Math. Z. 130, 107–117 (1973)

Einige Eigenschaften des Darstellungsringes kompakter Gruppen

Detlev Poguntke

Für eine kompakte Gruppe G sei mit G-mod die Kategorie der G-Moduln bezeichnet. Dabei ist ein G-Modul ein Paar (V, f), bestehend aus einem endlichdimensionalen komplexen Vektorraum V und einem stetigen Homomorphismus f von G in $\mathrm{Aut}(V)$, die allgemeine lineare Gruppe von V. Äquivalent dazu ist die Formulierung: G operiert von links stetig und linear auf V. Morphismen zwischen zwei G-Moduln (V, f) und (W, k) sind lineare Abbildungen von V in W, die die Operation von G respektieren. Ein stetiger Homomorphismus u von einer kompakten Gruppe H in G induziert einen Funktor $\mathrm{mod}(u)$ von G-mod in H-mod, wobei $\mathrm{mod}(u)\,(V, f)$ für einen G-Modul (V, f) als $(V, f\circ u)$ erklärt ist; Morphismen aus G-mod gehen unter $\mathrm{mod}(u)$ in dieselbe lineare Abbildung über.

Sind (V, f) und (W, k) G-Moduln, so operiert G in naheliegender Weise stetig und linear auf $V\oplus W$ und $V\otimes W$. Die Isomorphieklassen der Objekte aus G-mod bilden eine Menge, die durch die direkte Summe und das Tensorprodukt zu einem kommutativen Halbring wird, dieser sei mit MG bezeichnet. Für einen Morphismus $u\colon H\to G$ kompakter Gruppen induziert der Funktor $\mathrm{mod}(u)$ einen Halbringhomomorphismus Mu von MG in MH und dieser einen Ringhomomorphismus Ru von RG in RH, R ist ein Cofunktor von der Kategorie der kompakten Gruppen in die der kommutativen Ringe (vgl. Chap. 12 von [7]). In dieser Arbeit wird nun für kompakte, zusammenhängende Gruppen G der Ring RG untersucht. Es werden die Einheiten in RG bestimmt, es wird gezeigt, daß G eine Liesche Gruppe ist, wenn RG noethersch ist (die Umkehrung davon wurde in [2] bewiesen). Ferner wird der für Liesche Gruppen bekannte Satz, daß RG isomorph zu dem Unterring derjenigen Elemente des Darstellungsringes eines maximalen Torus von G ist, die bei der Operation der Weylschen Gruppe invariant bleiben, sinngemäß auf nicht notwendig Liesche Gruppen verallgemeinert.

Zuvor wollen wir noch den in [10] bewiesenen Satz, daß Epimorphismen in der Kategorie der kompakten Gruppen surjektiv sind, verschärfen, indem wir zeigen, daß es zu jeder abgeschlossenen Untergruppe H einer kompakten Gruppe G eine kompakte Gruppe L und stetige Homomorphismen u_1 und u_2 von G in L derart gibt, daß u_1 und u_2 genau auf H übereinstimmen. Dafür benötigen wir den folgenden Fortsetzungssatz.

(1.1) **Satz.** *Sei H eine abgeschlossene Untergruppe der kompakten Gruppe G, mit u: $H \to G$ sei der Inklusionshomomorphismus bezeichnet. Zu jedem H-Modul N existieren dann ein H-Modul N' und ein G-Modul M so, daß die H-Moduln $N \oplus N'$ und* $\operatorname{mod}(u)(M)$ *isomorph sind.*

(1.2) *Bemerkung.* Da man auf jedem einem $H(G)$-Modul zugrundeliegenden Vektorraum eine Hilbertraum-Struktur so erklären kann, daß $H(G)$ durch unitäre Transformationen operiert, kann man obigen Satz auch so interpretieren: *Ist V ein endlichdimensionaler komplexer Hilbertraum und φ ein stetiger Homomorphismus von H in die unitäre Gruppe $U(V)$ von V, so gibt es einen V umfassenden endlichdimensionalen komplexen Hilbertraum W (das innere Produkt auf V ist nicht notwendig die Einschränkung des inneren Produktes auf W) und einen stetigen Homomorphismus ψ: $G \to U(W)$ mit $\psi(h)(v) = \varphi(h)(v)$ für $h \in H$ und $v \in V$.*

