mit der Taste F3) – Auswahl eines Bereiches (mit der Taste F1) – Einfügen (mit der Taste F4). Durch die drei nachfolgenden Abbildungen werden diese Schritte am Beispiel des Ausfüllen der Spalte A im Bereich A3:A12 veranschaulicht.



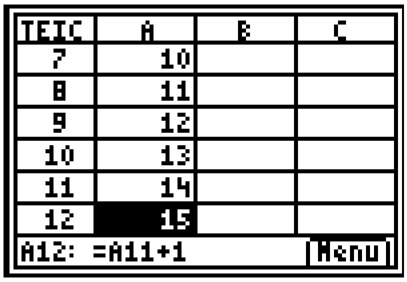
TEIC	A	B	C
1	TIEFE	PYTAGORAS	
2	5	50	36
3	6		
4			
5			
6			

Range Paste Menu



TEIC	A	B	C
7			
8			
9			
10			
11			
12			

A3:A12 Paste Menu

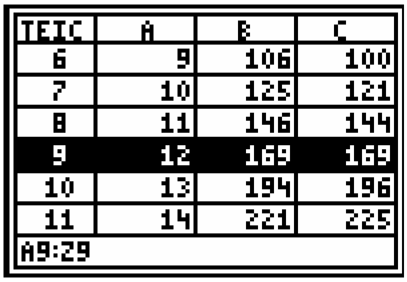


TEIC	A	B	C
7	10		
8	11		
9	12		
10	13		
11	14		
12	15		

A12: =A11+1 Menu

Wo steckt die Lösung?

Wenn alle drei Spalten der Tabelle in einem sinnvollen Bereich ausgefüllt sind, gilt es diejenige Zeile zu finden, in der die Werte in den Spalten B und C übereinstimmen. Die gesuchte Lösung ist der dort stehende Wert der Spalte A, hier also 12 Fuß für die gesuchte Tiefe des Teiches.



TEIC	A	B	C
6	9	106	100
7	10	125	121
8	11	146	144
9	12	169	169
10	13	194	196
11	14	221	225

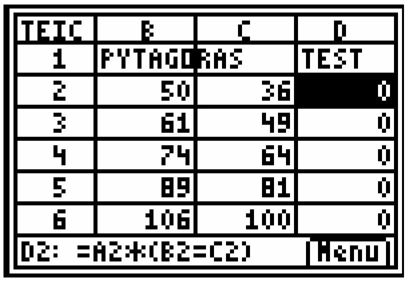
A9:29

Unterstützung bei der Suche nach der Lösung

Wer die Orientierung in der obigen Tabelle und das Auswerten auf diesem Niveau als zu mühsam empfindet, hat die Möglichkeit, durch eine zusätzliche Spalte den Test auf Gleichheit und das Ablesen der zugehörigen Tiefe maschinell zu realisieren.

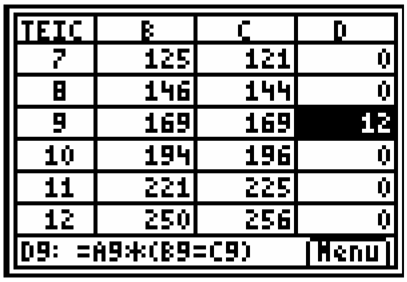
Der Test auf Gleichheit zweier Werte kann durch eine einfache Bedingung formuliert werden, die auch in einer Formel auf dem TI-83+ verwendbar ist. Im TI-83+ wird einer Bedingung der Wert 1 zugeordnet, wenn sie wahr ist, ansonsten der Wert 0.

In der Spalte D wird eine Formel verwendet, die den Zellenwert in Spalte A multipliziert mit der Gleichheitsbedingung der Zellenwerte in den Spalten B und C, also mit 0 oder 1. Diese Formel liefert damit die Werte 0 bzw. die gesuchte Tiefe des Teiches in der zugehörigen Zeile (vgl. die beiden nebenstehenden Abbildungen).



TEIC	B	C	D
1	PYTAGORAS		TEST
2	50	36	0
3	61	49	0
4	74	64	0
5	89	81	0
6	106	100	0

D2: =A2*(B2=C2) Menu

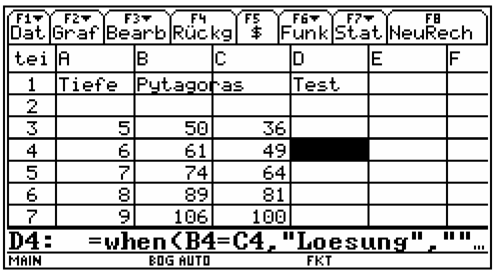


TEIC	B	C	D
7	125	121	0
8	146	144	0
9	169	169	12
10	194	196	0
11	221	225	0
12	250	256	0

D9: =A9*(B9=C9) Menu

Angebote des Voyage 200 zur Formulierung von Bedingungen

Steht ein TI-92+ oder ein Voyage 200 mit *CellSheet* zur Verfügung, so kann der Test in Spalte D noch komfortabler gestaltet werden: Der Befehl **when()** ermöglicht eine Zuordnung beliebiger Werte oder Texte für den Fall, dass die betrachtete Bedingung wahr, falsch oder unbekannt ist. Die nachfolgenden Abbildungen zeigen, dass wir hier die Zeile mit der Lösung durch das Wort „Lösung“ hervorheben, in den anderen Zeilen bleibt diese Spalte leer.

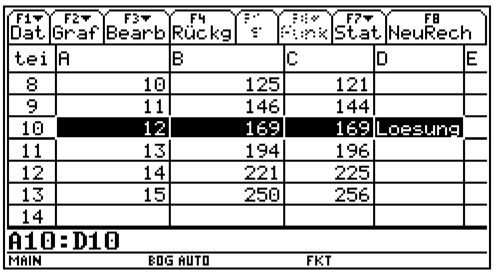


F1 Dat | F2 Graf | F3 Bearb | F4 Rückg | F5 $ | F6 Funk | F7 Stat | F8 NeuRech

tei	A	B	C	D	E	F
1	Tiefe	Pytagoras		Test		
2						
3	5	50	36			
4	6	61	49			
5	7	74	64			
6	8	89	81			
7	9	106	100			

D4: =when(B4=C4,"Loesung",""…

MAIN BOG AUTO FKT



F1 Dat | F2 Graf | F3 Bearb | F4 Rückg | F5 | F6 Funk | F7 Stat | F8 NeuRech

tei	A	B	C	D	E
8	10	125	121		
9	11	146	144		
10	12	169	169	Loesung	
11	13	194	196		
12	14	221	225		
13	15	250	256		
14					

A10:D10

MAIN BOG AUTO FKT

Aufgabe 2

Das Problem der 100 Vögel

Eine in vielen Varianten überlieferte Rätselaufgabe erscheint zum ersten Mal in „Arithmetischen Handbüchern" des Chinesen Chang Chin-Chin (um 475 n. Chr.).

„Für 100 Geldstücke sollen 100 Vögel gekauft werden. Ein Hahn kostet 5 Geldstücke, eine Henne 3 Geldstücke und 3 Küken 1 Geldstück. Wie viele Tiere sind es von jeder Sorte?"

Aus: Schnittpunkt 9, Mathematik für Sekundarschulen, Sachsen-Anhalt, Leipzig: Klett, S. 51.

Anmerkungen zur Aufgabe 2:

Die Aufgabe 2 findet sich auf der Einleitungsseite des Kapitels „II Gleichungssysteme. Ungleichungen" und wird ergänzt durch folgenden Kommentar:

Diese Problemstellung findet man in vielen Kulturen, z. B. bei den Indern und den Arabern. Aber auch viele uns bekannte Mathematiker schufen häufig ihre persönliche Variante:
Ein Beispiel zeigt das Bild aus dem Rechenbuch von Adam Ries (1492–1559).
Während man zwar viele dieser Aufgaben durch geschicktes Probieren lösen kann, ist ein solches Verfahren doch jedesmal recht aufwendig. So war es seit jeher ein Bestreben der Mathematiker, ein allgemeines Lösungsverfahren zu entwickeln. Ein erster Ansatz ist in den oben genannten chinesischen Rechenbüchern zu finden.

Adam Risen. 71

Vihekauff.

Item/einer hat 100. fl. dafür wil er 100. haupt Vihes kauffen / nemlich / Ochsen/ Schwein/ Kälber/ vnd Geissen/ kost ein Ochs 4 fl. ein Schwein anderthalben fl. ein Kalb einen halben fl. vnd ein Geiß ein ort von einem fl. wie viel sol er jeglicher haben für die 100. fl?

„ein Ort von einem fl" bedeutet ein Viertel von einem Gulden

Geschicktes Probieren

Ein Verfahren, was sich auf geschicktes Probieren stützt, wird üblicherweise als recht aufwändig eingeschätzt.
Welchen Aufwand kann ein Tabellenkalkulationsprogramm übernehmen?
Welche Aufbereitung der gegebenen Informationen sollte auch weiterhin per Kopf und Hand realisiert werden?

