Pfingsttagung 2002

Workshop 208

Prof. Dr. Ludwig Paditz

Enttarnung des „gezinkten“ Würfels – Datensimulation / Auswertung / Fehlentscheidungen

erstmalig veröffentlich in:
Bärbel Barzel, Detlef Berntzen, Victor Manuel David Sendas: Neues Lernen. Neue Medien. Viele Projekte im Land. Tagungsdokumentation. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. 21.-24. Mai 2002. Münster 2003 (=ZKL-Texte Nr. 25), ISBN 3-934064-30-2

Prof. Dr. Ludwig Paditz, Dresden

Der "gezinkte" Würfel mit dem TI-92Plus
(Betriebssystem 2.05)

Enttarnung des "gezinkten" Würfels - Datensimulation / Auswertung / Fehlentscheidung
(oder: Warum die Statistik nicht zur absoluten Wahrheit führt, jedoch die Kritikfähigkeit fördert.)

Internet: http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/images/wurf2002.htm

Programmidee:
C.C.Edwards: Does a TI-8x Cast a Fair Die? in: **Eightysomething!**, Vol. 6, No.3, 1997, p. 9-10.

siehe Internet:
http://www.comcal.net/www.ti.com/calc/docs/80xthing.htm (Link zur elektronischen Zeitschrift von TI) und
http://www.comcal.net/www.ti.com/calc/docs/act83stat.htm (Aktivitäten zur Statistik mit dem TI-83)
oder als pdf-file
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/s9780som.pdf oder
http://www.ti.com/calc/pdf/s9780som.pdf (Eightysomething! Vol.9, No. 3, 1997).

Mithilfe des GTR werden ideale und "gezinkte" Würfel simuliert. Die simulierten Daten werden statistisch ausgewertet und dienen als Grundlage zur Überprüfung von statistischen Hypothesen. Schließlich wird über mögliche Fehlentscheidungen diskutiert.

Anhang 1: Programmtexte (ASCII-Code)
Anhang 2: Datentabellen
Anhang 3: Formeln

- **Was den Schüler/Studenten besonders interessiert:**

  Entsteht beim Würfelexperiment (mit einem idealen Würfel) und Auswertung der vermuteten Gleichverteilung im Chi^2-Anpassungstest tatsächlich eine Chi^2-verteilte Testgröße?

  Welche (Prüf-)Verteilung hat die Testgröße, wenn der Würfel in Wirklichkeit "gezinkt" war?

  Wie sind die Wahrscheinlichkeiten für den Fehler 1. und 2. Art zu interpretieren?

Der Workshop erfordert interaktives Arbeiten, d.h. es wird mit einzelnen Teilprogrammen gearbeitet. Damit haben die Schüler oder Studenten den Ablauf einzelner Arbeitsschritte selbst in der Hand und verstehen so die Inhalte der einzelnen Arbeitsschritte besser. Die benötigten Teilprogramme werden am Anfang in einen neu angelegten Ordner (hier: PADITZ) per Link-Kabel überspielt. Später wird die Statistik-Flash-Software **TISTATLE** vorteilhaft ausgenutzt.

Bild A1 zeigt die Teilprogramme im VAR-LINK-Menü, hingegen Bild A2 auf den Zugriff zu den Teilprogrammen über den CATALOG, F4-Taste, einschließlich einer Hilfe-Information über die F1-Taste hinweist:

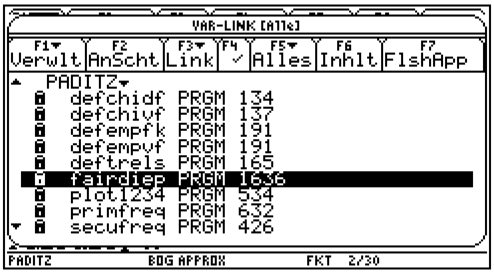

Bild A1

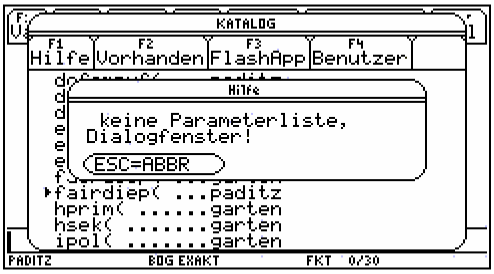

Bild A2

Der Start der Datensimulation erfolgt unter der **deutschen** Bedienoberfläche mit dem Teilprogramm **fairdiep( )** ohne Parametereingabe, denn es wird sofort ein Dialogfenster zur Eingabe der Startwerte geöffnet:

Bild 1

Bild 2

Die Bilder 1 und 2 zeigen die Auswahlmöglichkeiten. Der Neustart der Zufallszahlengenerators erlaubt es, bereits simulierte Daten erneut zu erzeugen, damit z.B. alle Workshopteilnehmer auf ihren persönlichen Taschenrechnern mit den gleichen Daten arbeiten können. Im ersten Durchlauf werden M=300 Würfelexperimente mit je N=100 Würfen eines idealen Würfels simuliert (Startwert des ZZ-Generators: 2001):

Bild 3

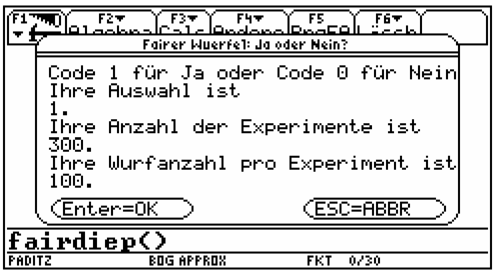

Bild 4

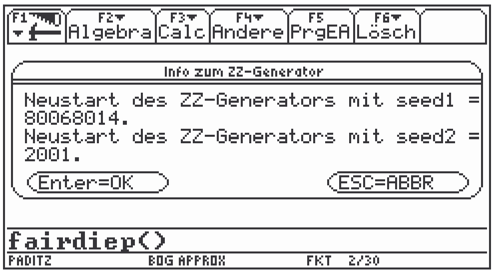

Bild 5

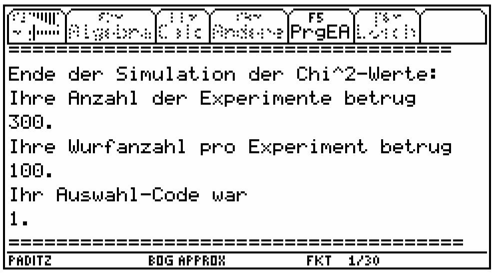

Bild 6

Zeitdauer dieser Simulation ca. 30min (ein Speed-Modul im TI-92Plus ist vorteilhaft, um die Zeitdauer für die Simulation zu verkürzen). Während die Simulation läuft, können weitere Erläuterungen gegeben werden:

Ein Experiment mit N=100 Würfen erzeugt die Augenzahlen X_1 , X_2 , ..., X_N , aus denen sofort die Häufigkeiten H_1 , H_2 , ..., H_6 ermittelt und mit den theoretischen Häufigkeiten N/6 für jede Augenzahl (idealer Würfel) verglichen werden:

$$\textbf{CHI\^{}2 = 6 / N * Summe ((} \mathbf{H_k} \textbf{ - N/6)}^{\mathbf{2}} \textbf{ , k , 1 , 6)}$$

Der CHI^2-Wert beschreibt die quadratischen Abweichungen zwischen den empirischen (Ist-Zustand) und theoretisch erwarteten (Soll-Zustand) Häufigkeiten. Der Faktor 6/N normiert die die CHI^2-Werte, so dass sich CHI^2-verteilte Zufallszahlen ergeben, sofern der Ist-Zustand dem Soll-Zustand entspricht. Die mathematische Statistik sagt hierzu aus, dass sich im sogenannten CHI^2-Anpassungstest eine CHI^2-verteilte Prüfgröße (mit 5 Freiheitsgraden als Parameter der CHI^2-Verteilung) ergibt, sofern der Ist-Zustand dem (hypothetischen) Soll-Zustand entspricht.

Liste **list1** mit den M=300 simulierten Chi^2-Werten muß dann in **Liste laltur** (**alt**e **Ur**daten**l**iste des ersten Simulationslaufes) gesichert werden.

Nun kann die Simulation mit dem gezinkten Würfel erfolgen:

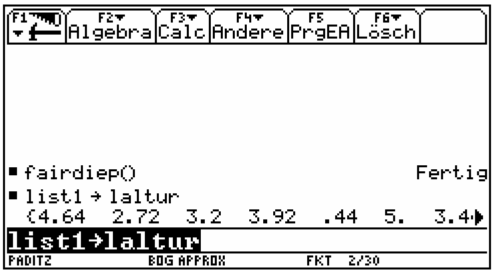

Bild 7

Bild 8

Bild 9

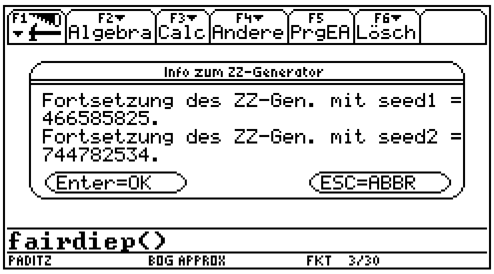

Bild 10

Während des Simulationslaufes erscheint eine Anzeige zum Stand der Simulation. Hier der 9. Chi^2-Wert:

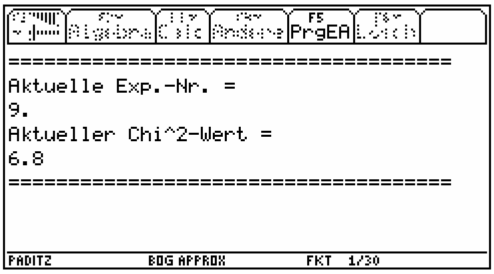

Bild 11

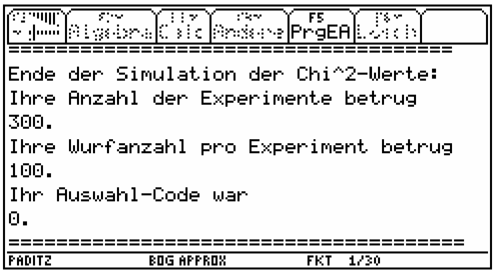

Bild 12

Zeitdauer dieser erneuten Simulation ca. 30min. Während die Simulation läuft, können weitere Erläuterungen gegeben werden:

Ein Experiment mit N=100 Würfen erzeugt die "gezinkten" Augenzahlen X_1 , X_2 , ..., X_N , aus denen sofort die Häufigkeiten H_1 , H_2 , ..., H_6 ermittelt und erneut mit den theoretischen Häufigkeiten N/6 für jede Augenzahl (idealer Würfel) verglichen werden:

$$\textbf{CHI\^{}2 = 6 / N * Summe ((} \mathbf{H_k} \textbf{ - N/6)}^{\mathbf{2}} \textbf{ , k , 1 , 6)}$$

Der "gezinkte" Würfel soll dabei die Augenzahl 6 etwas seltener erscheinen lassen gemäß folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung: P(X = k) = 2/11 für k = 1, 2, ..., 5 und P(X = k) = 1/11 für k = 6. In der praktischen Datenerfassung kennt man die Wahrscheinlichkeitsverteilung der gewürfelten Daten nicht, so dass stets ein Vergleich mit den im Idealfall zu erwartenden Häufigkeiten N/6 (Nullhypothese zur vermuteten Wahrscheinlichkeitsverteilung: P(X = k) = 1/6 für k = 1, 2, ..., 6) erfolgt.