Beweis des Satzes. Wir verwenden die Grundidee der Beweise zu Proposition 3 und Proposition 4 aus Chap. VI, § VII von [3]. Da jeder H-Modul direkte Summe einfacher H-Moduln ist (vgl. [7], p. 167) und da $\operatorname{mod}(u)$ additiv ist, genügt es zu zeigen, daß zu jedem einfachen H-Modul N ein N' und ein M mit den im Satz angegebenen Eigenschaften existieren. Der Beweis dafür erfolgt indirekt. Sei also $N = (V, f)$ ein einfacher H-Modul derart, daß für jeden G-Modul M und jeden H-Modul N' die H-Moduln $N \oplus N'$ und $\operatorname{mod}(u)(M)$ nicht isomorph sind. Bezeichnet Sp: $\operatorname{Aut}(V) \to \mathbf{C}$ diejenige Abbildung, die jedem Automorphismus seine Spur zuordnet, so sei χ: $H \to \mathbf{C}$ definiert durch $\chi(h) = (\mathrm{Sp} \circ f)(h^{-1})$. Ist ferner $C(G, \mathbf{C})$ die Algebra der stetigen, komplexwertigen Funktionen auf G und $\int\limits_H$ das Haarsche Integral auf H, so sei S: $C(G, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ definiert durch $S(k) = \int\limits_H (k \circ u)\, \chi$. Versieht man $C(G, \mathbf{C})$ mit der durch die Maximums-Norm induzierten Topologie, so ist S stetig. Wir wollen zeigen, daß S die Nullabbildung ist. Nach dem Theorem von Peter und Weyl (vgl. [4], p. 18) genügt es dazu, nachzuweisen, daß für jeden G-Modul (W, t) und jede lineare Abbildung d: $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(W, W) \to \mathbf{C}$ die Abbildung S an der Stelle $d \circ t$ gleich 0 ist. Laut Annahme ist für jeden H-Modul N' der H-Modul $(W, t \circ u)$ nicht isomorph zu $N \oplus N'$; da aber jeder H-Untermodul von $(W, t \circ u)$ direkter Summand ist (vgl. [7], p. 165, 167), ist kein H-Untermodul von $(W, t \circ u)$ zu N isomorph. Wegen der Einfachheit von N gilt dann nach den Orthogonalitäts-Sätzen der Darstellungstheorie (s. [4], p. 23) die Gleichung $S(d \circ t) = \int\limits_H (d \circ t \circ u)\, \chi = 0$.

Also ist $\int_H (k \circ u)\,\chi = 0$ für alle stetigen Funktionen k von G in $\mathbf{C}$. Nach Tietzes Fortsetzungssatz (vgl. [8], p. 242) gibt es aber zu jeder stetigen Funktion von H in $\mathbf{C}$ wenigstens eine stetige Fortsetzung auf G, insbesondere ist $\bar{\chi} = k \circ u$ für eine geeignete stetige Abbildung k von G in $\mathbf{C}$. Man erhält $\int_H \bar{\chi}\chi = \int_H |\chi|^2 = 0$, woraus sich $\chi = 0$ ergibt. Das ist aber absurd, da χ am Einselement von H einen positiven, ganzzahligen Wert, nämlich die Dimension von V, annimmt.

(1.3) **Satz.** *Sei H eine abgeschlossene Untergruppe der kompakten Gruppe G, mit $u\colon H \to G$ sei der Inklusionshomomorphismus bezeichnet. Ist dann x ein Element von $G \setminus H$, so gibt es einen endlichdimensionalen komplexen Hilbertraum V und zwei stetige Homomorphismen φ und ψ von G in die unitäre Gruppe $U(V)$ von V mit $\varphi \circ u = \psi \circ u$, aber $\varphi(x) \neq \psi(x)$.*

(1.4) *Bemerkung.* Da die unitären Gruppen endlichdimensionaler komplexer Hilberträume kompakt sind, ergibt sich aus dem obigen Satz leicht, daß man eine kompakte Gruppe L und stetige Homomorphismen $u_1, u_2\colon G \to L$ mit $H = \{x \in G \mid u_1(x) = u_2(x)\}$ konstruieren kann.