Aufstellen und Umformen eines Gleichungssystems

Um diese historische Problemstellung effizient und elegant zu lösen, sind die Formulierung eines zugehörigen Gleichungssystems und geeignete äquivalente Umformungen empfehlenswert. Erst im Anschluss daran kann die Tabellenkalkulation bei der Suche nach den Lösungen vorteilhaft sein. Das Formulieren zweier linearer Gleichungen mit drei Unbekannten (Anzahl der Küken (kü), der Hennen (he) und Hähne (hä)) und geschicktes Umformen dieser Gleichungen ermöglicht ein sehr zielgerichtetes Probieren zur Lösungsfindung. Die nachfolgenden Gleichungen beschreiben das Problem:

$$\begin{aligned} kü + he + hä &= 100 \\ \frac{1}{3}kü + 3he + 5hä &= 100 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$hä = 100 - kü - he$$
$$he = 200 - \frac{7}{3}kü$$

Entwickeln einer Tabelle in *CellSheet* auf dem TI-83+

Als Startwert für die Anzahl der Küken wählen wir eine Zahl, die einerseits durch 3 teilbar und andererseits recht groß ist: Denn für ein Geldstück gibt es jeweils 3 Küken; die meisten Tiere müssen Küken sein, sonst reicht das Geld nicht für 100 Tiere.

Die Spalte A enthält den Startwert und eine Formel zur schrittweisen Verringerung der Kükenzahl um 3 (denn die Anzahl der Küken muss durch 3 teilbar sein). In den Spalten B und C werden die obigen Gleichungen entsprechend als Formeln eingetragen.

VOGE	A	B	C
1	KUEKEN	HENNEN	HAEHN
2	90		
3	87		
4			
5			
6			
A3: =A2-3			Menu

VOGE	A	B	C
1	KUEKEN	HENNEN	HAEHN
2	90		
3	87		
4			
5			
6			
B2: =200-7/3*A2			

VOGE	A	B	C
1	KUEKEN	HENNEN	HAEHN
2	90	-10	
3	87		
4			
5			
6			
C2: =100-A2-B2			

Ausfüllen der Tabelle

Das Übertragen der Formeln in einen größeren Bereich erfolgt wieder durch die Schritte Kopieren (Taste F3) – Auswahl eines Bereiches (Taste F1) – Einfügen (Taste F4). Wir erhalten ein ausgefülltes Tabellenblatt (vgl. die nebenstehende Abbildung).

VOGE	A	B	C
1	KUEKEN	HENNEN	HAEHN
2	90	-10	20
3	87	-3	16
4	84	4	12
5	81	11	8
6	78	18	4
A2: 90			Menu

VOGE	A	B	C
4	84	4	12
5	81	11	8
6	78	18	4
7	75	25	0
8	72	32	-4
9	69	39	-8
A9: =A8-3			Menu

Interpretation der Werte

Erst durch die Interpretation der Zahlen und die Rückkopplung zum Ausgangsproblem können die Lösungen in der Tabelle gefunden werden: „Das Problem der 100 Vögel“ gestattet ganz selbstverständlich als Lösung nur natürliche Zahlen. Es sind also diejenigen Zeilen in der Tabelle auszuwählen, die nur natürliche Zahlen enthalten. Dieser Bereich wurde in der nebenstehenden Abbildung markiert: Wir erhalten als Lösungsmenge die markierten vier Zahlentripel.

VOGE	A	B	C
3	87	-3	16
4	84	4	12
5	81	11	8
6	78	18	4
7	75	25	0
8	72	32	-4
	Cut	Copy	Menu

Kontrolle

Die Durchführung einer Probe erscheint vielleicht wünschenswert. Dafür kann die Tabellenkalkulation hilfreich sein. Zu überprüfen sind zum einen die Gesamtanzahl der Tiere – das sollte als Übung zum Kopfrechnen geeignet sein. Etwas mehr Aufwand erfordert die Überprüfung der Gesamtkosten. Wir ergänzen dazu eine Spalte mit der Berechnungsvorschrift (vgl. die nebenstehende Abbildung).

VOGE	C	D	E
1	HAEHNE	KOSTEN	
2	20	100	
3	16	100	
4	12	100	
5	8	100	
6	4	100	
D2: =A2/3+3*B2+5*C2			

Der vorgeschlagene Lösungsweg für die Aufgabe 2 nutzt die Verwendung von Variablen und Gleichungen. Bei der nachfolgenden Aufgabe, die sich im gleichen Kapitel dieses Lehrbuches befindet, können diese Anforderungen an Schülerinnen und Schüler abgeschwächt werden.

Aufgabe 3

In einem Stall sind Hasen und Hennen und zwar 9 Tiere mit insgesamt 24 Füßen.
Wie viele Hasen und Hennen sind es jeweil

Versuche zunächst die Lösung durch Probieren mit Tabellen zu finden.

Aus: Schnittpunkt 9, Mathematik für Sekundarschulen, Sachsen-Anhalt, Leipzig: Klett, S. 57

Anmerkungen zur Aufgabe 3:

Die Aufgabe 3 wird als Einstiegsaufgabe im Lehrbuchabschnitt „Lineare Gleichungssysteme. Zeichnerische Lösung“ verwendet. Von den Schülerinnen und Schülern wird vor der zeichnerischen Lösung oder den Termumformungen die Formulierung eines entsprechenden Gleichungssystems erwartet. Der Vorschlag im Aufgabentext, als ersten Schritt die Lösung durch Probieren mit Tabellen zu finden, wird allerdings von Schülerinnen und Schülern selten umgesetzt. Die Tabellenkalkulation dagegen motiviert zur systematischen und bewussten Verwendung von Tabellen zur Lösungsfindung.

Entwickeln einer Tabelle in CellSheet auf dem TI-83+

Die Spalte A enthält einen Startwert für die betrachtete Anzahl der Hasen und eine Formel zur schrittweisen Vergrößerung dieser Anzahl. Die Informationen des Aufgabentextes werden durch Formeln in den Spalten B und C umgesetzt. Aus der betrachteten Anzahl der Hasen (Spalte A) wird durch die angegebene Formel in der Spalte B die zugehörige Anzahl der Hennen und schließlich durch die Formel in der Spalte C die zugehörige Anzahl der Füße aller bislang betrachteten Tiere berechnet.

STAL	A	B	C
1	HASEN	HENNEN	FUESS
2	1	8	20
3	2		
4			
5			
6			

A3: =A2+1 Menu

STAL	A	B	C
1	HASEN	HENNEN	FUESS
2	1	8	20
3	2		
4			
5			
6			

B2: =9-A2 Menu

STAL	A	B	C
1	HASEN	HENNEN	FUESS
2	1	8	20
3	2		
4			
5			
6			

C2: =4*A2+2*B2 Menu

Ausfüllen der Tabelle und Ablesen der Lösung

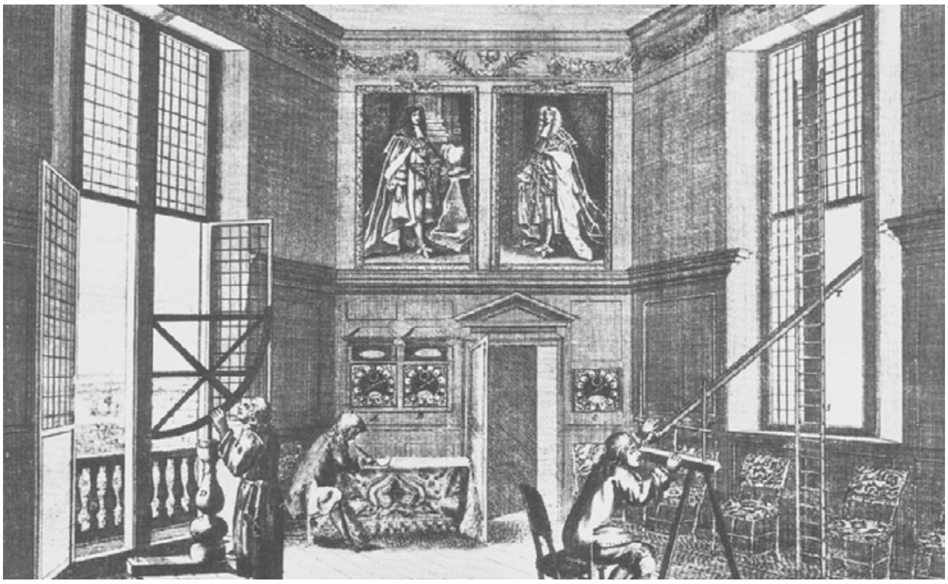
Das Übertragen der drei Formeln in einen größeren Bereich der Tabelle ist ohne große Mühe möglich. Wir erhalten das ausgefüllte Tabellenblatt (vgl. die nebenstehende Abbildung).

STAL	A	B	C
1	HASEN	HENNEN	FUESS
2	1	8	20
3	2	7	22
4	3	6	24
5	4	5	26
6	5	4	28

A4:24

Nun gilt es, die Ergebnisse zu interpretieren und die Lösung zu finden (vgl. die markierte Zeile in der nebenstehenden Abbildung). Eine Rückkopplung zum Aufgabentext ist für die Lösungsfindung notwendig, rein formale Arbeitstechniken allein sind dafür nicht ausreichend.

Als abschließendes Beispiel soll eine Aufgabensequenz vorgestellt werden, die eingesetzt werden kann, um die trigonometrischen Funktionen zu motivieren und einzuführen, aber auch, um bereits erworbenes Wissen zu üben und zu festigen, oder zur Wiederholung, etwa zu Beginn der Sekundarstufe II. Grundlage sind hier Zeiten zum Aufgang und Untergang des Mondes.



Greenwich-Observatory. 300 Years of astronomy, ed. C. Roman, Times Newspapers 1975, S. 14 / Geschichte der Naturwissenschaften Leipzig 1987, S. 249.

Observatorium in Greenwich: Der achteckige Raum ist mit besonders hohen Fenstern ausgestattet, um astronomische Beobachtungen mit Spezialgeräten zu ermöglichen. Stich von Francis Place, ca. 1700.