Liste **list1** mit den M=300 simulierten Chi^2-Werten muß dann in **Liste lneuur** (**neu**e **Ur**daten**l**iste des zweiten Simulationslaufes) gesichert werden.
Diese zwei Urdatenlisten könnten auch vorher von jedem Schüler individuell erzeugt bzw. vom Lehrer überspielt werden, um die Simulationszeit einzusparen.

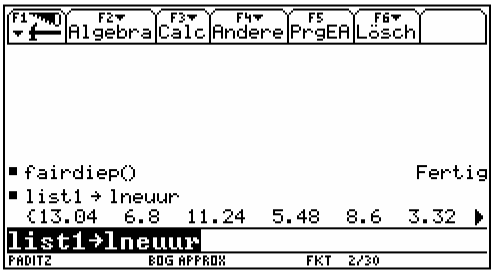

Bild 13

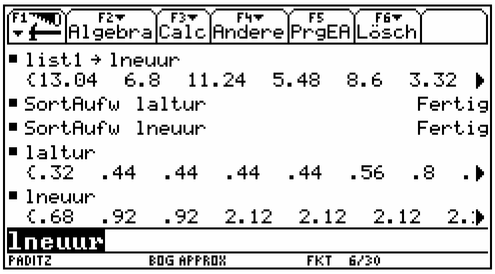

Bild 14

Nun beginnt der nächste Arbeitsschritt:

Erzeugung der **Variationsreihen** zu **laltur** und **lneuur** mit dem **SortAufw**-Befehl. Die in aufsteigender Reihenfolge sortierten Listen wurden bereits vorher unter den bisherigen Listennamen abgespeichert, vgl. Bild 14. Man erkennt bereits die unterschiedlichen Größenordnungen der Einzelwerte in den sortierten Urlisten. Nun werden die primären und sekundären Häufigkeitsverteilungen mit den Teilprogrammen **primfreq( )** und **secufreq( )** erzeugt und unter folgenden Namen abgespeichert:

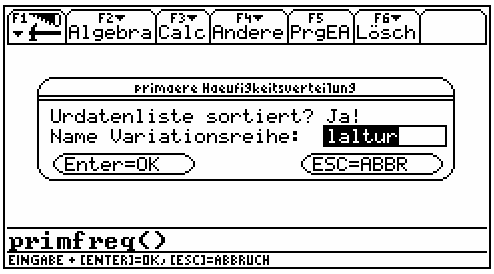

Bild 15

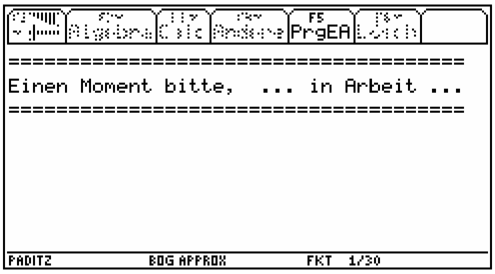

Bild 16

list2 --> laltpx (ältere erste Simulation mit den primären x-Werten)
list3 --> laltpf (ältere erste Simulation mit den primären f-Werten: zugeordnete Häufigkeiten)
list4 --> laltsx (ältere erste Simulation mit den sekundären x-Werten bei Klasseneinteilung: Klassenbreite 1)
list5 --> laltsf (ältere erste Simulation mit den sekundären f-Werten: zugeordnete Klassenhäufigkeiten)

und

list2 --> lneupx (neuere zweite Simulation mit den primären x-Werten)
list3 --> lneupf (neuere zweite Simulation mit den primären f-Werten: zugeordnete Häufigkeiten)
list4 --> lneusx (neuere zweite Simulation mit den sekundären x-Werten bei Klasseneinteilung: Klassenbreite 1)
list5 --> lneusf (neuere zweite Simulation mit den sekundären f-Werten: zugeordnete Klassenhäufigkeiten)

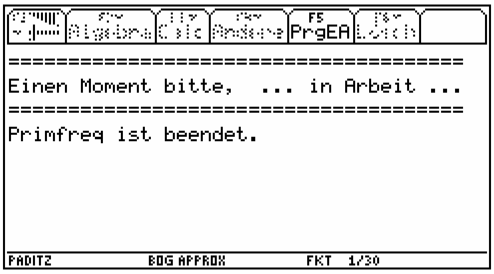

Bild 17

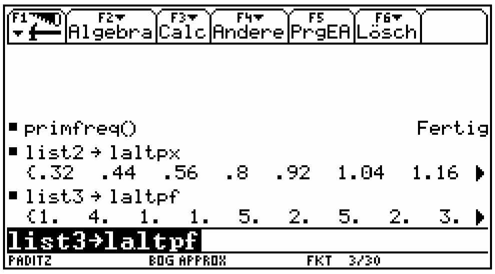

Bild 18

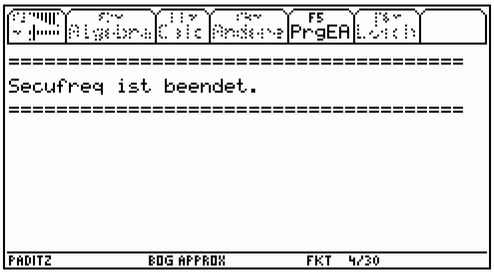

Bild 19

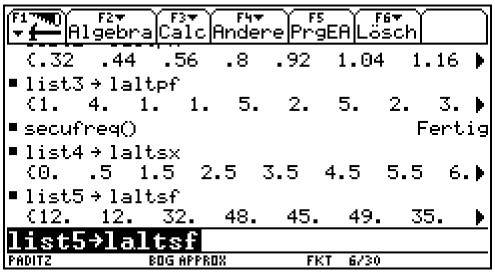

Bild 20

Nun werden die Häufigkeitsverteilungen für die "gezinkten" Daten bereitgestellt:

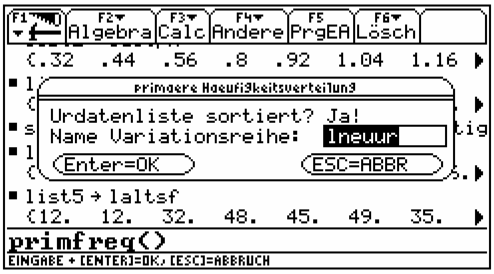

Bild 21

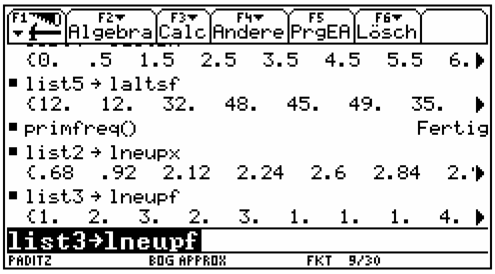

Bild 22

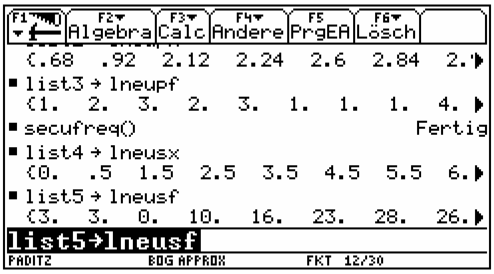

Bild 23

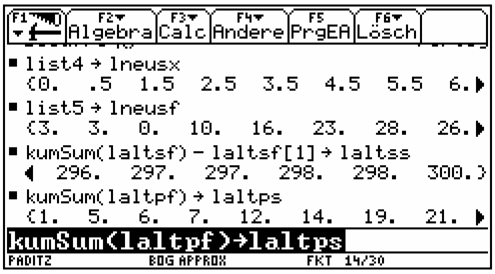

Bild 24

In Bild 24 wurden die Summenhäufigkeiten (Absolutwerte in Liste **laltps** bzw. **laltss**) zur Bereitstellung der empirischen Verteilungsfunktion bzw. Treppenfunktion der relativen Summenhäufigkeiten erzeugt. Nun werden außerdem die Chi^2-Dichtefunktion, deren Verteilungsfunktion, die empirische Verteilungsfunktion und die Treppenfunktion der relativen Summenhäufigkeiten definiert und im **Y=** - Menü abgespeichert, jeweils für den idealen Würfel:

defchidf( ) erzeugt **y3**, **defchivf( )** erzeugt **y2**, **defempvf( )** erzeugt **y1**, **deftrels( )** erzeugt **y4**.