Beweis des Satzes. Es sei K die Menge aller $x \in G$ mit der Eigenschaft: Ist (φ, ψ) ein Paar stetiger Homomorphismen von G in die unitäre Gruppe eines endlichdimensionalen komplexen Hilbertraumes mit $\varphi \circ u = \psi \circ u$, so ist auch $\varphi(x) = \psi(x)$. Offenbar ist K eine H umfassende abgeschlossene Untergruppe von G. Die Aussage des Satzes ist äquivalent zu $K = H$. Wir zeigen zunächst:

(a) *Ist N ein K-Modul und U ein H-Untermodul von N, so ist U ein K-Untermodul von N.*

Zu (a). Nach (1.1) genügt es zu zeigen: Ist $M = (V, f)$ ein G-Modul und U ein H-Untermodul von M, so ist U ein K-Untermodul von M. Wir versehen nun V mit der Struktur eines Hilbertraumes derart, daß $f(G)$ in der unitären Gruppe $U(V)$ von V liegt. Seien W das orthogonale Komplement von U in V und $d := (1_U, -1_W)\colon U \oplus W \to U \oplus W$. Dann ist d eine unitäre Transformation, $I_d\colon U(V) \to U(V)$ sei der zugehörige innere Automorphismus. Die Homomorphismen f, $I_d \circ f\colon G \to U(V)$ stimmen auf H und daher nach Definition von K auch auf K überein, woraus man schließt, daß U ein K-Untermodul von M ist (vgl. [10]).

Mit Hilfe von (a) beweisen wir nun

(b) *Für einen K-Modul $M = (V, f)$ sei*

$$M^K = \{v \in V \mid f(x)(v) = v \text{ für alle } x \in K\}$$

bzw.

$$M^H = \{v \in V \mid f(x)(v) = v \text{ für alle } x \in H\}.$$

Dann gilt $M^K = M^H$.

Zu (b). Offenbar ist M^K in M^H enthalten. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß die Dimension von M^H größer als 0 ist. M^H ist ein H-Untermodul von M und nach (a) dann auch ein K-Untermodul von M; folglich ist durch $\hat{f}(k)(v)=f(k)(v)$ für $k\in K$ und $v\in M^H$ ein stetiger Homomorphismus von K in $\mathrm{Aut}(M^H)$ erklärt. Offenbar ist H in Kern $\hat{f}$ enthalten. Wir sind fertig, wenn wir $K=\text{Kern}\,\hat{f}$ gezeigt haben. Wäre nun aber Kern $\hat{f}$ echt in K enthalten, so gäbe es sicher einen $K/\text{Kern}\,\hat{f}$-Modul (den wir dann als K-Modul auffassen) derart, daß nicht jeder H-Untermodul (= linearer Unterraum des zugrundeliegenden Vektorraumes) ein K-Untermodul wäre, was im Gegensatz zu (a) stünde.

Unter Verwendung von (b) beweisen wir nun in Anlehnung an den Beweis zu Proposition 5 aus Chap. VI, § VII in [3]

(c) *Für jede stetige Funktion s von K in* $\mathbf{C}$ *gilt* $\int_K s=\int_H s|_H$, *wobei* $\int_K$ *bzw.* $\int_H$ *das Haarsche Integral auf K bzw. H bezeichnen.*

Zu (c). T: $C(K,\mathbf{C})\to\mathbf{C}$ sei definiert durch $T(s)=\int_K s-\int_H s|_H$. T ist eine lineare, stetige (bzgl. der von der Maximums-Norm induzierten Topologie) Abbildung. Um $T=0$ nachzuweisen, genügt es wegen des Theorems von Peter und Weyl, der Halbeinfachheit aller K-Moduln und der Stetigkeit und Linearität von T zu zeigen, daß für jeden einfachen K-Modul $M=(V,f)$ und jede lineare Abbildung d von $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V,V)$ in $\mathbf{C}$ die Gleichung $\int_K d\circ f=\int_H d\circ f|_H$ gilt. Ist f der konstante Homomorphismus, so ist diese Gleichung evident. Ist f nicht konstant, so ist M^K und damit nach (b) auch M^H wegen der Einfachheit von M der Nullraum. Nach den Orthogonalitätssätzen ist dann

$$\int_K d\circ f=0=\int_H d\circ f|_H.$$

Also gilt (c). Aus (c) folgt nun unmittelbar die gewünschte Gleichung $H=K$, womit (1.3) vollständig bewiesen ist.