Der Mond ist aufgegangen ... **Arbeitsblatt 11**

Aus der Tageszeitung kann man die Daten für den Mondaufgang (MA) und den Monduntergang (MU) entnehmen.
Ein Schüler sammelte diese Daten vom 1. Juli bis zum 28. August und legte die folgende Tabelle vor. Sonntags erscheint die Zeitung nicht, und manchmal vergaß der Schüler auch, sich die Zeiten zu notieren. So kam es zu Lücken in der Tabelle.

Nr.	Datum	MA	MU
1	01.07.	13:02	00:52
2	02.07.	14:06	01:14
3	03.07.	15:09	01:35
4	04.07.	16:13	01:59
5	05.07.		
6	06.07.	17:45	02:24
7	07.07.	19:19	03:29
8	08.07.	20:16	04:12
9	09.07.	21:07	05:03
10	10.07.	21:52	06:02
11	11.07.	22:30	07:09
12	12.07.		
13	13.07.	23:32	09:38
14	14.07.	23:59	10:52
15	15.07.		12:10
16	16.07.	00:25	13:27
17	17.07.	00:52	14:44
18	18.07.	01:22	16:00
19	19.07.		
20	20.07.	02:35	18:23

Nr.	Datum	MA	MU
21	21.07.	03:22	19:24
22	22.07.	04:16	20:17
23	23.07.	05:17	21:00
24	24.07.	06:22	21:37
25	25.07.	07:29	22:07
26	26.07.		
27	27.07.	09:42	22:56
28	28.07.	10:48	23:18
29	29.07.	11:52	23:40
30	30.07.	12:56	
31	31.07.		
32	01.08.		
33	02.08.		
34	03.08.	17:05	01:26
35	04.08.	18:03	02:05
36	05.08.	18:57	02:52
37	06.08.	19:45	03:47
38	07.08.	20:26	04:51
39	08.08.	21:02	06:02
40	09.08.		

Nr.	Datum	MA	MU
41	10.08.	22:02	08:36
42	11.08.	22:30	09:56
43	12.08.	22:57	11:15
44	13.08.	23:26	12:33
45	14.08.	23:58	13:50
46	15.08.		15:04
47	16.08.		
48	17.08.	01:19	17:17
49	18.08.	02:09	18:11
50	19.08.	03:07	18:57
51	20.08.	04:09	19:36
52	21.08.	05:15	20:08
53	22.08.	06:22	20:35
54	23.08.		
55	24.08.	07:38	21:08
56	25.08.	08:34	21:22
57	26.08.	09:38	21:44
58	27.08.	10:42	22:08
59	28.08.	11:45	22:29
60	29.08.		

- **Kann man aus diesen Daten etwas Interessantes ablesen? Versuchen wir es!**

Aus W. Herget, E. Malitte, K. Richter: Der Mond ist aufgegangen ... In: W. Herget, E. Lehmann (Hrsg.): Exponential- und Winkelfunktionen. Neue Materialien für den Mathematikunterricht mit dem TI-83 / -89 / -92 in der Sekundarstufe I. Hannover: Schroedel Verlag, 2002, S. 43.

Wie verändert sich die Mondscheindauer im Laufe der Zeit ?

Arbeitsblatt 2

Gesucht ist eine Darstellung der Mondscheindauer im Koordinatensystem in Abhängigkeit von der Tagesnummer.
Dazu wäre es günstig, die Mondscheindauer in Dezimalschreibweise zu erhalten.

1. Wie lässt sich die Mondscheindauer in Dezimalschreibweise aus den Daten berechnen?

a) Übertrage die Daten in ein Tabellenblatt von *CellSheet* in folgender Weise:

Spalte A	Tagesnummer
Spalte B	MA-Stunde
Spalte C	MA-Minute
Spalte D	MU-Stunde
Spalte E	MU-Minute

b) Ermittle in Spalte F die Differenz zwischen MU und MA – und zwar in Dezimalschreibweise!

Formel für die Differenz zwischen MU und MA, in Dezimalschreibweise:	= ....

Achtung: Es kommen zwei verschiedene Fälle in den erfassten Datensätzen vor:
Zwischen MA und MU kann ein Tageswechsel liegen oder auch nicht. Das muss in der gesuchten endgültigen Formel noch berücksichtigt werden. Formuliere die Formel für die Mondscheindauer in der Spalte G.

Formel für die Mondscheindauer, in Dezimalschreibweise:	= ....

2. Veranschauliche den Zusammenhang zwischen Tagesnummer (Spalte A) und zugehöriger Mondscheindauer (Spalte G) grafisch.

3. Wie könnte man die in der Ausgangstabelle fehlenden Daten für die Mondscheindauer sinnvoll ergänzen?

4. Welche Mondscheindauer kann man für den 30. September vorhersagen?

Aus W. Herget, E. Malitte, K. Richter: Der Mond ist aufgegangen ... In: W. Herget, E. Lehmann (Hrsg.): Exponential- und Winkelfunktionen. Neue Materialien für den Mathematikunterricht mit dem TI-83 / -89 / -92 in der Sekundarstufe I. Hannover: Schroedel Verlag, 2002, S. 44..

Auswertung der Arbeitsblätter 1 und 2 mit dem Voyage 200

Die vorgegebenen Messwerte werden in ein Tabellenblatt eingetragen. Unvollständig vorliegende Datensätze werden sinnvollerweise gelöscht oder gar nicht erst eingetragen.Das Ausfüllen der Spalten F und G mit den Formeln liefert schließlich für alle vollständig vorliegenden Datensätze die Mondscheindauer.

Mit Hilfe der grafischen Darstellung – die dann überdacht und diskutiert werden sollte – lassen sich Vermutungen über den funktionalen Zusammenhang zwischen Tagesnummer und Mondscheindauer ableiten.

Die Auseinandersetzung mit dem *diskreten Definitionsbereich* „Tagesnummern“ und der *kontinuierlichen Betrachtungsweise der Funktion* „Mondscheindauer“ sowie die sich anschließende hinterfragende Interpretation der Resultate sollten bewusst geführt werden.

Der Vorschlag des Funktionstyps „Sinus“ bildet schließlich den Ausgangspunkt für die weiter unten beschriebene Anpassung der Parameter an die gegebenen Daten. Statt des Sinus könnte natürlich ebenso der Cosinus als Ausgangsvorschlag für den Funktionstyp verwendet werden, die Vorgehensweise wäre ganz entsprechend.

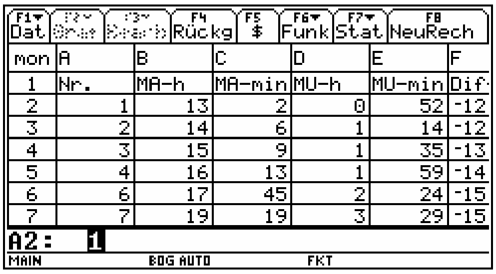
Wesentlich für das *aktive* Verständnis des ermittelten Zusammenhangs „Tagesnummer – Mondscheindauer“ ist es, die an die Messwerte angepasste Funktion für die Schätzung weiterer – d. h. mit ihrer Hilfe interpolierter und extrapolierter – Messwerte zu nutzen.

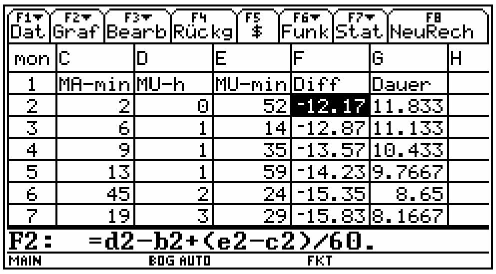
Daten- und Formeleingabe in *CellSheet*

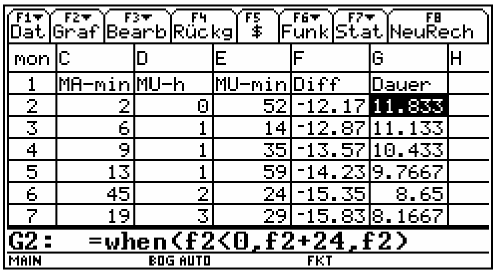
Bei der Dateneingabe in *CellSheet* können alle Lücken der Ausgangstabelle in gleicher Weise übernommen werden. Da wir eine grafische Veranschaulichung anstreben, verzichten wir aber auf die Eingabe unvollständig vorliegender Datensätze.

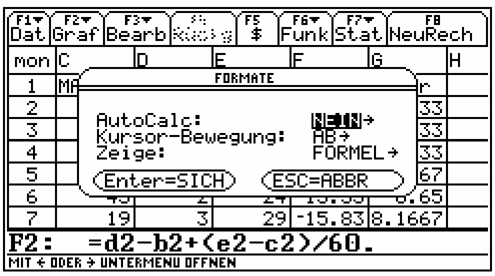
Die Eingabe einer Uhrzeit im üblichen Format führt zu einer Fehlermeldung: Als numerische Werte sind nur ganze Zahlen und Zahlen mit Dezimalpunkt zulässig. Deswegen wird hier die Eingabe von Stunden und Minuten in zwei getrennten Spalten vorgenommen.

Die nebenstehenden Abbildungen zeigen die Eingabe der ersten Daten und Formeln sowie die damit berechneten Werte. Die üblichen Arbeitstechniken Markieren, Kopieren und Einfügen führen zur effizienten Eingabe der Formeln im gesamten Bereich. Dabei werden auch die relativen Zellbezüge übertragen. Die Formelberechnung in der Spalte F liefert eine Zahl mit Dezimalpunkt – keinen Bruch, auch bei exakter Berechnung (eingestellt in MODE) – da als Quotient die Dezimalzahl 60. (mit Punkt!) verwendet wurde.