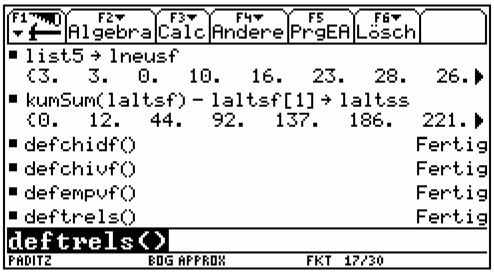

Bild 25

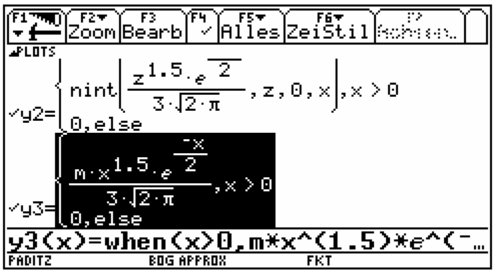

Bild 26

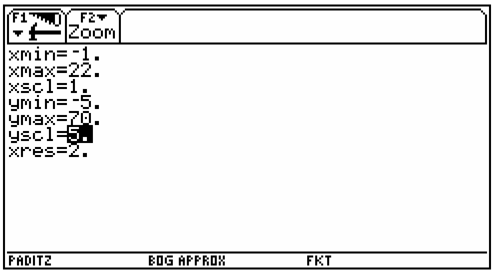

Bild 27

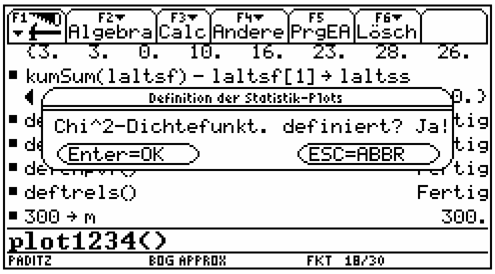

Bild 28

Das Betrachtungsfenster muß per Hand eingestellt werden. Das Teilprogramm **plot1234( )** erzeugt nun einige statistische Grafiken, die teilweise mit der Chi^2-Dichtefunktion überlagert werden:

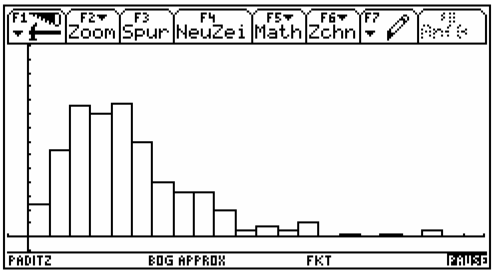

Bild 29

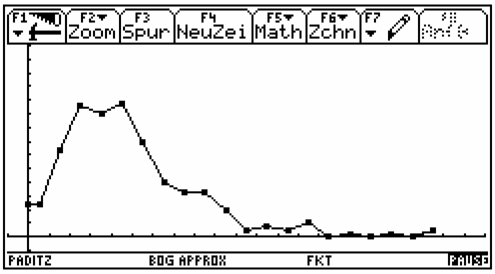

Bild 30

Bild 29 und 30: Histogramm und Häufigkeitspolygon für den idealen Würfel

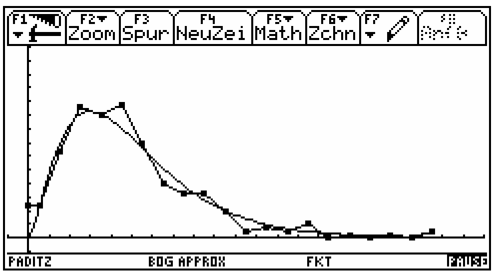

Bild 31

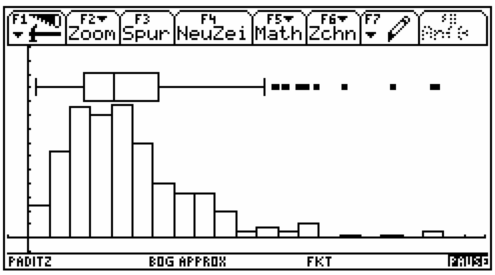

Bild 32

Bild 31 und 32: Häufigkeitspolygon und Chi^2-Dichtefunktion für den idealen Würfel, sowie ein Boxplot.

Konzentration der Chi^2-Werte unter der Nullhypothese H_0 "nahe bei Null" - also: kein Einwand gegen H_0 .

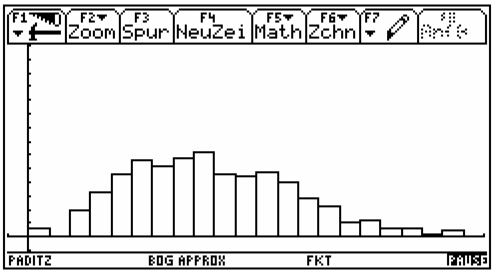

Bild 33

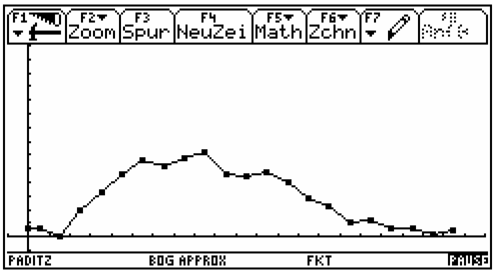

Bild 34

Bild 33 und 34: Histogramm und Häufigkeitspolygon für den "gezinkten" Würfel - Eine Chi^2-Dichtefunktion ist nicht mehr erkennbar (Rechtsverschiebung des Histogramms deutet auf zu große Chi^2-Werte unter H_0 hin).

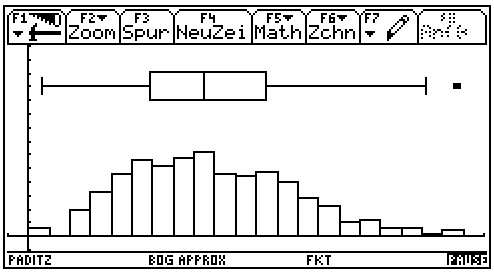

Bild 35: Histogramm und Boxplot für den gezinkten Würfel.

Es folgen nun Bilder, die per Hand im Y= - Menü eingestellt werden:

Bild 37 und 39: empirische Verteilungsfunktion (der Chi^2-Testwerte unter H_0 und idealem Würfel)
Bild 41: Verteilungsfunktion der Prüfverteilung (Chi^2-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden)

Wegen der langen Rechenzeit zur Darstellung der Chi^2-Verteilungsfunktion über ein Integral mit variabler oberer Grenze nutzt man vorteilhaft die Bereitstellung der Funktion über die Statistik-Flash-Software:

y5 = tistat.chi2iwkt(-oo, x, 5) (**iwkt** = Intervallwahrscheinlichkeit)

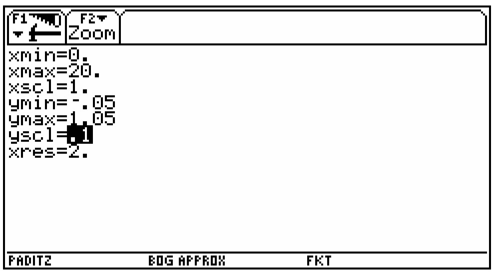

Bild 36

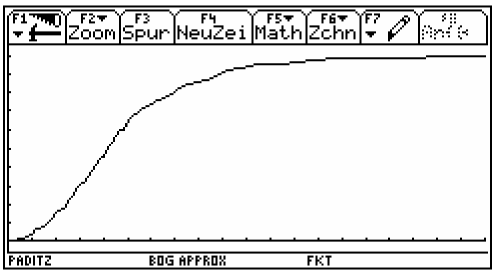

Bild 37

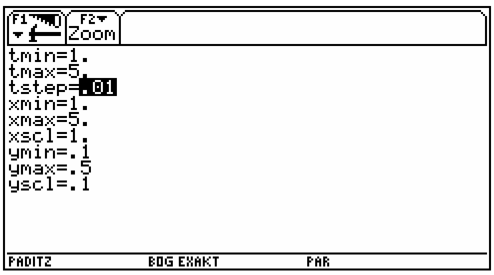

Bild 38

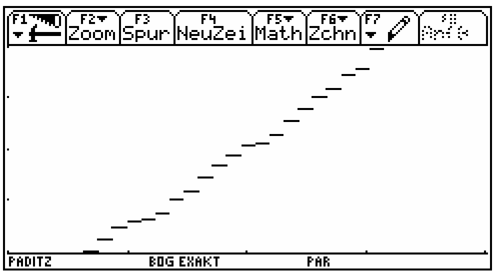

Bild 39

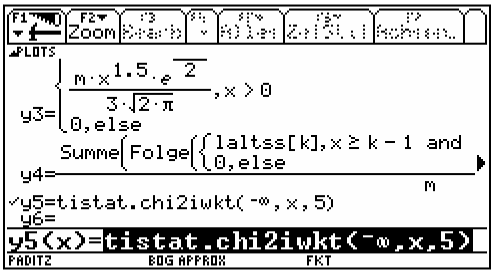

Bild 40

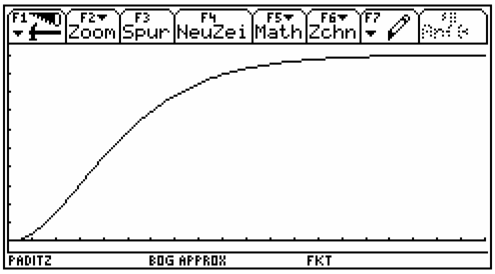

Bild 41

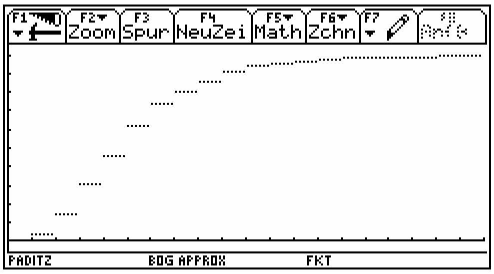

Bild 42

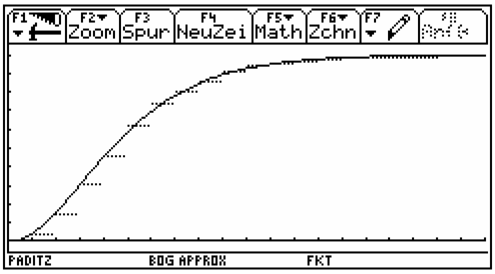

Bild 43

Bild 42 und 43: Treppenfunktion der relativen Summenhäufigkeiten (nach der Klassenbildung) und Chi^2-Verteilungsfunktion. Die Treppenfunktion wurde im "Dot"-Modus gezeichnet, um senkrechte Kurvenstücke zu vermeiden und die Unstetigkeitsstellen deutlich sichtbar zu machen.