Nun wollen wir uns dem Darstellungsring einer kompakten, zusammenhängenden Gruppe G zuwenden. Zunächst werden einige später benötigte, größtenteils wohlbekannte Hilfsmittel zusammengestellt. Die Menge der abelschen zusammenhängenden Untergruppen von G ist per Inklusion induktiv geordnet und enthält nach dem Zornschen Lemma maximale Elemente, diese maximalen Elemente sind dann abgeschlossen und mithin kompakt und werden als maximale abelsche und zusammenhängende Untergruppen von G bezeichnet. Es gilt nun (vgl. [5], p. 291 und [6], p. 99):

(2.1) **Satz.** *G sei eine kompakte, zusammenhängende Gruppe und T eine maximale abelsche und zusammenhängende Untergruppe von G. Dann gilt:*

(a) *Die zu T konjugierten Untergruppen überdecken G.*

(b) *Ist S eine zusammenhängende abelsche Untergruppe von G und x ein Element aus dem Zentralisator von S in G, so liegen x und S in einer geeigneten maximalen abelschen und zusammenhängenden Untergruppe von G.*

(c) *$\{gTg^{-1} | g \in G\}$ ist gleich der Menge aller maximalen abelschen und zusammenhängenden Untergruppen von G.*

(d) *Ist H eine kompakte Gruppe und $u: G \to H$ ein surjektiver stetiger Homomorphismus, so ist $u(T)$ eine maximale abelsche und zusammenhängende Untergruppe von H.*

Im folgenden sei T stets eine maximale abelsche und zusammenhängende Untergruppe der kompakten, zusammenhängenden Gruppe G.

(2.2) **Definition.** Ist $\mathrm{Nor}(T)$ der Normalisator von T in G, so heißt $\mathrm{Nor}(T)/T$ *Weylsche Gruppe* von G (diese ist nach (2.1)(c) unabhängig von der speziellen Wahl der Gruppe T).

Mit Hilfe von (2.1)(a) beweist man sofort, daß die Zusammenhangskomponente des Einselementes in $\mathrm{Nor}(T)$ mit T übereinstimmt, $\mathrm{Nor}(T)/T$ ist daher eine total unzusammenhängende Gruppe. Ferner gilt

(2.3) **Satz.** *Zwei Elemente $x, y \in T$ sind genau dann in $\mathrm{Nor}(T)$ konjugiert, wenn sie in G konjugiert sind.*

Beweis. Die eine Richtung ist trivial. Es gelte nun $y = g x g^{-1}$ mit $g \in G$. $Z_0(x)$ und $Z_0(y)$ seien die Zusammenhangskomponenten des Einselementes im Zentralisator von x bzw. y. Da x und y in T liegen, ist T sowohl in $Z_0(x)$ als auch in $Z_0(y)$ enthalten und somit maximale abelsche und zusammenhängende Untergruppe in den kompakten, zusammenhängenden Gruppen $Z_0(x)$ und $Z_0(y)$. Aus $g x g^{-1} = y$ erhält man $g Z_0(x) g^{-1} = Z_0(y)$. Daher ist $g T g^{-1}$ in $Z_0(y)$ enthalten und folglich eine weitere maximale abelsche und zusammenhängende Untergruppe von $Z_0(y)$, nach (2.1)(c) gibt es $w \in Z_0(y)$ mit $T = w g T g^{-1} w^{-1}$, $w g$ liegt also in $\mathrm{Nor}(T)$. Nun ist $(wg) x (wg)^{-1} = w g x g^{-1} w^{-1} = w y w^{-1} = y$, da w in $Z_0(y)$ liegt, und damit (2.3) bewiesen.