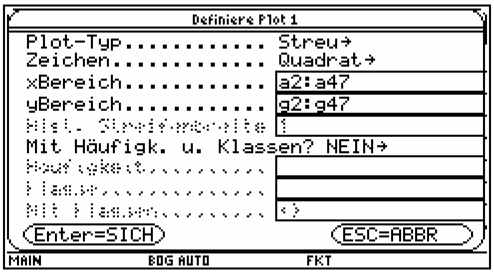


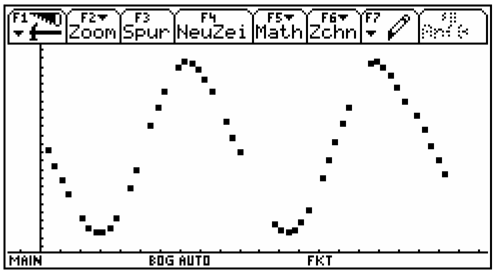
Damit die Eingabe aller Daten nicht unnötig viel Zeit in Anspruch nimmt, ist darauf zu achten, dass das ständige automatische Neuberechnen innerhalb dieses Programmes ausgeschaltet ist. Diese Einstellung kann im F1-Menü unter Format vorgenommen werden, siehe die nebenstehende Abbildung.

Grafische Darstellung der Daten

Für die grafische Darstellung können beliebige Bereiche der eingegebenen Daten für den *x*- bzw. *y*-Bereich ausgewählt werden. Hier wurden zunächst alle vorhandenen Datensätze verwendet und ein entsprechender Plot definiert (Abbildung links). Damit ergibt sich schließlich die folgende Abbildung rechts (unter Umständen erst, wenn im Menü F2 Zoom die Auswahl ZoomDatvorgenommen wurde).

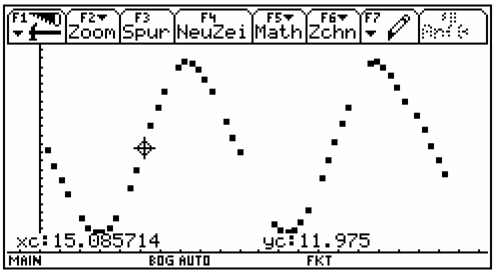
Wie könnte man die in der Tabelle fehlenden Mondscheindauer-Daten sinnvoll ergänzen?





Wir betrachten z. B. den 15. Tag.

Weg 1:

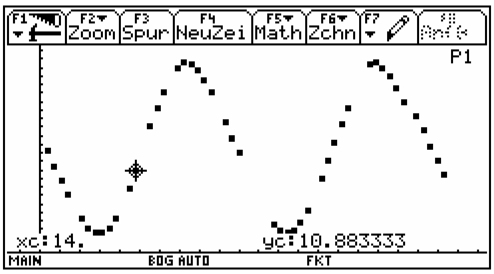


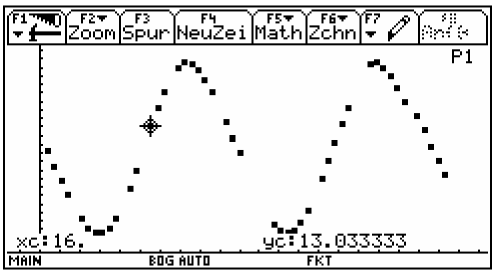
Eine Kursorbewegung im Grafikfenster durch die Pfeiltasten in etwa am Graphen entlang ermöglicht eine grobe Abschätzung von Zwischenwerten (Anzeige am unteren Rand). Ganzzahlige Argumente können mit dem Kursor allerdings meist nicht erreicht werden (vgl. die nebenstehenden Abbildung). Für die fehlenden Daten des 15. Tages kann so eine Mondscheindauer von ca. 12 h geschätzt werden.

Weg 2:

Mittels TRACE kann mit den Pfeiltasten direkt auf dem Graphen entlang gewandert werden. Allerdings können hier ***keine*** Zwischenwerte erreicht werden: Es stehen als *x*-Werte nur die Werte der Spalte A zur Verfügung. Das ändert sich auch nicht, wenn die Punkte bei der grafischen Darstellung verbunden würden (Plot Type ... xyLinie).

Ist es sinnvoll, die Daten-Punkte zu einer Kurve zu verbinden?





Dazu gibt es zwei Sichtweisen – beide gilt es, deutlich zu machen:

- *Im realen Kontext* handelt es sich um Messwerte, die bezüglich des betrachteten funktionalen Zusammenhangs an diskrete natürliche Zahlen (nämlich die Tagesnummern) für den Definitionsbereich geknüpft sind. Der Definitionsbereich ist demgemäß *diskret*.
- Liegt dagegen das *Hauptaugenmerk auf der mathematischen Beschaffenheit* des funktionalen Zusammenhangs, so macht es sehr wohl Sinn, die für *kontinuierlichen* Definitionsbereich erklärte Sinusfunktion zu untersuchen. Bei der interpretierenden, abschließenden Begutachtung der an die Messwerte angepassten Sinuskurve ist dann wieder der Schritt zur Diskretisierung, d. h. zur ausschließlichen Betrachtung ganzzahliger Werte des Definitionsbereichs, zu vollziehen.

Welcher Sinus passt am besten ?

Arbeitsblatt 3

1. Probiere zunächst Funktionen mit

$$y(x) = a \cdot \sin(x) + d \ .$$

Welche Bedeutung hat dabei a ? Welche Bedeutung hat d ?

Wie groß ist das Maximum der Mondscheindauer, wie groß ist das Minimum? Welche Bedeutung hat das für den Wert von a ? Welche Bedeutung hat es für d ?

2. Probiere jetzt Funktionen mit

$$y(x) = a \cdot \sin(b \cdot x) + d \ .$$

Welche Bedeutung hat dabei b ?

3. Bist du mit der Anpassung zufrieden? Ändere ggf. die Funktion weiter ab.

4. Wie könnte man die in der Ausgangstabelle fehlenden Daten für die Mondscheindauer sinnvoll ergänzen? Es fehlen u. a. die Mondscheindauern für den 05.07. und für die Tage 30.07. – 02.08.

Welche Mondscheindauer kann man für den 30.09. vorhersagen?

Datum	Nummer des Tages	Mondscheindauer
05.07.	5	
30.07.	30	
31.07.	31	
01.08.	32	
02.08.	33	
30.09.		

Aus W. Herget, E. Malitte, K. Richter: Der Mond ist aufgegangen ... In: W. Herget, E. Lehmann (Hrsg.): Exponential- und Winkelfunktionen. Neue Materialien für den Mathematikunterricht mit dem TI-83 / -89 / -92 in der Sekundarstufe I. Hannover: Schroedel Verlag, 2002, S. 49.

Auswertung des Arbeitsblattes 3 mit dem Voyage 200

Wir beginnen mit dem Ansatz

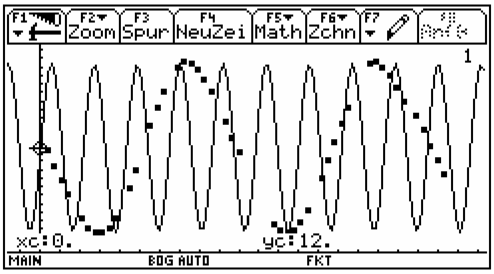
$$y(x) = a \sin(x) + d$$

<u>Überlegung zu *a*:</u>
Die ***Amplitude*** lässt sich recht einfach aus der Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten *y*-Wert (siehe Liste D) schätzen:

$$a \circ (y_{\max} - y_{\min})/2 \circ (16 - 8)/2 = 4.$$

<u>Überlegung zu *d*:</u>
Passendes ***Verschieben*** entlang der *y*-Achse:

$$d \circ y_{\min} + a \circ 8 + 4 = 12.$$



Damit ergibt sich der erste Versuch für eine möglichst passende Sinusfunktion:

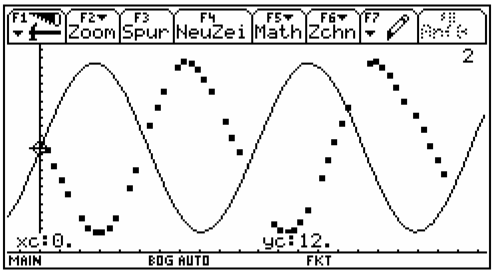
Unser erster Sinus-Vorschlag $Y_1 = 4 \sin(x) + 12$ schwingt „zu schnell“. Er „schafft“ im dargestellten Bereich 10 Schwünge, die Datenkreuze schaffen dagegen nur zwei.

Abhilfe: Wir erweitern den bisherigen Ansatz

$$y(x) = a \sin(x) + d$$

auf den allgemeineren Ansatz

$$y(x) = a \sin(b\, x) + d.$$

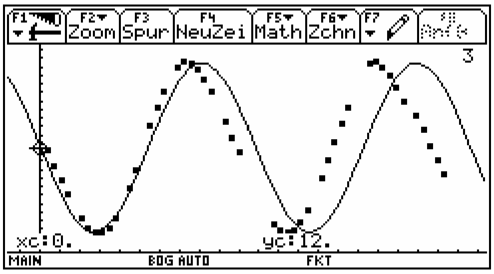


<u>Überlegung zu *b*:</u> Anpassen der ***Periodenlänge***,
Vorschlag $b \circ 1/5$:

$Y_2 = 4 \sin(x/5) + 12$

Hinsichtlich der Frequenz ist eine deutlich bessere Annäherung der Sinuskurve an die Datenkreuze erzielt.