Eine bessere Bildqualität erhält man über die Parameterdarstellung (ebenfalls im "Dot"-Modus):

$$\mathbf{xt1(t) = t} \quad \text{und} \quad \mathbf{yt1(t) = y4(t)}\ ,$$

wenn die Schrittweite hinreichend klein gewählt wird (vgl. auch Bild 38 und 39):

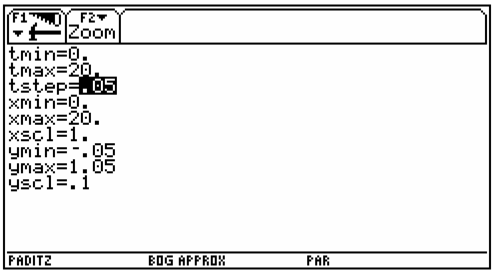

Bild 44

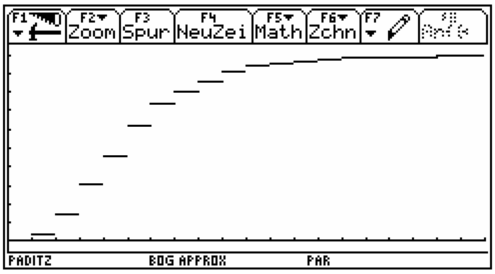

Bild 45

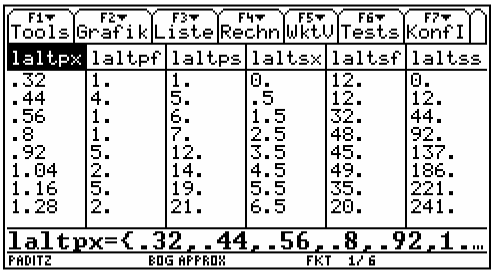

Bild 46

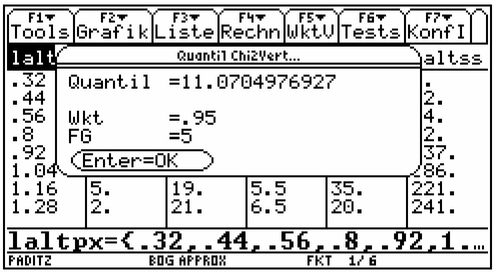

Bild 47

Bild 48

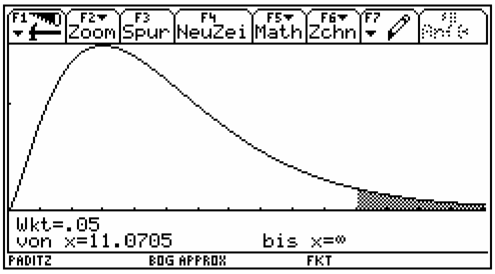

Bild 49

Bild 46 zeigt den Statistik-Listen-Editor und die Auswahlmenüs:

F5: Wahrscheinlichkeitsverteilungen/Quantile

Zur Wahrscheinlichkeit alpha = 0,05 für den Fehler erster Art:
Im Würfelexperiment können auch für den idealen Würfel Chi^2-Testwerte über 11,0705 entstehen und zwar in 5% der Fälle. Dort würde man auf einem Signifikanzniveau von alpha = 5% die Nullhypothese ablehnen, obwohl mit einem idealen Würfel gewürfelt wurde.

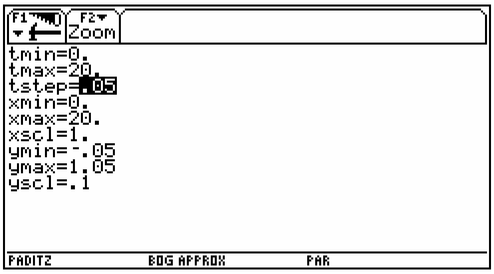

Bild 50

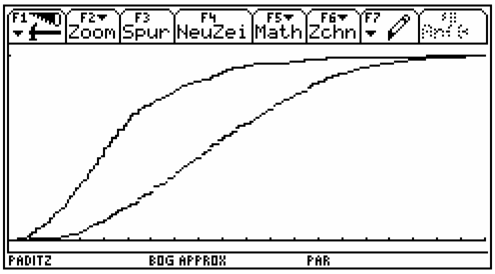

Bild 51

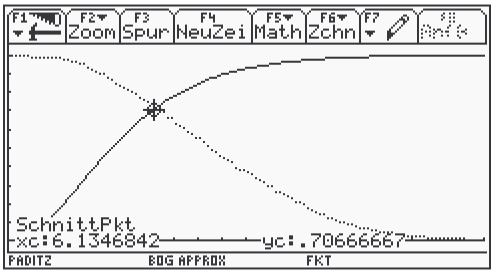

Bild 52

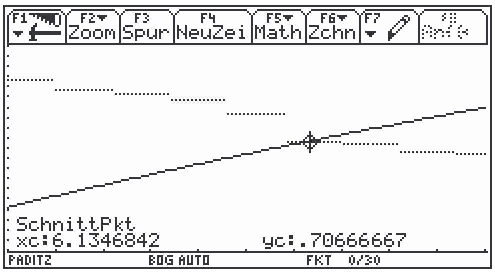

Bild 53

Für die hier betrachteten Hypothesen H_0 und H_A konnte durch Simulation gezeigt werden, dass in der Tat unter H_0 eine Chi^2-verteilte Prüfgröße (5 Freiheitsgrade) entsteht, vgl. Bilder 37, 41 und 43. Hingegen beim "gezinkten" Würfel (unter H_A) zeigten sich deutliche Abweichungen von der ursprünglichen Prüfverteilung, wenn die Prüfgröße weiterhin mit der theoretischen Annahme einer Gleichverteilung berechnet wurde, vgl. Bild 51 mit der Verteilungsfunktion der Prüfverteilung (Chi^2-Verteilung) und der empirischen Verteilungsfunktion der Testwerte für den "gezinkten" Würfel.

In den letzten zwei Bildern wird derjenige Testwert $\mathbf{x_A = 6,135}$ berechnet, für den die Wahrscheinlichkeiten **alpha = 0,293** und **beta = 0,293** der Fehler 1. und 2. Art übereinstimmen.
Dazu wurden die Chi^2-Verteilungsfunktion und die (empirische) Differenzfunktion $\mathbf{y7(x) = 1 - y6(x) = 1 - P(X_A \leq x) = P(X_A > x)}$ zum Schnitt gebracht.

Damit gilt für die untersuchten Simulationen:

Fällt die Prüfgröße X kleiner als $\mathbf{x_A}$ = 6,135 aus, dann ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art größer als die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art und man sollte die Nullhypothese nicht ablehnen.
Ergibt sich jedoch mit den Würfeldaten (ein Würfelexperiment mit N Würfen) eine Prüfgröße X größer als $\mathbf{x_A}$ = 6,135, dann ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art größer als die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art und man sollte die Nullhypothese besser ablehnen und davon ausgehen, dass der Würfel "gezinkt" ist.

Zur Erinnerung:

Fehler 1. Art: Ablehnung der Nullhypothese, obwohl sie richtig ist.
Fehler 2. Art: Nichtablehnung der Nullhypothese, obwohl die Alternativhypothese richtig ist.

Wegen der langen Rechenzeiten zur Erstellung der Graphen im Parameter-Modus können die Bilder vorzeitig beendet werden (Abbruch der Erstellung der Graphik mit der ON-Taste). Der Schnittpunkt der beiden Graphen wird im Funktions-Modus ermittelt.

Beantworten Sie abschließend die Frage:

Ist ein Würfel zu beanstanden, wenn er in 100 Würfen die Augenzahlen 1 bis 6 mit den Häufigkeiten 15, 16, 18, 17, 16, 18 zeigt?

Literaturhinweis:

Aulenbacher, Paditz, Wabel-Frenk:Lehr- und Übungsbuch Mathematik Bd.3
(**Teil Stochastik: Beispiel 6.1 und Aufgabe 19.1**),
Fachbuchverlag Leipzig 2001 (2.Aufl.) (ISBN 3-446-21682-0)

Die oben angeführten Programme sind aus dem Internet abrufbar,
http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/images/ , indem der entsprechende Dateiname angefügt wird:

fairdiep()	unter	fairdiep.9xp (Simulation der Urdatenlisten)	bzw.	FAIRDIEP.TXT
primfreq()	unter	primfreq.9xp (Primäre Häufigkeitsverteilung)	bzw.	PRIMFREQ.TXT
secufreq()	unter	secufreq.9xp (Sekundäre Häufigkeitsverteilung)	bzw.	SECUFREQ.TXT
defempvf()	unter	defempvf.9xp (Empirische Verteilungsfunktion - 1. Simulation)	bzw.	DEFEMPVF.TXT
defempfk()	unter	defempfk.9xp (Empirische Verteilungsfunktion - 2. Simulation)	bzw.	DEFEMPFK.TXT
defchivf()	unter	defchivf.9xp (Chi^2-Verteilungsfunktion)	bzw.	DEFCHIVF.TXT
defchidf()	unter	defchidf.9xp (Chi^2-Dichtefunktion)	bzw.	DEFCHIDF.TXT
deftrels()	unter	deftrels.9xp (Treppenfkt. der relativen Summenhäufigkeiten)	bzw.	DEFTRELS.TXT
plot1234()	unter	plot1234.9xp (Definition und Darstellung von Plots)	bzw.	PLOT1234.TXT

Ludwig Paditz, 18. Mai 2002,

Kontakt per e-mail: paditz@informatik.htw-dresden.de

Autor:

Prof. Dr. Ludwig Paditz
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden (FH)
FB Informatik/Mathematik
Friedrich-List-Platz 1

D-01069 Dresden

Anhang 1:

Die Teilprogramme als ASCII-Texte:

```
\START92\
\COMMENT=
\NAME=fairdiep
\FILE=FAIRDIEP.9XP
()
Prgm
\(C)\ keine Parameterliste, Dialogfenster!                  Hilfezeile
Lokal a,b,n,e,i,k,d,c,z,seed
Dialog                                                      Dialogfenster
Titel "Wuerfelexperiment"
DropDown "Fairer W\u..\rfel:",{"Ja (Code=1)","Nein (Code=0)"},a
Abfrage "Anzahl Experimente ",m
Abfrage "Wurfanzahl pro Exp.",n
DropDown "Neustart ZZ-Generator:",{"Ja","Nein"},b
Abfrage "ggf. Startwert ZZ-G.",seed
EndDlog
2-a\->\a
If b=1 Then
ZufStart Ausdr(seed)
EndIf
Ausdr(m)\->\m                                         Anzahl der Experimente
Ausdr(n)\->\n                                         Wurfanzahl pro Exp.
n/6\->\e                                              theoret. Häufigk. N/6
{a,m,n}\->\fairparm
L\o..\EA
FktAus
defGraph("Labels","Off")
L\o..\Haupt
L\o..\Bild
PlotsAus
Dialog                                                Dialogfenster
Titel "Fairer Wuerfel: Ja oder Nein?"
Text "Code 1 f\u..\r Ja oder Code 0 f\u..\r Nein"
Text "Ihre Auswahl ist"
Text String(a)
Text "Ihre Anzahl der Experimente ist"
Text String(m)
Text "Ihre Wurfanzahl pro Experiment ist"
Text String(n)
EndDlog
If b=1 Then
Dialog                                                Dialogfenster
Titel "Info zum ZZ-Generator"
Text "Neustart des ZZ-Generators mit seed1 ="
Text String(seed1)
Text "Neustart des ZZ-Generators mit seed2 ="
Text String(seed2)
EndDlog
Else
Dialog
Titel "Info zum ZZ-Generator"
Text "Fortsetzung des ZZ-Gen. mit seed1 ="
Text String(seed1)
Text "Fortsetzung des ZZ-Gen. mit seed2 ="
Text String(seed2)
```

```
EndDlog
EndIf
EntfVar list1,list2,list3,list4,list5,list6          Löschbefehle
For k,1,m,1
Folge(0,i,1,6,1)\->\list2
For i,1,n,1
If a=1 Then
ZufallZ(6)\->\d               Simulation einer Augenzahl d (idealer Würfel)
Else
GanzZahl((ZufallZ(11)+1)/2)\->\d               Simulation einer Augenzahl d
EndIf                                           (gezinkter Würfel)
list2[d]+1\->\list2[d]                          Häufigkeitsliste erstellen
EndFor
Summe((list2-e)^2/e)\->\c                       einen CHI^2-Wert berechnen
L\o..\EA
Zeige "======================================"
Zeige "Aktuelle Exp.-Nr. =",k
Zeige "Aktueller Chi^2-Wert =",approx(c)       Anzeige aktueller Stand
Zeige "======================================"
runde(c,3)\->\list1[k]
EndFor
L\o..\EA
Zeige "======================================"
Zeige "Ende der Simulation der Chi^2-Werte:"    Anzeige Ende der Simulation
Zeige "Ihre Anzahl der Experimente betrug ",m
Zeige "Ihre Wurfanzahl pro Experiment betrug ",n
Zeige "Ihr Auswahl-Code war",a
Zeige "======================================="
EntfVar list2
EndPrgm
\STOP92\
```

```
\START92\                          primäre Häufigkeitsverteilung erzeugen
\COMMENT=
\NAME=primfreq
\FILE=PRIMFREQ.9XP
()
Prgm
\(C)\ keine Parametervorgabe, Dialogfenster!
Lokal i,k,kk,list
Dialog                                                  Dialogfenster
Titel "primaere Haeufigkeitsverteilung"
Text "Urdatenliste sortiert? Ja!"
Abfrage "Name Variationsreihe",list
EndDlog
Ausdr(list)\->\list1
1\->\i
1\->\k
L\o..\EA
Zeige "======================================="
Zeige "Einen Moment bitte, ... in Arbeit ..."
Zeige "======================================="
EntfVar list2,list3
list1[1]\->\list2[1]
1\->\list3[1]
While k<Dim(list1)
k+1\->\k
If list1[k]=list1[k-1] Then
list3[i]+1\->\list3[i]
Else
i+1\->\i
list1[k]\->\list2[i]
1\->\list3[i]
```

```
EndIf
EndWhile
Zeige "Primfreq ist beendet."
EndPrgm
\STOP92\
```

```
\START92\                          sekundäre Häufigkeitsverteilung erzeugen
\COMMENT=
\NAME=secufreq
\FILE=SECUFREQ.9XP
()
Prgm
\(C)\ keine Parameterliste!
Lokal k,l,x
EntfVar list4,list5
Folge(\(-)\.5+x,x,0,GanzZahl(list2[Dim(list2)])+1,1)\->\list4
0\->\list4[1]
Folge(0,x,0,GanzZahl(list2[Dim(list2)])+1,1)\->\list5
For k,1,Dim(list1),1
GanzZahl(list1[k])+2\->\l
list5[l]+1\->\list5[l]
EndFor
list5[2]\->\list5[1]
L\o..\EA
Zeige "======================================"
Zeige "Secufreq ist beendet."
Zeige "======================================"
EndPrgm
\STOP92\
```

```
\START92\                                CHI^2-Dichtefunktion bereitstellen
\COMMENT=
\NAME=defchidf
\FILE=DEFCHIDF.9XP
()
Prgm
\(C)\ keine Parametervorgabe, def. y3(x)
EntfVar y3
Definier y3(x)=when(x>0,m*x^(1.5)*\e\^(\(-)\x/2)/(3*\root\(2*\pi\)),0)
ZeiStil 3,"Line"
EndPrgm
\STOP92\
```

```
\START92\                CHI^2-Verteilungsfunktion als Integral bereitstellen
\COMMENT=
\NAME=defchivf
\FILE=DEFCHIVF.9XP
()
Prgm
\(C)\ keine Parametervorgabe, def. y2(x)
EntfVar y2
Definier y2(x)=when(x>0,numInt(z^(1.5)*\e\^(\(-)\z/2)/(3*\root\(2*\pi\))
,z,0,x),0)
ZeiStil 2,"Line"
EndPrgm
\STOP92\
```

```
\START92\         empirische Verteilungsfunktion aus laltpx, laltps erzeugen
\COMMENT=
\NAME=defempvf
\FILE=DEFEMPVF.9XP
()
```

```
Prgm
\(C)\ keine Parametervorgabe, def. y1(x)
EntfVar y1
Definier y1(x)=Summe(Folge(when(x\>=\laltpx[k-1] and x<laltpx[k],laltps[k-1],0),k,2,Dim(laltpx),1))/m+when(x\>=\laltpx[Dim(laltpx)],1,0)
ZeiStil 1,"Dot"
EndPrgm
\STOP92\
```

\START92 *empirische Verteilungsfunktion aus lneupx, lneups erzeugen*
\COMMENT=
\NAME=defempfk
\FILE=DEFEMPFK.9XP

```
()
Prgm
\(C)\ keine Parametervorgabe, def. y6(x)
EntfVar y6
Definier y6(x)=Summe(Folge(when(x\>=\lneupx[k-1] and x<lneupx[k],lneups[k-1],0),k,2,Dim(lneupx),1))/m+when(x\>=\lneupx[Dim(lneupx)],1,0)
ZeiStil 1,"Dot"
EndPrgm
\STOP92\
```

\START92 *Treppenfunktion der relativen Summenhäufigkeiten für laltsx, laltss*
\COMMENT=
\NAME=deftrels
\FILE=DEFTRELS.9XP

```
()
Prgm
\(C)\ keine Parametervorgabe, def. y4(x)
EntfVar y4
Definier y4(x)=Summe(Folge(when(x\>=\k-1 and
x<k,laltss[k],0),k,2,Dim(laltsx)-1,1))/m+when(x\>=\Dim(laltsx)-1,1,0)
ZeiStil 4,"Dot"
EndPrgm
\STOP92\
```

\START92 *Definition einiger Statistik-Plots*
\COMMENT=
\NAME=plot1234
\FILE=PLOT1234.9XP

```
()
Prgm
\(C)\ Definition der Statistik-Plots
Dialog
Titel "Definition der Statistik-Plots"
Text "Chi^2-Dichtefunkt. definiert? Ja!"
EndDlog
PlotsAus
L\o..\Bild
L\o..\Graph
L\o..\EA
FktAus
NeuPlot 1,4,laltpx,,laltpf,,,1
PlotsEin 1
ZeigGraf
Pause
NeuPlot 2,2,laltsx,laltsf,,,,4,1
PlotsAus 1
PlotsEin 2
ZeigGraf
Pause
ZchFkt y3(x)
```

```
Pause
NeuPlot 3,4,lneupx,,lneupf,,,1
PlotsAus
PlotsEin 3
ZeigGraf
Pause
NeuPlot 4,2,lneusx,lneusf,,,,4,1
PlotsAus 3
PlotsEin 4
ZeigGraf
Pause
NeuPlot 5,5,laltpx,,laltpf,,,4,1
PlotsAus 4
PlotsEin 5,1
ZeigGraf
Pause
NeuPlot 6,5,lneupx,,lneupf,,,4,1
PlotsAus 5,1
PlotsEin 6,3
ZeigGraf
Pause
EndPrgm
\STOP92\
```

Anhang 2: Datenlisten

Die erzeugten Datenlisten sind **laltur** bzw. **lneuur** und werden hier in bereits sortierter Form als **Variationsreihen** angegeben:

laltur: 300 CHI^2-Daten aus Experimenten mit einem simulierten idealen Würfel in aufsteigender Reihenfolge sortiert

0.32	1.52	2.24	2.72	3.32	3.80	4.16	4.64	5.12	6.20	7.40	9.44
0.44	1.52	2.24	2.72	3.32	3.80	4.16	4.64	5.12	6.20	7.52	9.44
0.44	1.64	2.36	2.72	3.32	3.80	4.16	4.64	5.12	6.20	7.52	9.44
0.44	1.64	2.36	2.72	3.32	3.80	4.16	4.76	5.24	6.32	7.64	9.56
0.44	1.64	2.36	2.72	3.32	3.80	4.28	4.76	5.36	6.44	7.64	9.68
0.56	1.76	2.36	2.84	3.32	3.80	4.28	4.88	5.48	6.44	7.76	9.80
0.80	1.76	2.36	2.84	3.44	3.80	4.28	4.88	5.48	6.44	7.88	9.92
0.92	1.76	2.36	2.84	3.44	3.80	4.28	4.88	5.48	6.56	8.00	9.92
0.92	1.76	2.36	2.84	3.44	3.80	4.28	4.88	5.48	6.80	8.12	10.28
0.92	1.76	2.36	2.84	3.44	3.92	4.28	4.88	5.48	6.80	8.24	10.28
0.92	1.76	2.48	2.84	3.44	3.92	4.40	4.88	5.60	6.80	8.24	11.12
0.92	1.76	2.48	2.96	3.44	3.92	4.40	5.00	5.60	6.80	8.48	11.36
1.04	1.88	2.48	2.96	3.44	4.04	4.40	5.00	5.60	6.92	8.48	11.84
1.04	1.88	2.48	2.96	3.44	4.04	4.40	5.00	5.60	6.92	8.60	11.96
1.16	1.88	2.48	2.96	3.56	4.04	4.40	5.00	5.60	6.92	8.60	12.32
1.16	1.88	2.6	2.96	3.56	4.04	4.40	5.00	5.72	6.92	8.72	12.44
1.16	1.88	2.6	2.96	3.56	4.04	4.52	5.00	5.72	7.04	8.84	13.04
1.16	1.88	2.6	3.08	3.56	4.04	4.52	5.00	5.84	7.04	8.84	13.28
1.16	1.88	2.6	3.08	3.56	4.04	4.52	5.00	5.96	7.04	8.84	13.40
1.28	2.00	2.6	3.20	3.56	4.04	4.64	5.00	5.96	7.04	8.84	13.40
1.28	2.00	2.6	3.20	3.68	4.04	4.64	5.00	5.96	7.16	8.96	13.88
1.40	2.00	2.6	3.20	3.68	4.04	4.64	5.12	6.08	7.16	8.96	15.20
1.40	2.00	2.6	3.20	3.68	4.04	4.64	5.12	6.08	7.28	8.96	17.60
1.40	2.12	2.72	3.32	3.68	4.04	4.64	5.12	6.08	7.28	9.20	19.52
1.52	2.24	2.72	3.32	3.68	4.16	4.64	5.12	6.20	7.40	9.20	19.64

lneuur: 300 CHI^2-Daten aus Experimenten mit einem simulierten "gezinkten" Würfel in aufsteigender Reihenfolge sortiert