G operiert durch Konjugation stetig auf G, der Quotientenraum bezüglich dieser Operation sei mit $\mathrm{Konj}(G)$ bezeichnet. Ferner sei $\mathrm{Konj}(G)$ mit der Quotiententopologie bezüglich der natürlichen Abbildung $k: G \to \mathrm{Konj}(G)$ versehen, $\mathrm{Konj}(G)$ ist als Faktorraum nach der stetigen Operation einer kompakten Gruppe ein T_2-Raum. Die Weylgruppe W von G operiert durch Konjugation stetig auf T, mit u sei die natürliche Abbildung von T auf T/W bezeichnet. Ist i die Einbettung von T in G, so gibt es genau eine stetige Abbildung $h: T/W \to \mathrm{Konj}(G)$ mit $h \circ u = k \circ i$.

Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

(2.4) **Satz.** *h ist ein Homöomorphismus. Ist X ein topologischer Raum und $f\colon T \to X$ eine stetige, bei W invariante Abbildung (d.h. $f(g t g^{-1}) = f(t)$ für alle $g \in \mathrm{Nor}(T)$ und alle $t \in T$), so gibt es genau eine stetige Klassenabbildung F von G in X mit $F \circ i = f$.*

Beweis. Nach (2.1) (a) liegt in jeder Klasse konjugierter Elemente von G wenigstens ein Element aus T, h ist also surjektiv. Wegen (2.3) ist h auch injektiv, also bijektiv. Da nun h stetig, T/W quasikompakt und $\mathrm{Konj}(G)$ ein T_2-Raum ist, ist h ein Homöomorphismus. Aus der Invarianz von f bei W folgt, daß f über u faktorisiert, d.h. es gibt genau eine stetige Abbildung $\hat{f}$ von T/W in X mit $f = \hat{f} \circ u$. Die stetige Abbildung $F := \hat{f} \circ h^{-1} \circ k\colon G \to X$ ist offenbar die einzige Abbildung, die alle im Satz geforderten Eigenschaften besitzt.

Sei H eine kompakte Gruppe; für einen endlichdimensionalen komplexen Vektorraum V sei $\mathrm{Sp}\colon \mathrm{Aut}(V) \to \mathbf{C}$ stets die „Spur-Abbildung". Ist (V, f) ein H-Modul, so heißt $\mathrm{Sp} \circ f$ der Charakter von (V, f). Wie in der Einleitung bezeichne MH den Halbring der Isomorphieklassen aller H-Moduln, R sei stets der in der Einleitung angegebene Cofunktor. Da isomorphe H-Moduln denselben Charakter haben, gibt es eine kanonische Abbildung von MH in $C(H, \mathbf{C})$. Diese Abbildung ist sogar ein Halbringhomomorphismus und induziert daher einen Ringhomomorphismus $\mathrm{ch}\colon RH \to C(H, \mathbf{C})$. Es gilt nun (die Beweise für (2.5), (2.6) und (2.7) findet man etwa in [7], p. 169, 172):

(2.5) **Satz.** *RH wird als abelsche Gruppe frei von den Isomorphieklassen einfacher H-Moduln erzeugt. Der Ringhomomorphismus $\mathrm{ch}\colon RH \to C(H, \mathbf{C})$ ist ein Isomorphismus auf den Unterring von $C(H, \mathbf{C})$, der aus Funktionen der Form $\mathrm{Sp} \circ f_1 - \mathrm{Sp} \circ f_2$ besteht, wobei die f_i stetige Homomorphismen von H in die Automorphismengruppen endlichdimensionaler komplexer Vektorräume sind.*

(2.6) **Satz.** *$u\colon H \to L$ sei ein Morphismus in der Kategorie der kompakten Gruppen. Gibt es zu jedem $x \in L$ ein $y \in L$ mit $y x y^{-1} \in u(H)$, so ist $R u$ injektiv.*

(2.7) *Bemerkung.* Für kompakte abelsche Gruppen H kann man Näheres über die Struktur des Darstellungsringes RH aussagen. Dann ist nämlich jeder einfache H-Modul eindimensional und mithin sein Charakter nichts anderes als ein stetiger Homomorphismus von H in die Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrage 1. Wegen (2.5) ist dann RH der $\mathbf{Z}$-Gruppenring von $\mathrm{Ch}(H)$, wenn $\mathrm{Ch}(H)$ die Pontrjaginsche Charaktergruppe von H bezeichnet.