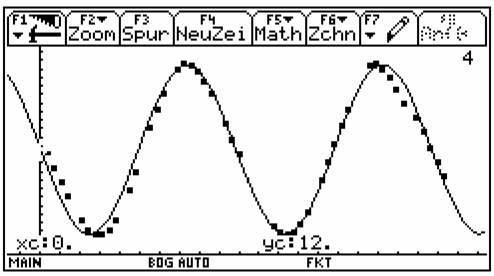
Nur: Die Schwingung der Datenpunkte geht zuerst nach unten, dann nach oben. Bei dieser Sinusfunktion ist es dagegen umgekehrt. – Was tun?



Eine mögliche Lösungsidee dazu ist ***Spiegeln*** – das erreicht man durch Vorzeichenänderung von *a* im Funktionsterm:

$Y_3 = -4 \sin(x/5) + 12$

Es bleibt noch ein wenig ***Feinanpassung*** beim Wert von *b*, um die Periodenlänge genauer einzustellen:



Der Funktionsvorschlag

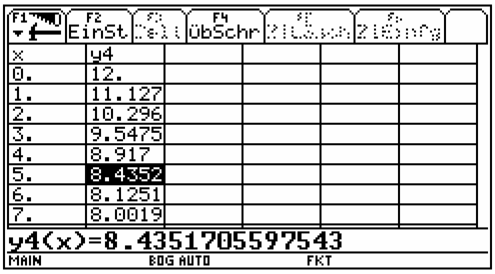
$Y_4 = -4 \sin(0.22\, x) + 12$

liefert augenscheinlich eine recht gute Annäherung an die Datenpunkte. Wir werden ihn im Weiteren verwenden.

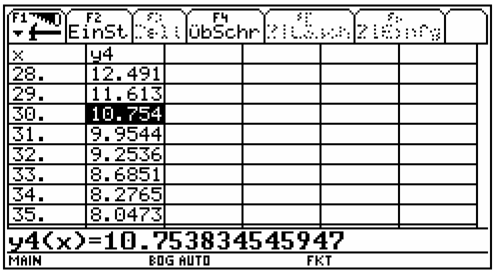
Wie könnte man nun die in der Tabelle fehlenden Mondscheindauer-Daten sinnvoll ergänzen?

Dazu kann die Wertetabelle für Y_4 verwendet werden.

Die erste Lücke in unserer Datenliste ist am 5. Tag. Weiterhin fehlen z. B. die Mondscheindauern für die Tage 30.07. – 02.08., also für die Tage mit den Nummern 30 bis 33.



x	y4
0.	12.
1.	11.127
2.	10.296
3.	9.5475
4.	8.917
5.	8.4352
6.	8.1251
7.	8.0019



x	y4
28.	12.491
29.	11.613
30.	10.754
31.	9.9544
32.	9.2536
33.	8.6851
34.	8.2765
35.	8.0473

Aus der Wertetabelle schlussfolgern wir für die Mondscheindauer am 05.07. ungefähr 8 Std. und 25 min., am 30.07. etwa 10 Std. und 45 min., am 31.07. knapp 10 Std. (etwa 3 Minuten weniger) usw.

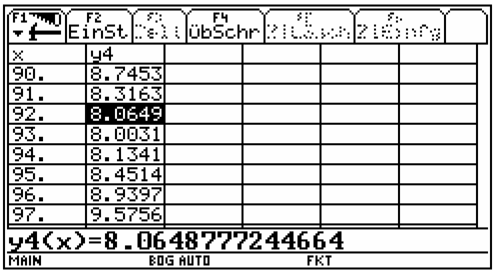
Welche Mondscheindauer kann man für den 30.09. vorhersagen?

Hier kann wieder das Auswerten der Wertetabelle oder des Graphen helfen, aber auch der direkte Funktionsaufruf an einer speziellen Stelle ist möglich.

Durch unsere Festlegungen hat der 30. September die Nummer 92.

Weg 1:

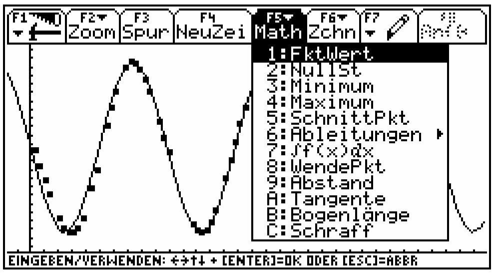
Wir können an die entsprechende Stelle der Wertetabelle schauen oder ...

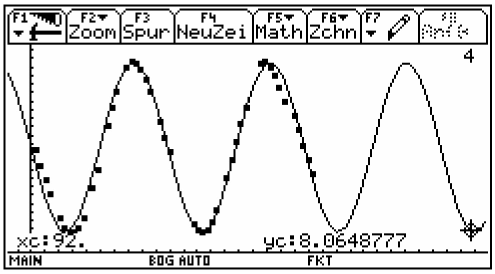


x	y4
90.	8.7453
91.	8.3163
92.	8.0649
93.	8.0031
94.	8.1341
95.	8.4514
96.	8.9397
97.	9.5756

Weg 2:

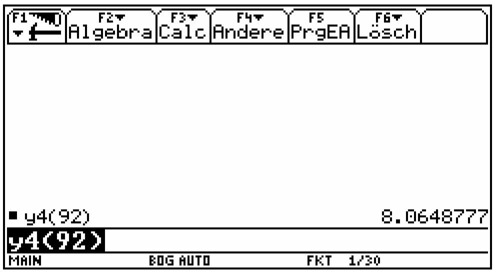
im Grafikfenster das F5 Menü: FktWert mit einem (über WINDOW) erweiterten *x*-Bereich nutzen oder ...





Weg 3:

direkt im Hauptbildschirm den interessierenden Funktionswert abfragen.



Ergebnis: Wir erwarten also am 30. September eine Mondscheindauer von etwas mehr als 8 Stunden.

Angebote des Voyage 200 zur Kurvenanpassung

Man könnte zur Lösung auch die Möglichkeiten des Gerätes zur direkten Kurvenanpassung (Regressionsanalyse) nutzen. Im Menü Stat gibt es u. a. die Möglichkeit**,** mit SinRegr eine Sinus-

Regression ermitteln zu lassen. Dazu sind die Bereiche für die *x*-Werte und die *y*-Werte einzugeben sowie die Y-Variable festzulegen, in der das Ergebnis der Regression gespeichert werden soll.

Es müssen dabei nicht unbedingt alle Daten der entsprechenden Spalten verwendet werden, auf Wunsch können auch Teilbereiche ausgewählt werden. Es kann sehr interessant sein, verschiedene Datenbereiche für eine Regressionsanalyse zu verwenden und dabei folgende Fragen zu untersuchen:

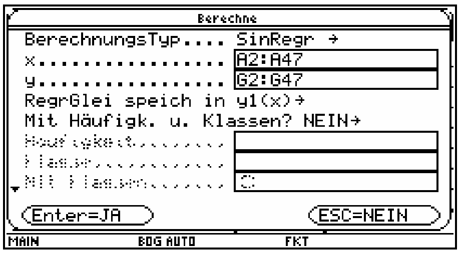
- Hat der Umfang der verwendeten Daten Einfluss auf das Ergebnis der Sinusregression?
- Wir wählen verschiedene Bereiche für die *x*-Werte, aber jeweils gleich viele Wertepaare. Liefert die Sinusregression unterschiedliche Ergebnisse?
- Wir wählen verschiedene Bereiche für die *x*-Werte mit jeweils gleicher Intervalllänge, die sich aus der Differenz des größten und des kleinsten *x*-Wertes ergibt. Welche Ergebnisse werden deutlich?
- Wie lassen sich die Ergebnisse interpretieren?

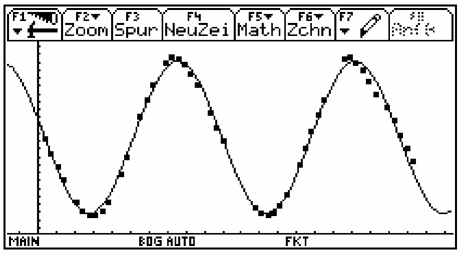
Dann erhält man die vom Rechner vorgeschlagenen Parameter-Werte angezeigt und kann den Graph der ermittelten Regressionsfunktion zeichnen lassen.

Verschiedene Regressionen

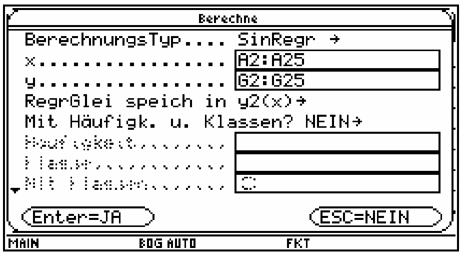
Hier eine Auswahl verschiedener Untersuchungen:

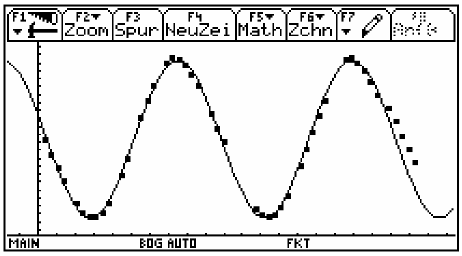
Zunächst werden sämtliche Daten verwendet und das Ergebnis der Regression in y1(x) gespeichert. Die grafische Veranschaulichung zeigt eine gute Kurvenanpassung.