0.68	3.56	4.76	5.84	6.80	7.64	8.48	9.56	10.52	11.48	12.80	14.48
0.92	3.68	4.76	5.96	6.80	7.76	8.48	9.56	10.52	11.60	12.80	14.72
0.92	3.68	5.00	5.96	6.80	7.76	8.60	9.56	10.64	11.60	12.80	14.72
2.12	3.80	5.00	5.96	6.92	7.76	8.60	9.56	10.64	11.72	12.92	14.84
2.12	4.04	5.00	5.96	6.92	7.76	8.60	9.56	10.76	11.84	12.92	14.84
2.12	4.04	5.00	6.08	6.92	7.88	8.72	9.56	10.76	11.84	13.04	15.20
2.24	4.04	5.00	6.08	7.04	7.88	8.72	9.68	10.76	11.84	13.04	15.20
2.24	4.04	5.12	6.08	7.04	7.88	8.72	9.68	10.88	11.96	13.04	15.20
2.60	4.04	5.24	6.08	7.04	7.88	8.84	9.68	10.88	11.96	13.28	15.56
2.60	4.16	5.36	6.08	7.04	7.88	8.84	9.68	10.88	11.96	13.28	15.56
2.60	4.16	5.36	6.08	7.16	8.12	8.84	9.80	10.88	12.08	13.28	16.04
2.84	4.16	5.36	6.08	7.16	8.12	8.84	9.92	11.00	12.20	13.40	16.16
2.96	4.16	5.36	6.08	7.16	8.12	8.96	9.92	11.00	12.32	13.40	16.16
3.08	4.28	5.48	6.20	7.28	8.12	8.96	9.92	11.12	12.32	13.40	16.52
3.20	4.28	5.48	6.32	7.28	8.24	8.96	10.04	11.12	12.44	13.64	16.64
3.20	4.28	5.48	6.32	7.28	8.24	8.96	10.16	11.12	12.44	13.64	16.76
3.20	4.40	5.48	6.44	7.28	8.24	9.08	10.16	11.12	12.44	13.76	17.00
3.20	4.40	5.48	6.56	7.40	8.36	9.08	10.28	11.12	12.56	13.76	17.24
3.32	4.40	5.48	6.56	7.40	8.36	9.08	10.28	11.12	12.56	13.88	17.48
3.32	4.52	5.48	6.56	7.40	8.36	9.20	10.28	11.24	12.56	14.00	18.08
3.44	4.52	5.60	6.56	7.40	8.36	9.32	10.28	11.24	12.56	14.12	18.68
3.44	4.64	5.60	6.68	7.52	8.36	9.32	10.40	11.36	12.56	14.24	18.92
3.44	4.64	5.60	6.68	7.52	8.36	9.44	10.40	11.48	12.68	14.48	19.16
3.44	4.64	5.72	6.68	7.52	8.48	9.44	10.40	11.48	12.68	14.48	20.60
3.56	4.76	5.84	6.68	7.64	8.48	9.44	10.52	11.48	12.68	14.48	20.72

primäre Häufigkeitsverteilung mit den Listen **laltpx**, **laltpf** und **laltps** (verbundene Datenlisten mit jeweils 91 Einzeldaten):

laltpx CHI^2-Wert	**laltpf** Einzel-häufigkeit	**laltps** Summen-häufigkeit	**laltpx** CHI^2-Wert	**laltpf** Einzel-häufigkeit	**laltps** Summen-häufigkeit	**laltpx** CHI^2-Wert	**laltpf** Einzel-häufigkeit	**laltps** Summen-häufigkeit
0.32	1.	**1.**	**4.04**	12.	**149.**	**7.76**	1.	**256.**
0.44	4.	**5.**	**4.16**	5.	**154.**	**7.88**	1.	**257.**
0.56	1.	**6.**	**4.28**	6.	**160.**	**8.00**	1.	**258.**
0.80	1.	**7.**	**4.40**	6.	**166.**	**8.12**	1.	**259.**
0.92	5.	**12.**	**4.52**	3.	**169.**	**8.24**	2.	**261.**
1.04	2.	**14.**	**4.64**	9.	**178.**	**8.48**	2.	**263.**
1.16	5.	**19.**	**4.76**	2.	**180.**	**8.60**	2.	**265.**
1.28	2.	**21.**	**4.88**	6.	**186.**	**8.72**	1.	**266.**
1.40	3.	**24.**	**5.00**	10.	**196.**	**8.84**	4.	**270.**
1.52	3.	**27.**	**5.12**	7.	**203.**	**8.96**	3.	**273.**
1.64	3.	**30.**	**5.24**	1.	**204.**	**9.20**	2.	**275.**
1.76	7.	**37.**	**5.36**	1.	**205.**	**9.44**	3.	**278.**
1.88	7.	**44.**	**5.48**	5.	**210.**	**9.56**	1.	**279.**
2.00	4.	**48.**	**5.60**	5.	**215.**	**9.68**	1.	**280.**
2.12	1.	**49.**	**5.72**	2.	**217.**	**9.80**	1.	**281.**
2.24	3.	**52.**	**5.84**	1.	**218.**	**9.92**	2.	**283.**
2.36	8.	**60.**	**5.96**	3.	**221.**	**10.28**	2.	**285.**
2.48	5.	**65.**	**6.08**	3.	**224.**	**11.12**	1.	**286.**
2.60	8.	**73.**	**6.20**	4.	**228.**	**11.36**	1.	**287.**
2.72	7.	**80.**	**6.32**	1.	**229.**	**11.84**	1.	**288.**
2.84	6.	**86.**	**6.44**	3.	**232.**	**11.96**	1.	**289.**

2.96	6.	**92.**	**6.56**	1.	**233.**	**12.32**	1.	**290.**
3.08	2.	**94.**	**6.80**	4.	**237.**	**12.44**	1.	**291.**
3.20	4.	**98.**	**6.92**	4.	**241.**	**13.04**	1.	**292.**
3.32	8.	**106.**	**7.04**	4.	**245.**	**13.28**	1.	**293.**
3.44	8.	**114.**	**7.16**	2.	**247.**	**13.40**	2.	**295.**
3.56	6.	**120.**	**7.28**	2.	**249.**	**13.88**	1.	**296.**
3.68	5.	**125.**	**7.40**	2.	**251.**	**15.20**	1.	**297.**
3.80	9.	**134.**	**7.52**	2.	**253.**	**17.60**	1.	**298.**
3.92	3.	**137.**	**7.64**	2.	**255.**	**19.52**	1.	**299.**
						19.64	1.	**300.**

Hinweis:

Immerhin 221 von 300 Daten (73,7%) aus idealen Würfelexperimenten fallen kleiner als 6 aus!
Also in nur 79/300 * 100% = 26,3% der Experimente versagt der ideale Würfel und erweckt den Eindruck, dass er nicht ideal sei, wenn das CHI^2-Quantil 6,00 das Entscheidungskriterium wäre (führt zum Fehler 1. Art).

primäre Häufigkeitsverteilung mit den Listen **lneupx**, **lneupf** und **lneups** (verbundene Datenlisten mit jeweils 115 Einzeldaten):

lneupx CHI^2-Wert	**lneupf** Einzel-häufigkeit	**lneups** Summen-häufigkeit	**lneupx** CHI^2-Wert	**lneupf** Einzel-häufigkeit	**lneups** Summen-häufigkeit	**lneupx** CHI^2-Wert	**lneupf** Einzel-häufigkeit	**lneups** Summen-häufigkeit
0.68	1.	**1.**	**7.16**	3.	**113.**	**11.96**	3.	**235.**
0.92	2.	**3.**	**7.28**	4.	**117.**	**12.08**	1.	**236.**
2.12	3.	**6.**	**7.40**	4.	**121.**	**12.20**	1.	**237.**
2.24	2.	**8.**	**7.52**	3.	**124.**	**12.32**	2.	**239.**
2.60	3.	**11.**	**7.64**	2.	**126.**	**12.44**	3.	**242.**
2.84	1.	**12.**	**7.76**	4.	**130.**	**12.56**	5.	**247.**
2.96	1.	**13.**	**7.88**	5.	**135.**	**12.68**	3.	**250.**
3.08	1.	**14.**	**8.12**	4.	**139.**	**12.80**	3.	**253.**
3.20	4.	**18.**	**8.24**	3.	**142.**	**12.92**	2.	**255.**
3.32	2.	**20.**	**8.36**	6.	**148.**	**13.04**	3.	**258.**
3.44	4.	**24.**	**8.48**	4.	**152.**	**13.28**	3.	**261.**
3.56	2.	**26.**	**8.60**	3.	**155.**	**13.40**	3.	**264.**
3.68	2.	**28.**	**8.72**	3.	**158.**	**13.64**	2.	**266.**
3.80	1.	**29.**	**8.84**	4.	**162.**	**13.76**	2.	**268.**
4.04	5.	**34.**	**8.96**	4.	**166.**	**13.88**	1.	**269.**
4.16	4.	**38.**	**9.08**	3.	**169.**	**14.00**	1.	**270.**
4.28	3.	**41.**	**9.20**	1.	**170.**	**14.12**	1.	**271.**
4.40	3.	**44.**	**9.32**	2.	**172.**	**14.24**	1.	**272.**
4.52	2.	**46.**	**9.44**	3.	**175.**	**14.48**	4.	**276.**
4.64	3.	**49.**	**9.56**	6.	**181.**	**14.72**	2.	**278.**
4.76	3.	**52.**	**9.68**	4.	**185.**	**14.84**	2.	**280.**
5.00	5.	**57.**	**9.80**	1.	**186.**	**15.20**	3.	**283.**
5.12	1.	**58.**	**9.92**	3.	**189.**	**15.56**	2.	**285.**
5.24	1.	**59.**	**10.04**	1.	**190.**	**16.04**	1.	**286.**
5.36	4.	**63.**	**10.16**	2.	**192.**	**16.16**	2.	**288.**
5.48	7.	**70.**	**10.28**	4.	**196.**	**16.52**	1.	**289.**
5.60	3.	**73.**	**10.40**	3.	**199.**	**16.64**	1.	**290.**
5.72	1.	**74.**	**10.52**	3.	**202.**	**16.76**	1.	**291.**
5.84	2.	**76.**	**10.64**	2.	**204.**	**17.00**	1.	**292.**
5.96	4.	**80.**	**10.76**	3.	**207.**	**17.24**	1.	**293.**
6.08	8.	**88.**	**10.88**	4.	**211.**	**17.48**	1.	**294.**

6.20	1.	**89.**	**11.00**	2.	**213.**	**18.08**	1.	**295.**
6.32	2.	**91.**	**11.12**	6.	**219.**	**18.68**	1.	**296.**
6.44	1.	**92.**	**11.24**	2.	**221.**	**18.92**	1.	**297.**
6.56	4.	**96.**	**11.36**	1.	**222.**	**19.16**	1.	**298.**
6.68	4.	**100.**	**11.48**	4.	**226.**	**20.60**	1.	**299.**
6.80	3.	**103.**	**11.60**	2.	**228.**	**20.72**	1.	**300.**
6.92	3.	**106.**	**11.72**	1.	**229.**			
7.04	4.	**110.**	**11.84**	3.	**232.**			

Hinweis zur Simulation:

Nur 80 von 300 "gezinkten" Daten fallen kleiner als 6 aus!

