Numer. Math. 13, 245—246 (1969)

Bemerkung zu einer Arbeit von Marshall und Olkin*

L. Elsner

Eingegangen am 10. November 1968

In [1] geben Marshall und Olkin einen neuen Beweis dafür an, daß voll irreduzible (englisch: fully indecomposable, [1]) nichtnegative Rechtecksmatrizen stets so skaliert werden können, daß alle Zeilen- und Spaltensummen untereinander gleich sind. An entscheidender Stelle wird dabei das folgende Ergebnis benötigt:

Satz. Es sei $A \geqq 0$ eine voll irreduzible $m \times n$-Matrix, (x^v, y^v) eine Folge mit

$$x^v \in R_m, \quad x^v > 0, \quad \prod_{i=1}^{m} x_i^v = 1, \quad y^v \in R_n, \quad y^v > 0, \quad \prod_{i=1}^{n} y_i^v = 1.$$

Ist dann (mit $\|x\| = \operatorname{Max} |x_i|$) $\lim (\|x^v\| + \|y^v\|) = \infty$, so gilt auch

$$\lim_{v \to \infty} x^{v\prime} A y^v = \infty.$$

Dieses Resultat kann einfacher und kürzer als in [1] bewiesen werden. Außerdem ist es möglich, eine untere Schranke für das Wachstum von $x' A y$ anzugeben. Zunächst wird ein Lemma benötigt:

Lemma. Es sei $B \geqq 0$, eine voll irreduzible $m \times m$-Matrix, $b > 0$ der kleinste nichtverschwindende Koeffizient von B. Dann gilt für alle $x > 0$, $y > 0$ mit $\prod x_i \geqq 1$, $\prod y_i \geqq 1$

$$(x' B y)^{m+1} \geqq b^{m+1} \Big(\sum_i x_i\Big) \Big(\sum_i y_i\Big).$$

Beweis. Da B voll irreduzibel ist, kann angenommen werden, daß B irreduzibel ist und alle $b_{ii} > 0$ sind ([1], Lemma 6). Es folgt $B^{m-1} > 0$ (s. [2], S. 41). Definieren wir $H = (h_{rs})$ durch $(x B y)^{m+1} = x' B y x' \ldots y x' B y = x' H y$, so genügt es zu zeigen, daß $h_{rs} \geqq b^{m+1}$ für alle r, s gilt.

Zu gegebenem r, s sei k mit $0 \leqq k \leqq m-1$ die kleinste Zahl mit $(B^k)_{rs} > 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1. $k = 0, 1$. Es ist $b_{rs} > 0$. Wir setzen

$$w_{rs} = b_{rs} y_s x_{\pi_2} b_{\pi_2 \pi_2} y_{\pi_2} x_{\pi_3} \ldots y_{\pi_m} x_s b_{ss},$$

wobei $\pi_2 \ldots \pi_m$ eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, m$ ist. Da alle x_i und y_i genau einmal vorkommen und deren Produkt $\geqq 1$ ist, gilt $w_{rs} \geqq b^{m+1}$.

* Diese Arbeit entstand während eines Aufenthalts beim National Research Institute for Mathematical Sciences P.O. Box 395. Pretoria, South Africa.

Fall 2. $k \geqq 2$. Es gibt $\pi_1 \ldots \pi_{k-1}$ mit $b_{r\pi_1} b_{\pi_1\pi_2} \ldots b_{\pi_{k-1}s} > 0$. Weil k minimal ist, gilt $\pi_i \neq \pi_j$ für $i \neq j$. Mit einer Permutation $\pi_k \ldots \pi_m$ von $\{1, 2, \ldots, m\} \div \{\pi_1, \ldots, \pi_{k-1}\}$ setze

$$w_{rs} = b_{r\pi_1} y_{\pi_1} x_{\pi_1} b_{\pi_1\pi_2} \ldots b_{\pi_{k-2}\pi_{k-1}} y_{\pi_{k-1}} x_{\pi_k} b_{\pi_k\pi_{k'}} \ldots y_{\pi_m} x_{\pi_{k-1}} b_{\pi_{k-1}s}.$$

Wiederum ist $w_{rs} \geqq b^{m+1}$.

In beiden Fällen ist w_{rs} ein Summand in der Darstellung

$$h_{rs} = \sum_{i_1 \ldots i_{2m}} b_{r i_1} (y x')_{i_1 i_2} b_{i_2 i_3} \ldots (y x')_{i_{2m-1}, i_{2m}} b_{i_{2m}, s}.$$

Daher ist $h_{rs} \geqq w_{rs} \geqq b^{m+1}$. Q.e.d.

Beweis des Satzes. Es sei $m \leqq n$. Ist $y_1 \ldots y_n$ mit $\prod y_i = 1$, $y_i > 0$ gegeben, so fassen wir die m größten y_i zu einem Vektor $\tilde{y}$ zusammen. Es ist $\prod_{i=1}^{m} \tilde{y}_i \geqq 1$. B sei die voll irreduzible Matrix, die durch Streichen aller Spalten, deren Index in y, aber nicht in $\tilde{y}$ vorkommt, aus A entsteht. Ist a der kleinste nichtverschwindende Koeffizient von A, so gilt $b \geqq a$. Wir wenden das Lemma an und erhalten

$$(x' A y)^{m+1} \geqq (x' B \tilde{y})^{m+1} \geqq a^{m+1} (\textstyle\sum x_i) (\textstyle\sum \tilde{y}_i). \tag{1}$$

Wegen $\|y\| = \|\tilde{y}\|$ geht auch $\|x^v\| + \|\tilde{y}^v\|$ gegen Unendlich. Aus (1) folgt nun die Behauptung sofort.

Bemerkung 1. Offenbar gilt

$$x' A y \geqq a \cdot \|x\|^{\frac{1}{m+1}} \|y\|^{\frac{1}{m+1}}. \tag{2}$$

Bemerkung 2. Die aus (2) folgende globale untere Schranke $x' A y \geqq a$ kann leicht verbessert werden:

$$x' A y \geqq x' B \tilde{y} \geqq \min (b_{ii}) \cdot \textstyle\sum x_j \tilde{y}_j \geqq a \cdot m \cdot \prod x_i^{1/m} \prod \tilde{y}_i^{1/m} \geqq m \cdot a.$$

Literatur

1. MARSHALL, A. W., and I. OLKIN: Scaling of matrices to achieve specified row and column sums. Num. Math. 12, 83—90 (1968).
2. VARGA, R. S.: Matrix iterative analysis. London: Prentice-Hall 1962.

L. ELSNER
Institut für angewandte Mathematik
der Universität
2000 Hamburg 13
Rothenbaumchaussee 67/69