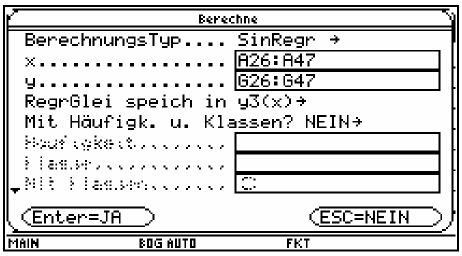


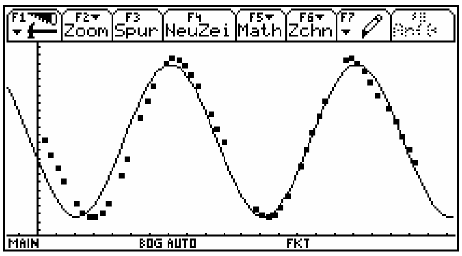
Die Verwendung der ersten Hälfte des entsprechenden *x*-Intervalls liefert auch ein akzeptables Ergebnis. Die Kurvenanpassung im verwendeten Intervall ist besser als im benachbarten Bereich.



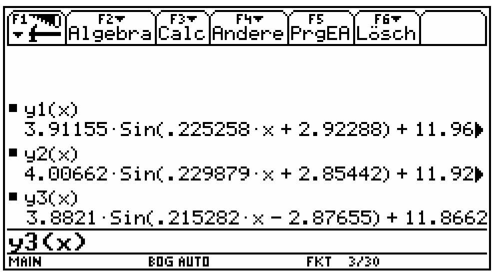


Wenn allein die restlichen Wertepaare ausgewertet werden, gelingt in diesem Bereich eine besonders gute Kurvenanpassung.





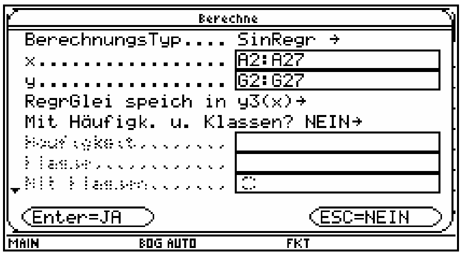
Die obigen Regressionsgleichungen wurden in den Variablen y1(x), y2(x) bzw. y3(x) gespeichert. In der nebenstehenden Abbildung erhalten wir zusammenfassend einen Überblick über diese Funktionsterme im Hauptbildschirm des Rechners.

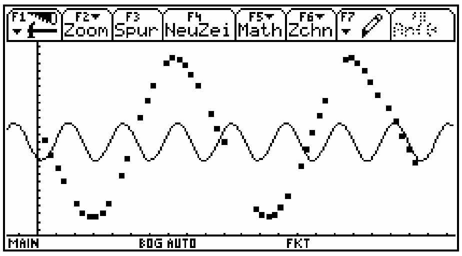


Kleine Änderung – große Wirkung

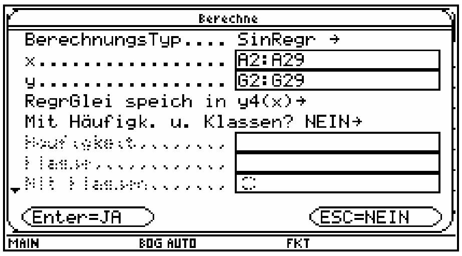
Kleine Änderungen im verwendeten Bereich können jedoch zu überraschenden Ergebnissen führen. Die nachfolgenden Abbildungen zeigen jeweils den ausgewählten Bereich. Daneben sind Ergebnisse von SinRegr zu sehen.

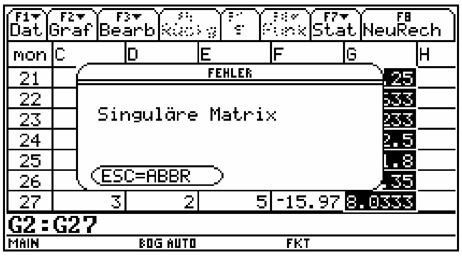
Im ersten Beispiel ist die errechnete Funktion gemeinsam mit den Datenpunkten grafisch veranschaulicht: Eine Kurvenanpassung gelingt offensichtlich nicht.



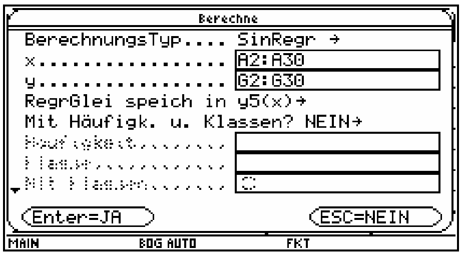


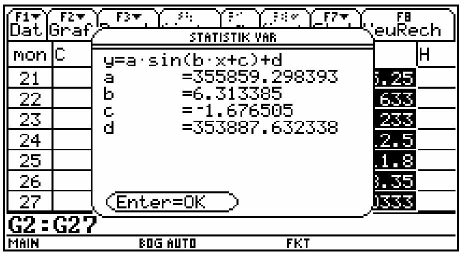
Im zweiten Beispiel wird die Berechnung mit dem Hinweis „Singuläre Matrix“ abgebrochen. Das weist auf die komplexen numerischen Probleme hin, die hier zu bewältigen sind.



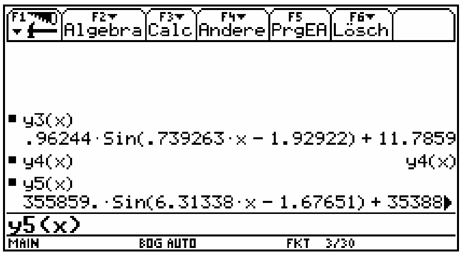


Auf die grafische Veranschaulichung der ermittelten Funktion für das dritte Beispiel wurde verzichtet: Es genügt, die Parameter *a* und *d* zu betrachten.





Hier schließlich zur Information die zu diesen drei Beispielen gehörenden Funktionsterme als Ergebnis von SinRegr:



Sicherlich ist es wünschenswert, stets korrekte Ergebnisse von einem Rechner zu erhalten. Allerdings können diese Beispiele gerade den kritischen Umgang mit Computerprogrammen unterstützen. Hier ist die Fehlerhaftigkeit der Rechnerergebnisse augenscheinlich – zum Glück.

Die Lösung umfangreicher Gleichungssysteme – die Aufgabenstellung also, die sich hinter der Regressionsanalyse verbirgt – stellt nicht nur für Kleinrechner, sondern auch für wesentlich leistungsfähigere Computeralgebrasysteme mitunter ein sehr schwieriges Problem dar, das auch dort zu Fehlern führen kann.

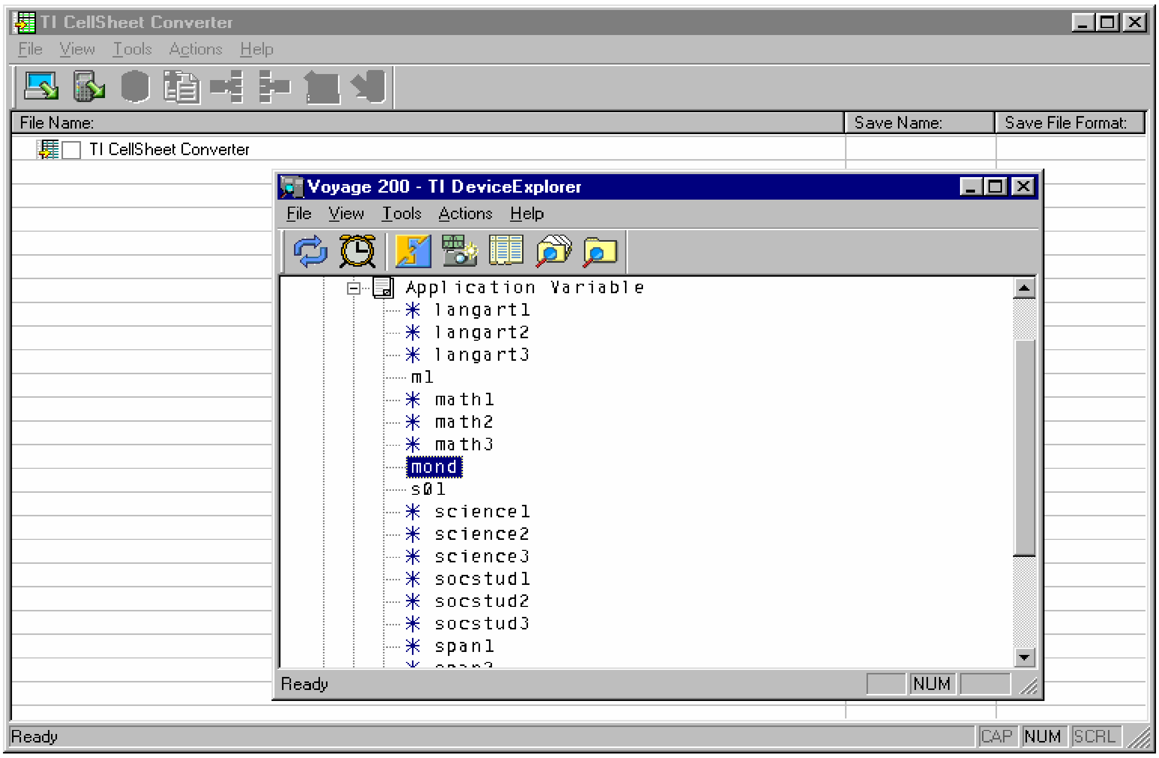
Datenaustausch zwischen *CellSheet* und Excel