Sei nun wiederum T eine maximale abelsche und zusammenhängende Untergruppe einer kompakten, zusammenhängenden Gruppe G und W die Weylsche Gruppe von G. Im Sinne von (2.5) fassen wir RG resp.

RT als Unterring von $C(G, \mathbf{C})$ resp. $C(T, \mathbf{C})$ auf. Die Einbettung i von T in G induziert nach (2.6) und (2.1)(a) einen injektiven Ringhomomorphismus Ri von RG in RT, für $f \in RG$ ist dabei $Ri(f)$ nichts anderes als $f \circ i$. W operiert von links durch Konjugation auf T und daher von rechts (R ist ein Cofunktor) auf RT. RT^W sei der Unterring der bei dieser Operation invariant bleibenden Elemente, RT^W besteht also gerade aus denjenigen $f \in RT$ mit $f(g t g^{-1}) = f(t)$ für alle $t \in T$ und alle g aus dem Normalisator von T in G.

Verwendet man die eingeführten Bezeichnungen, so gilt

(2.8) **Satz.** $RT^W = Ri(RG)$.

Bemerkung. Obiger Satz ist für den Lieschen Fall bekannt (vgl. [1], p. 153). Hier wird lediglich gezeigt, wie man das allgemeinere Resultat aus dem Lieschen Fall gewinnt.

Beweis von (2.8). Die eine Inklusion ist trivial. Ist nämlich $f \in RG$, so gibt es nach (2.5) G-Moduln (V_1, f_1) und (V_2, f_2) mit $f = \mathrm{Sp} \circ f_1 - \mathrm{Sp} \circ f_2$. Aus der Homomorphie von f_1 und f_2 und der Tatsache, daß Sp eine Klassenabbildung ist, folgt sofort, daß auch f eine Klassenabbildung ist; $f \circ i$ liegt daher in RT^W.

Sei nun $f \in RT^W$. Es gibt dann T-Moduln (V_1, f_1) und (V_2, f_2) mit $f = \mathrm{Sp} \circ f_1 - \mathrm{Sp} \circ f_2$. Wir haben zu zeigen, daß die als stetige Klassenfunktion eindeutig existierende (nach (2.4)) Fortsetzung F von f auf G in RG liegt. Für $i = 1, 2$ ist $f_i(T)$ eine kompakte Untergruppe der Lieschen Gruppe $\mathrm{Aut}(V_i)$ und folglich ebenfalls eine Liesche Gruppe. Dann ist auch $T/(\mathrm{Kern}\, f_1 \cap \mathrm{Kern}\, f_2)$ eine kompakte Liesche Gruppe, darüber hinaus ist diese Gruppe abelsch und zusammenhängend und mithin ein Torus. Wendet man die Tatsache, daß Tori keine kleinen Untergruppen besitzen, auf $T/(\mathrm{Kern}\, f_1 \cap \mathrm{Kern}\, f_2)$ an, so bedeutet das: es gibt eine Einsumgebung U in G derart, daß für jede in $U \cap T$ enthaltende Untergruppe L gilt $L \subset \mathrm{Kern}\, f_1 \cap \mathrm{Kern}\, f_2$. In U ist nun ein abgeschlossener Normalteiler M enthalten mit der Eigenschaft, daß G/M eine Liesche Gruppe ist (vgl. etwa [9], p. 175). $M \cap T$ liegt dann in $\mathrm{Kern}\, f_1 \cap \mathrm{Kern}\, f_2$. Mit $p: G \to G/M$ sei der natürliche Homomorphismus bezeichnet. Nach Wahl von M gibt es stetige Homomorphismen $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ von $p(T)$ in $\mathrm{Aut}(V_1)$ bzw. $\mathrm{Aut}(V_2)$ mit $\tilde{f}_i(p(t)) = f_i(t)$ für $i = 1, 2$ und $t \in T$.