Also in 80/300 * 100% = 26,7% der Experimente hinterläßt der "gezinkte" Würfel den Eindruck, dass er ideal sei, wenn das CHI^2-Quantil 6,00 das Entscheidungskriterium wäre (führt zum Fehler 2. Art).

In 220 von 300 Fällen (73,3%) überschreitet der CHI^2-Wert für ein "gezinktes" Würfelexperiment den kritischen Wert 6,00.

---

sekundäre Häufigkeitsverteilung mit den Listen **laltsx**, **laltsf** und **laltss** (verbundene Datenlisten mit jeweils 21 Einzeldaten, *kumSum(laltsf)-laltsf[1] = laltss*) sowie
sekundäre Häufigkeitsverteilung mit den Listen **lneusx**, **lneusf** und **lneuss** (verbundene Datenlisten mit jeweils 22 Einzeldaten, *kumSum(lneusf)-lneusf[1] = lneuss*),
wobei der Anfangswert 0 in laltsx bzw. lneusx die **Reduktionslage** zur Klasseneinteilung (Klassenbreite = 1) angibt und die verbundenen Datenlisten (laltsx, laltsf) bzw. (lneusx, lneusf) zur Darstellung des Häufigkeitspolygons (= geglättetes Histogramm) ausgenutzt werden (vgl. Programm plot1234):

laltsx CHI^2-Wert (Klassenmitte)	**laltsf** Einzel-häufigkeit	**laltss** Summen-häufigkeit	**lneusx** CHI^2-Wert (Klassenmitte)	**lneusf** Einzel-häufigkeit	**lneuss** Summen-häufigkeit
(0.)	(12.)	(0.)	(0.)	(3.)	(0.)
0.5	12.	12.	0.5	3.	3.
1.5	32.	44.	1.5	0.	3.
2.5	48.	92.	2.5	10.	13.
3.5	45.	137.	3.5	16.	29.
4.5	49.	186.	4.5	23.	52.
5.5	35.	221.	5.5	28.	80.
6.5	20.	241.	6.5	26.	106.
7.5	16.	257.	7.5	29.	135.
8.5	16.	273.	8.5	31.	166.
9.5	10.	283.	9.5	23.	189.
10.5	2.	285.	10.5	22.	211.
11.5	4.	289.	11.5	24.	235.
12.5	2.	291.	12.5	20.	255.
13.5	5.	296.	13.5	14.	269.
14.5	0.	296.	14.5	11.	280.
15.5	1.	297.	15.5	5.	285.
16.5	0.	297.	16.5	6.	291.
17.5	1.	298.	17.5	3.	294.
18.5	0.	298.	18.5	3.	297.
19.5	2.	300.	19.5	1.	298.
			20.5	2.	300.

Einige statistische Grafiken, die teilweise mit der Chi^2-Dichtefunktion überlagert werden:

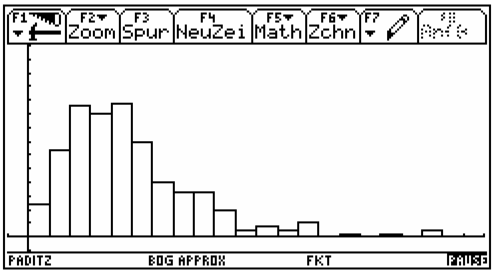

Bild 29

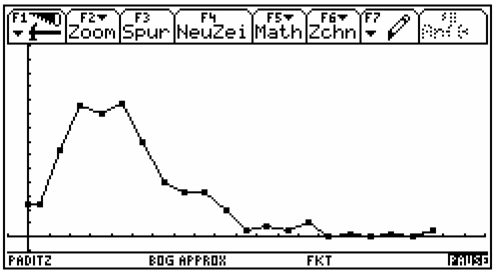

Bild 30

Bild 29 und 30: Histogramm und Häufigkeitspolygon für den idealen Würfel

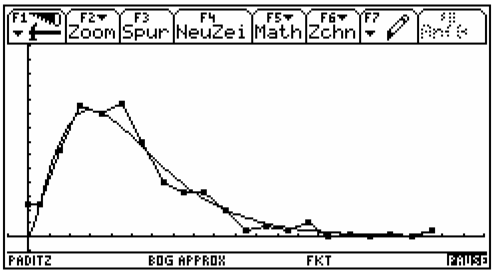

Bild 31

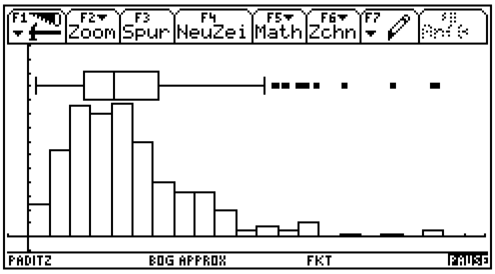

Bild 32

Bild 31 und 32:
Häufigkeitspolygon und Chi^2-Dichtefunktion für den idealen Würfel, sowie ein Boxplot.

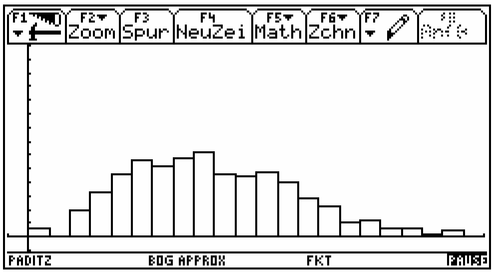

Bild 33

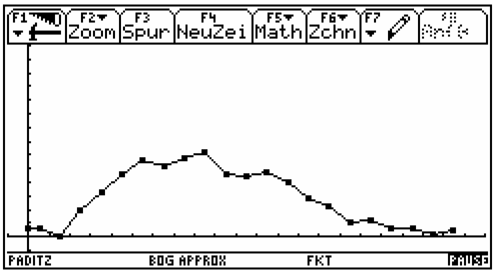

Bild 34

Bild 33 und 34:
Histogramm und Häufigkeitspolygon für den "gezinkten" Würfel - Eine Chi^2-Dichtefunktion ist nicht mehr erkennbar (Rechtsverschiebung des Histogramms deutet auf zu große Chi^2-Werte unter H_0 (Nullhypothese: „idealer Würfel“) hin).

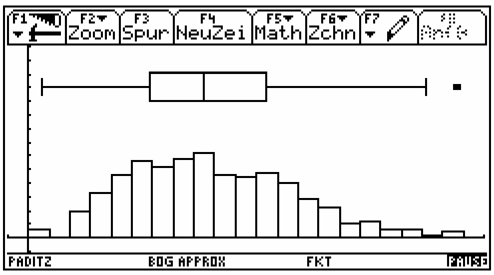

Bild 35: Histogramm und Boxplot für den gezinkten Würfel.

Anhang 3: Formeln

Die Dichtefunktion y3 der Prüfverteilung ist eine **CHI^2-Dichtefunktion** (mit 5 Freiheitsgraden)

Bild B1

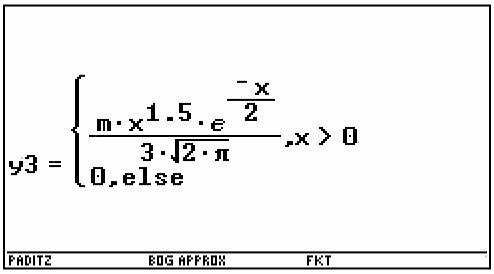

Bild B2

Die Dichtefunktion wurde im **Equation Writer** (eine neue Flash-Software des TI-92Plus) vergrößert dargestellt.

Der Flächeninhalt unter der Dichtefunktion beträgt 1 (Gesamtwahrscheinlichkeit) bzw. m (= 300, Gesamthäufigkeit, sofern die Dichtefunktion mit dem Faktor m multipliziert wird):

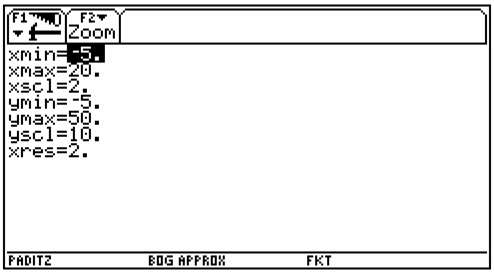

Bild B3

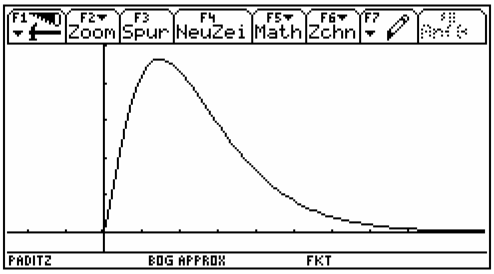

Bild B4

Die **CHI^2-Verteilungsfunktion** y2 (mit 5 Freiheitsgraden) zur Dichtefunktion y3 (mit m = 1) als numerisches Integral:

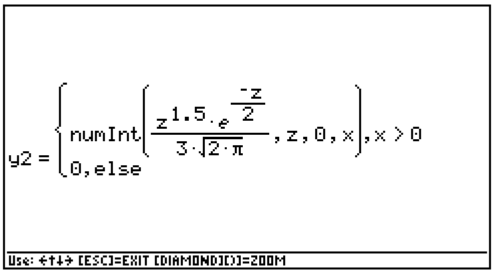

Bild B5

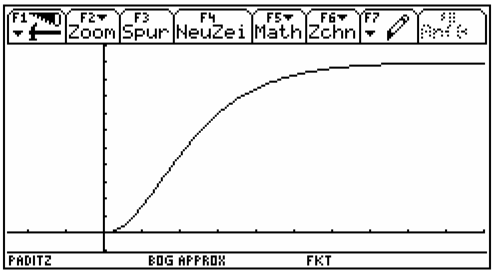

Bild B6

Einfacher ist die Definition der CHI^2-Dichte- (y8) und CHI^2-Verteilungsfunktion (y5) mithilfe der Statistik-Flash-Software:

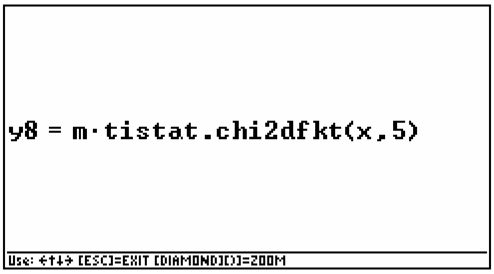

Bild B7

Bild B8

Die **empirische Verteilungsfunktion** (eine rechtsseitig stetige Treppenfunktion) y1 wird über die primäre Häufigkeitsverteilung mithilfe der Listen laltpx und laltpf (bzw. laltps) wie folgt definiert:

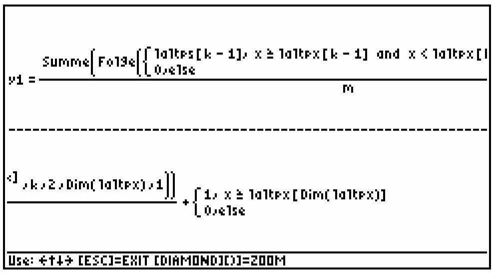

Bild B9

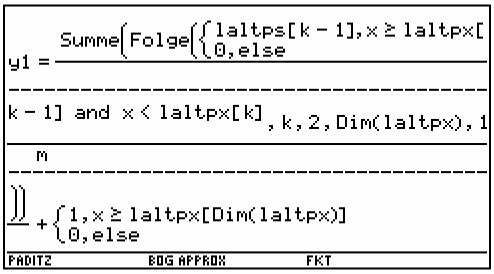

Bild B10

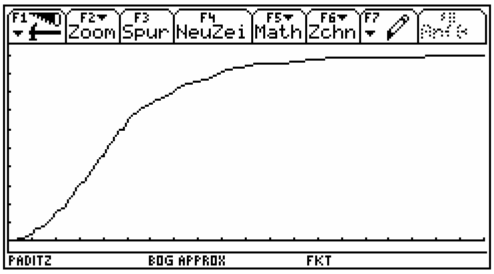

Bild 37

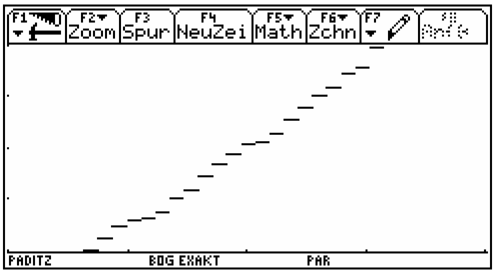

Bild 39

Die Bilder B10 und 39 sind jeweils Vergrößerungen der Bilder B9 und 37.

Die **Treppenkurve y4 der relativen Summenhäufigkeiten** (eine rechtsseitig stetige Treppenfunktion) für die Daten des idealen Würfels wird über die sekundäre Häufigkeitsverteilung mithilfe der Listen laltsx und laltsf (bzw. laltss) wie folgt definiert:

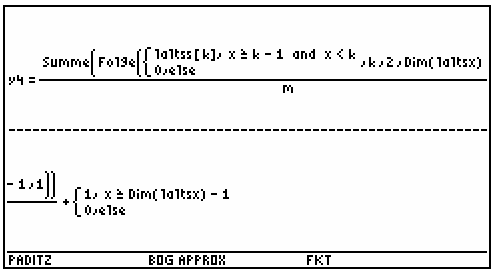

Bild B11

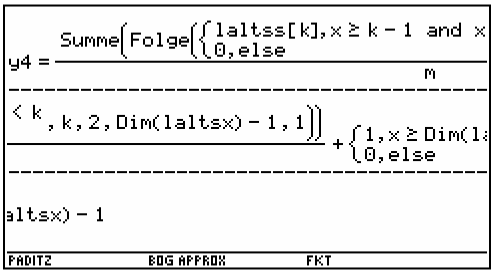

Bild B12

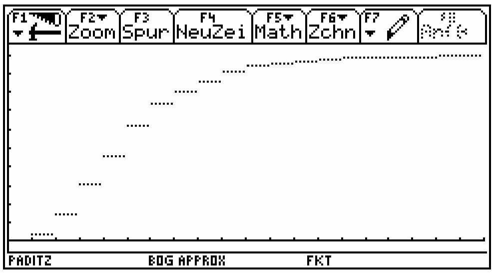

Bild 42

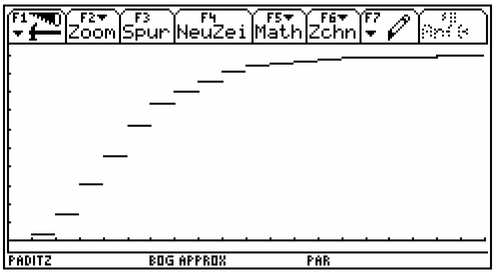

Bild 45

Bild B12 vergrößert Bild B11 (Equation Writer), Bild 45 wurde mit einer Parameterdarstellung gezeichnet. Die Treppenkurve der relativen Summenhäufigkeiten (Bild 42) wurde im "Dot"-Modus gezeichnet, um senkrechte Kurvenstücke zu vermeiden und die Unstetigkeitsstellen deutlich sichtbar zu machen. Das verbesserte Bild 45 ist zeitaufwendig in der Darstellung.

Die **empirische Verteilungsfunktion** y6 (eine rechtsseitig stetige Treppenfunktion) für die Daten des "gezinkten" Würfels wird über die primäre Häufigkeitsverteilung mithilfe der Listen lneupx und lneupf (bzw. lneups) wie folgt definiert:

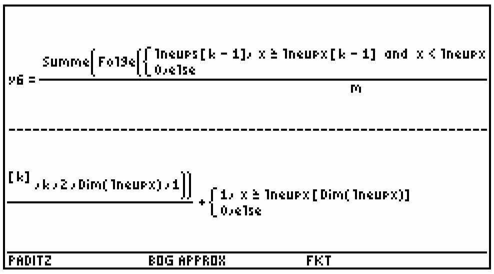

Bild B13

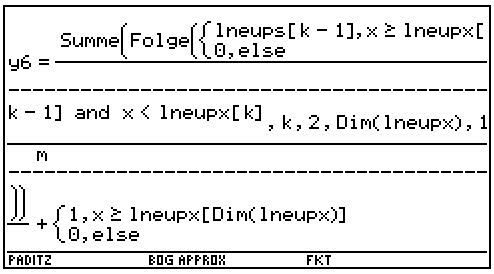

Bild B14

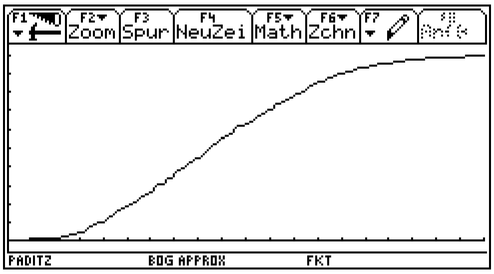

Bild B15 (Treppenkurve für die "gezinkten" Würfeldaten, vgl. auch Bild 37)

Wegen der im allgemeinen größeren CHI^2-Werte ("gezinkter" Würfel) verschiebt sich die Treppenkurve nach rechts.

Zur Betrachtung der **Fehlerwahrscheinlichkeiten zum Fehler 1.Art** bzw. **Fehler 2.Art** wird statt y6 die monoton fallende empirische Funktion y7 = 1 - y6 betrachtet und mit der monoton wachsenden (theoretisch korrekten) Verteilungsfunktion der CHI^2-Daten eines idealen Würfels zum Schnitt gebracht:

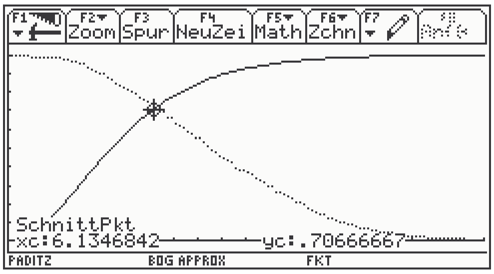

Bild 52

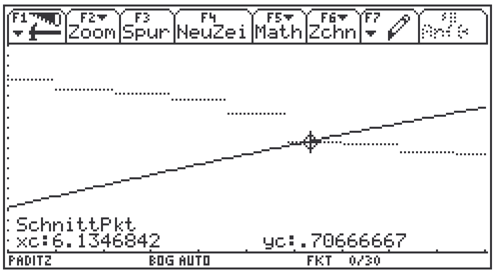

Bild 53 (Ausschnitt)

Für den Schnittpunkt $(x_A\ ;\ y_A) = (6{,}135\ ;\ 0{,}707)$ gilt

$y1(x_A) = P(\mathrm{CHI\hat{}2}_{ideal} \leq x_A) = y_A = 0{,}707$ und $1 - y6(x_A) = P(\mathrm{CHI\hat{}2}_{gezinkt} > x_A)$
$= y_A = 0{,}707$,

d.h.

$1 - y1(x_A) = 1 - P(\mathrm{CHI\hat{}2}_{\ ideal} \leq x_A) = P(\mathrm{CHI\hat{}2}_{\ ideal} > x_A = 6{,}135) = \text{alpha} = 0{,}293$
(Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art)

und

$y6(x_A) = P(CHI\text{^}2_{gezinkt} \leq x_A = 6{,}135) = 1 - P(CHI\text{^}2_{gezinkt} > x_A = 6{,}135) = beta = 0{,}293$.

(Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art)

Damit lautet das **Entscheidungskriterium** für einen im Experiment festgestellten CHI^2-Wert (wenn man den Würfel nicht genauer kennt und nur die oben betrachteten Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Betracht kommen):

> **Fällt die Prüfgröße X kleiner als x_A = 6,135 aus, dann ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art größer als die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art und man sollte die Nullhypothese (idealer Würfel, Augenzahlen haben gleiche Chancen) nicht ablehnen.**
>
> **Ergibt sich jedoch mit den Würfeldaten (ein Würfelexperiment mit N Würfen) eine Prüfgröße X größer als x_A = 6,135, dann ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art größer als die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art und man sollte die Nullhypothese besser ablehnen und davon ausgehen, dass der Würfel im oben dargestellten Sinn (Augenzahl 6 benachteiligt, die anderen Augenzahlen haben jeweils die doppelte Chance gewürfelt zu werden) "gezinkt" ist.**

Zur Erinnerung:

Fehler 1. Art:	Ablehnung der Nullhypothese, obwohl sie richtig ist.
Fehler 2. Art:	Nichtablehnung der Nullhypothese, obwohl die Alternativhypothese richtig ist.