Die „Mini“-Tabellenkalkulation *CellSheet* kann einige Erwartungen an eine Tabellenkalkulation erfüllen, andere Wünsche bleiben offen. Durch einen Datenaustausch mit entsprechender PC-Software können Ergänzungen auf verschiedenen Gebieten angestrebt werden, z. B.:

- beim Leistungsumfang,
- bei der grafischen Veranschaulichung,

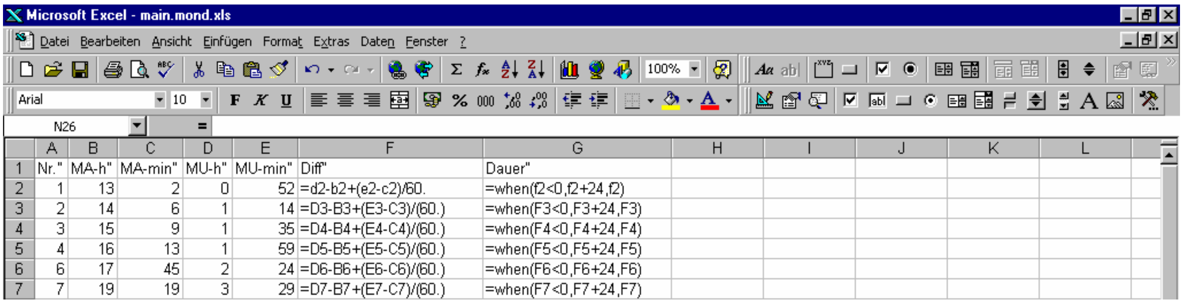
- bei der Interaktion.

Unter Verwendung der Software *TI CellSheet Converter* ist ein einfacher Austausch von Arbeitsblättern zwischen *CellSheet*, Excel und anderen Tabellenkalkulationen über den PC und den Macintosh möglich. In der nachfolgenden Abbildung wurde als Datenquelle im *TI CellSheet Converter* der Voyage 200 gewählt, bei korrekter Kabelverbindung zwischen PC und Symbolrechner stehen dann alle interessierenden Dateien zum Transfer auf den PC zur Verfügung.



Wir wählen die auf dem Voyage 200 vorliegende Datei *mond* aus und kopieren diese auf den PC.

Nach Konvertieren in das Excel-Format und Abspeichern kann schließlich in Excel die zugehörige



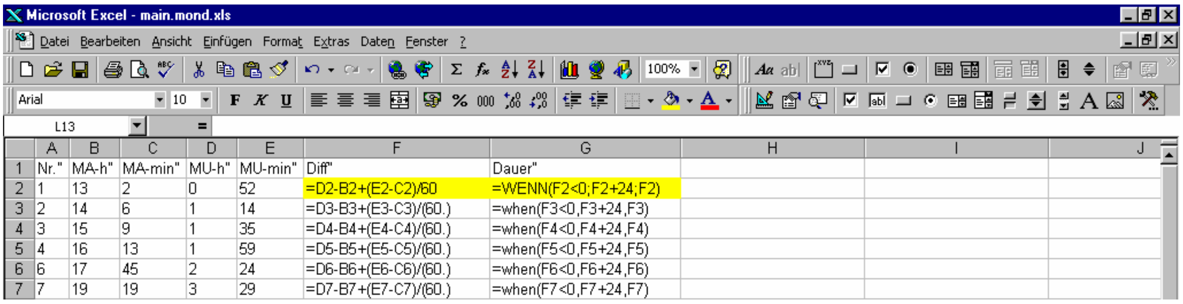
	A	B	C	D	E	F	G
1	Nr."	MA-h"	MA-min"	MU-h"	MU-min"	Diff"	Dauer"
2	1	13	2	0	52	=d2-b2+(e2-c2)/60.	=when(f2<0,f2+24,f2)
3	2	14	6	1	14	=D3-B3+(E3-C3)/(60.)	=when(F3<0,F3+24,F3)
4	3	15	9	1	35	=D4-B4+(E4-C4)/(60.)	=when(F4<0,F4+24,F4)
5	4	16	13	1	59	=D5-B5+(E5-C5)/(60.)	=when(F5<0,F5+24,F5)
6	6	17	45	2	24	=D6-B6+(E6-C6)/(60.)	=when(F6<0,F6+24,F6)
7	7	19	19	3	29	=D7-B7+(E7-C7)/(60.)	=when(F7<0,F7+24,F7)

Datei geöffnet werden. Hier ein Ausschnitt aus der entsprechenden Datei:

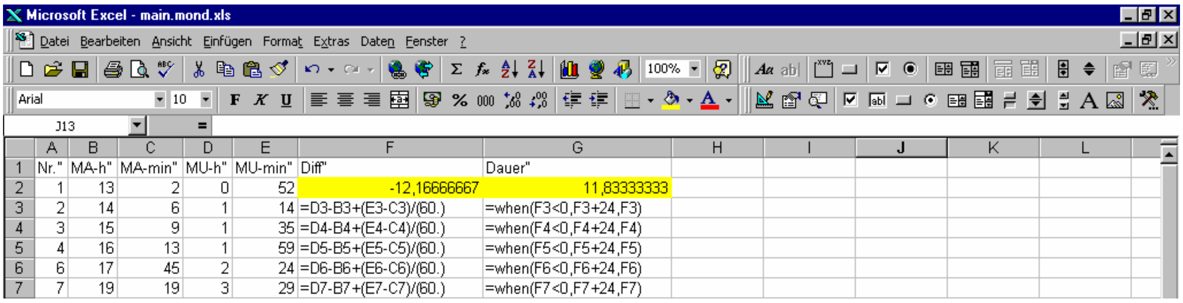
Die Formeln in den Spalten F und G werden nicht berechnet, sondern wie Text behandelt. Es müssen also noch einige *Anpassungen per Hand* vorgenommen werden.

In der Spalte F ist noch der Dezimalpunkt bei 60. vorhanden. Das Löschen des Dezimalpunktes ist hier leicht möglich und führt zu einer korrekten Berechnung der Formel in Excel. Dieses Beispiel zeigt jedoch, dass alle Zellen, die in *CellSheet* Zahlen mit Dezimalpunkt enthalten, beim Konvertieren in Excel zu Problemen führen: Der Dezimalpunkt in der Zahlendarstellung von *CellSheet* wird bedauerlicherweise nicht in das Komma der Zahlendarstellung von Excel konvertiert.

Auch die Bezeichnungen der vordefinierten Funktionen und die zugehörigen Trennzeichen werden beim Konvertieren „noch“ nicht angepasst. Es ist notwendig, die Bedingung „when“ (*CellSheet*) durch „WENN“ (Excel) zu ersetzen, außerdem die beiden Kommas durch Semikolons.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Nr."	MA-h"	MA-min"	MU-h"	MU-min"	Diff"	Dauer"
2	1	13	2	0	52	=D2-B2+(E2-C2)/60	=WENN(F2<0;F2+24;F2)
3	2	14	6	1	14	=D3-B3+(E3-C3)/(60.)	=when(F3<0,F3+24,F3)
4	3	15	9	1	35	=D4-B4+(E4-C4)/(60.)	=when(F4<0,F4+24,F4)
5	4	16	13	1	59	=D5-B5+(E5-C5)/(60.)	=when(F5<0,F5+24,F5)
6	6	17	45	2	24	=D6-B6+(E6-C6)/(60.)	=when(F6<0,F6+24,F6)
7	7	19	19	3	29	=D7-B7+(E7-C7)/(60.)	=when(F7<0,F7+24,F7)

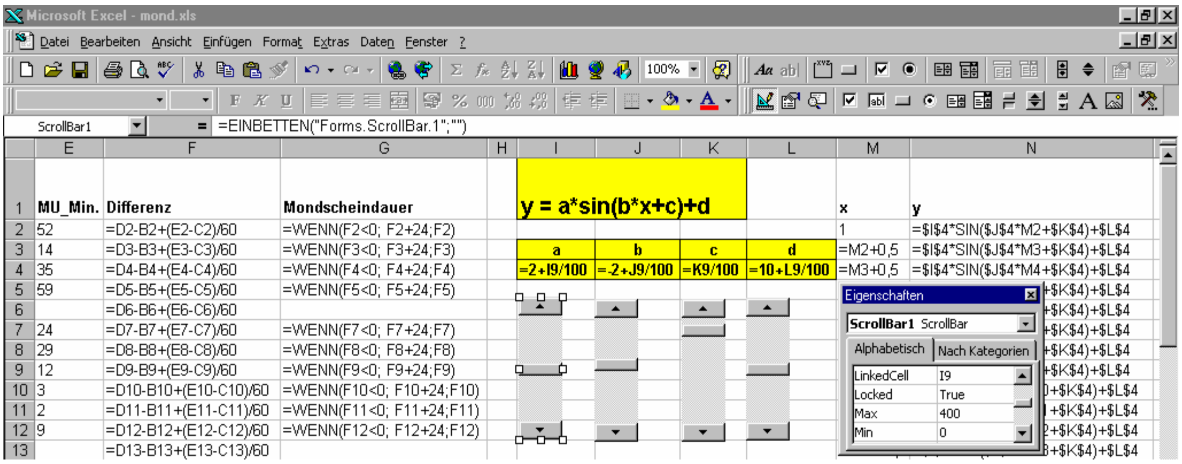


	A	B	C	D	E	F	G
1	Nr."	MA-h"	MA-min"	MU-h"	MU-min"	Diff"	Dauer"
2	1	13	2	0	52	-12,16666667	11,83333333
3	2	14	6	1	14	=D3-B3+(E3-C3)/(60.)	=when(F3<0,F3+24,F3)
4	3	15	9	1	35	=D4-B4+(E4-C4)/(60.)	=when(F4<0,F4+24,F4)
5	4	16	13	1	59	=D5-B5+(E5-C5)/(60.)	=when(F5<0,F5+24,F5)
6	6	17	45	2	24	=D6-B6+(E6-C6)/(60.)	=when(F6<0,F6+24,F6)
7	7	19	19	3	29	=D7-B7+(E7-C7)/(60.)	=when(F7<0,F7+24,F7)

Damit sind die hier entstandenen Probleme gelöst. Durch die üblichen Arbeitstechniken Kopieren, Markieren und Ausfüllen gelingt die Anpassung in allen Zellen recht schnell. Der zeitaufwändige Arbeitsabschnitt bei einer Tabellenkalkulation – die Dateneingabe – konnte jedenfalls ohne „Nachbesserung“ auf dem PC genutzt werden.