Wir zeigen später:

(1) *Es gibt* $\hat{F}: G/M \to \mathbf{C}$ *mit* $\hat{F} \circ p = F$.

(1)$\Rightarrow F \in RG$. Es genügt zu zeigen, daß $\hat{F}$ in $R(G/M)$ liegt, denn F ist nichts anders als $Rp(\hat{F})$. Nach (2.1) ist $p(T)$ eine maximale abelsche und zusammenhängende Untergruppe von G/M, $\hat{f}$ sei die Einschränkung von $\hat{F}$ auf $p(T)$. Da offenbar $\hat{f} = \mathrm{Sp} \circ \tilde{f}_1 - \mathrm{Sp} \circ \tilde{f}_2$ ist, liegt $\hat{f}$ in $R(p(T))$. Ferner ist mit F auch $\hat{F}$ eine Klassenfunktion, $\hat{f}$ ist folglich bei der Weylschen Gruppe von G/M invariant. Wendet man nun (2.8) auf die Liesche Gruppe G/M an, so ergibt sich – wie gewünscht – $\hat{F} \in R(G/M)$.

Zu (1). MT ist eine abgeschlossene Untergruppe von G, Z sei die Zusammenhangskomponente des Einselementes in MT.

T ist in Z enthalten und folglich eine maximale abelsche und zusammenhängende Untergruppe der kompakten, zusammenhängenden Gruppe Z. Die Einschränkung und Coeinschränkung $\hat{p}\colon Z \to p(T)$ von p auf Z bzw. $p(T)$ ist ein surjektiver stetiger Homomorphismus.

Für $i=1,2$ sei $\hat{f}_i := f_i \circ \hat{p}\colon Z \to \mathrm{Aut}(V_i)$, man verifiziert $\hat{f}_i(mt) = \hat{f}_i(t) = f_i(t)$ für $m \in M$ und $t \in T$ mit $mt \in Z$.

Wir haben zu zeigen:

Für $m \in M$ und $x \in G$ gilt $F(mx) = F(x)$. Es sei $x = gtg^{-1}$ für geeignetes $g \in G$ und $t \in T$ (vgl. (2.1)).

Da F eine Klassenfunktion ist, ergibt sich $F(x) = F(t)$ und $F(mx) = F(mgtg^{-1}) = F(g^{-1}mgt)$. Mit m liegt auch $g^{-1}mg$ in M; es genügt daher, die Gleichung $F(nt) = F(t)$ für $n \in M$ und $t \in T$ nachzuweisen. Es gelte $nt = hsh^{-1}$ mit $h \in G$ und $s \in T$. Dann ist $p(t) = p(h)p(s)p(h)^{-1}$, die Elemente $p(t)$ und $p(s)$ der maximalen abelschen und zusammenhängenden Untergruppe $p(T)$ von G/M sind konjugiert in G/M, also nach (2.3) bereits konjugiert im Normalisator von $p(T)$ in G/M. Dieser ist aber nichts anderes als das Bild des Normalisators von MT in G unter p. Wie man leicht nachprüft, ist der Normalisator von MT im Normalisator von Z enthalten. Daher gibt es ein y aus dem Normalisator von Z in G mit $p(t) = p(y)p(s)p(y)^{-1}$. Aus der letzten Gleichung folgt die Existenz eines $\hat{m} \in M$ mit $\hat{m}t = ysy^{-1}$. Da T in Z enthalten ist, liegen t und ysy^{-1} in Z, mithin auch $\hat{m}$. Nun ist T eine maximale abelsche und zusammenhängende Untergruppe in Z; $f\colon T \to \mathbf{C}$ ist eine stetige, bei der Weylschen Gruppe von Z (die ja Untergruppe von W ist) invariante Funktion, läßt sich also nach (2.4) als stetige Klassenfunktion eindeutig auf Z fortsetzen.