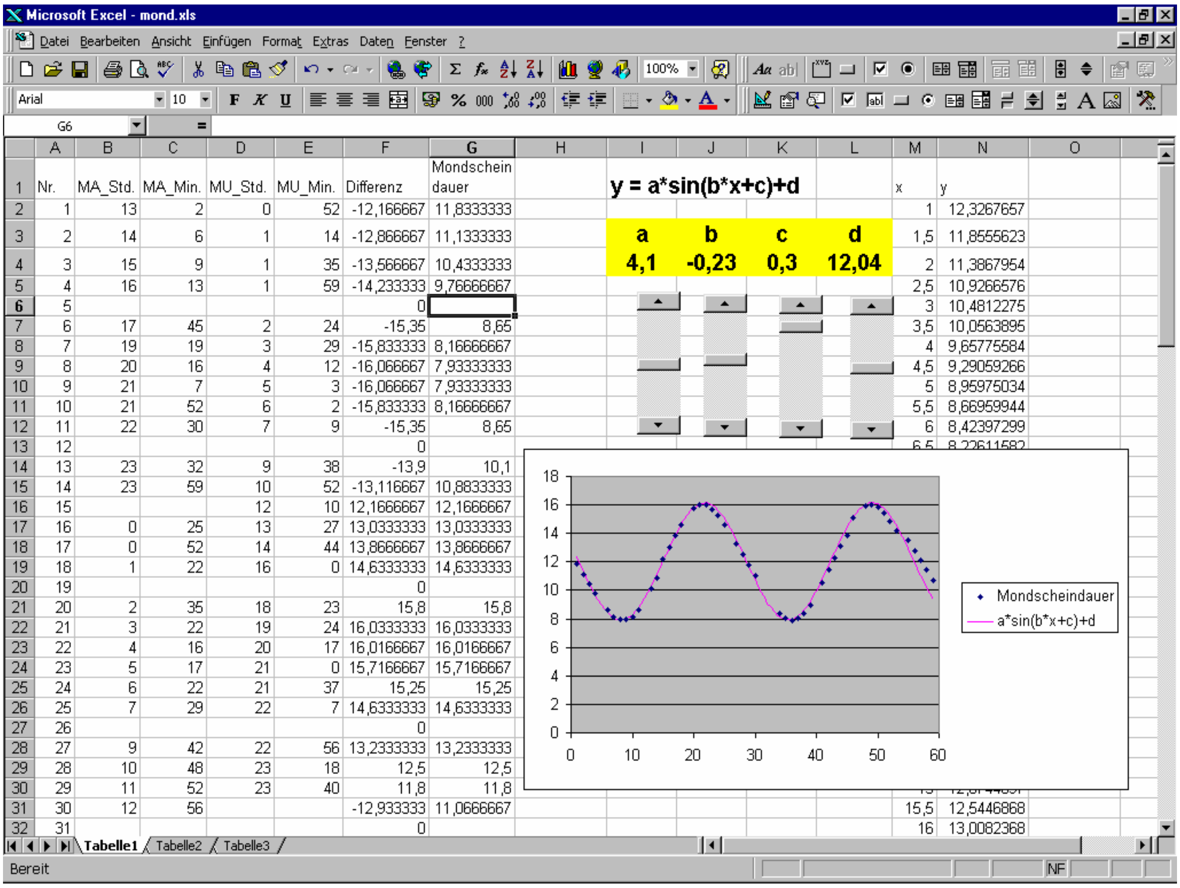
Steuerelemente zur dynamischen Kurvenanpassung in Excel

In Excel stehen nun weitere Möglichkeiten zur Visualisierung einer schrittweisen Kurvenanpassung zur Verfügung. Mit Hilfe der Steuerelemente-Toolbox können Schieberegler zur Variation der Parameter definiert werden. Die nachfolgende Abbildung zeigt, wie für den Parameter *a* ein „scrollen“ über 401 Werte (vgl. die Eigenschaften der ScrollBar – Max 400, Min 0) im Intervall [2;6] (vgl. die Formel in der Zelle I4 mit dem Bezug auf I9 – „LinkedCell“ der ScrollBar) realisiert wurde. Analoges gilt für die Parametervariation von *b*, *c* und *d* (vgl. die Formeln in J4, K4 und L4).



	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	MU_Min.	Differenz	Mondscheindauer		y = a*sin(b*x+c)+d				x	y
2	52	=D2-B2+(E2-C2)/60	=WENN(F2<0; F2+24;F2)						1	=$I$4*SIN($J$4*M2+$K$4)+$L$4
3	14	=D3-B3+(E3-C3)/60	=WENN(F3<0; F3+24;F3)		a	b	c	d	=M2+0,5	=$I$4*SIN($J$4*M3+$K$4)+$L$4
4	35	=D4-B4+(E4-C4)/60	=WENN(F4<0; F4+24;F4)		=2+I9/100	=-2+J9/100	=K9/100	=10+L9/100	=M3+0,5	=$I$4*SIN($J$4*M4+$K$4)+$L$4
5	59	=D5-B5+(E5-C5)/60	=WENN(F5<0; F5+24;F5)							+$K$4)+$L$4
6		=D6-B6+(E6-C6)/60								+$K$4)+$L$4
7	24	=D7-B7+(E7-C7)/60	=WENN(F7<0; F7+24;F7)							+$K$4)+$L$4
8	29	=D8-B8+(E8-C8)/60	=WENN(F8<0; F8+24;F8)							+$K$4)+$L$4
9	12	=D9-B9+(E9-C9)/60	=WENN(F9<0; F9+24;F9)							+$K$4)+$L$4
10	3	=D10-B10+(E10-C10)/60	=WENN(F10<0; F10+24;F10)							)+$K$4)+$L$4
11	2	=D11-B11+(E11-C11)/60	=WENN(F11<0; F11+24;F11)							+$K$4)+$L$4
12	9	=D12-B12+(E12-C12)/60	=WENN(F12<0; F12+24;F12)							2+$K$4)+$L$4
13		=D13-B13+(E13-C13)/60								3+$K$4)+$L$4

Die grafische Veranschaulichung im Diagramm und die Wertetabelle in den Spalten N und M spiegeln die sich dynamisch ändernden Einstellungen für die Parameter wider.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Nr.	MA_Std.	MA_Min.	MU_Std.	MU_Min.	Differenz	Mondschein dauer
2	1	13	2	0	52	-12,166667	11,8333333
3	2	14	6	1	14	-12,866667	11,1333333
4	3	15	9	1	35	-13,566667	10,4333333
5	4	16	13	1	59	-14,233333	9,76666667
6	5					0	
7	6	17	45	2	24	-15,35	8,65
8	7	19	19	3	29	-15,833333	8,16666667
9	8	20	16	4	12	-16,066667	7,93333333
10	9	21	7	5	3	-16,066667	7,93333333
11	10	21	52	6	2	-15,833333	8,16666667
12	11	22	30	7	9	-15,35	8,65
13	12					0	
14	13	23	32	9	38	-13,9	10,1
15	14	23	59	10	52	-13,116667	10,8833333
16	15			12	10	12,1666667	12,1666667
17	16	0	25	13	27	13,0333333	13,0333333
18	17	0	52	14	44	13,8666667	13,8666667
19	18	1	22	16	0	14,6333333	14,6333333
20	19					0	
21	20	2	35	18	23	15,8	15,8
22	21	3	22	19	24	16,0333333	16,0333333
23	22	4	16	20	17	16,0166667	16,0166667
24	23	5	17	21	0	15,7166667	15,7166667
25	24	6	22	21	37	15,25	15,25
26	25	7	29	22	7	14,6333333	14,6333333
27	26					0	
28	27	9	42	22	56	13,2333333	13,2333333
29	28	10	48	23	18	12,5	12,5
30	29	11	52	23	40	11,8	11,8
31	30	12	56			-12,933333	11,0666667
32	31					0	

a	b	c	d
4,1	-0,23	0,3	12,04

	M	N
1	x	y
2	1	12,3267657
3	1,5	11,8555623
4	2	11,3867954
5	2,5	10,9266576
6	3	10,4812275
7	3,5	10,0563895
8	4	9,65775584
9	4,5	9,29059266
10	5	8,95975034
11	5,5	8,66959944
12	6	8,42397299
31	15,5	12,5446868
32	16	13,0082368