Die Einschränkung von F auf Z und $\mathrm{Sp} \circ \hat{f}_1 - \mathrm{Sp} \circ \hat{f}_2$ sind aber zwei derartige Fortsetzungen, folglich gilt

$$F(z) = (\mathrm{Sp} \circ \hat{f}_1 - \mathrm{Sp} \circ \hat{f}_2)(z) \qquad \text{für } z \in Z.$$

Daraus erhält man:

$$\begin{aligned} F(nt) &= F(hsh^{-1}) = F(s) = F(ysy^{-1}) = F(\hat{m}t) \\ &= (\mathrm{Sp} \circ \hat{f}_1 - \mathrm{Sp} \circ \hat{f}_2)(\hat{m}t) = (\mathrm{Sp} \circ f_1 - \mathrm{Sp} \circ f_2)(t) = f(t) = F(t). \end{aligned}$$

Damit ist (2.8) vollständig bewiesen.

Für das folgende benötigen wir ein rein algebraisches Lemma.

(2.9) **Lemma.** *Sei I ein Integritätsbereich, A eine torsionsfreie abelsche Gruppe und $I(A)$ der I-Gruppenring von A. Dann ist $I(A)$ ein Integritätsbereich, und die Gruppe der Einheiten von $I(A)$ ist gleich $\{ua \mid a \in A,\ u$ Einheit in $I\}$.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß $I(A)$ ein Integritätsbereich ist. Seien x und y zwei von Null verschiedene Elemente in $I(A)$. Wegen der Struktur von $I(A)$ liegen x und y in dem I-Gruppenring einer endlich erzeugten Untergruppe von A. Daher können wir o.B.d.A. annehmen, daß A selbst endlich erzeugt ist. Da A überdies torsionsfrei ist, ist A isomorph zu $\mathbf{Z}^n$ für geeignetes n; $a_1, \ldots, a_n$ sei eine Basis von A. Sind dann $x_1, \ldots, x_n$ Unbestimmte und wird mit I_n der von I und $\left\{x_1, \frac{1}{x_1}, \ldots, x_n, \frac{1}{x_n}\right\}$ erzeugte Unterring im Quotientenkörper des Polynomringes $I[x_1, \ldots, x_n]$ bezeichnet, so gibt es genau einen Isomorphismus von $I(A)$ auf I_n, der a_i auf x_i abbildet und I elementweise fest läßt. I_n ist aber ein Integritätsbereich.

Offenbar ist jedes Element der Form $u\,a$ ($a \in A$, *u Einheit in I*) eine Einheit in $I(A)$. Sei nun x eine Einheit in $I(A)$. Analog zu oben kann man schließen, daß x und x^{-1} in einem Unterring von $I(A)$ liegen, der isomorph zu I_n ist. Wir sind fertig, wenn wir die folgende Aussage (1) bewiesen haben.

(1) *Die Einheiten in I_n sind von der Form $u\,x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$, wobei u eine Einheit in I und $(k_1, \ldots, k_n)$ ein n-Tupel ganzer Zahlen ist.*

Beweis von (1) *durch Induktion über n.*

Induktionsanfang $n=1$. Ein einfacher Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung. Sei nun (1) für $n-1$ bewiesen und g eine Einheit in I_n. Dann kann man g auffassen als Element von $I_{n-1}\left[x_n, \frac{1}{x_n}\right]$. Da auch I_{n-1} ein Integritätsbereich ist, ist nach dem Induktionsanfang g von der Form $g = \hat{g}\,x_n^k$, wobei k eine ganze Zahl und $\hat{g}$ eine Einheit in I_{n-1} ist. Unter Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf $\hat{g}$ ergibt sich die Behauptung.

(2.10) **Satz.** *Der Darstellungsring RG einer kompakten, zusammenhängenden Gruppe G ist ein Integritätsbereich.*

Beweis. Nach (2.8) bzw. nach der Vorbemerkung zu (2.8) genügt es, den Satz für abelsches G zu beweisen. Die Pontrjaginsche Charaktergruppe $\mathrm{Ch}(G)$ ist wegen des Zusammenhangs von G torsionsfrei (vgl. [12], S. 31). Nach der Bemerkung (2.7) ist RG der $\mathbf{Z}$-Gruppenring von $\mathrm{Ch}(G)$, und dieser ist nach (2.9) ein Integritätsbereich.

(2.11) **Satz.** *G sei eine kompakte, zusammenhängende Gruppe. Faßt man RG wiederum als Unterring von $C(G, \mathbf{C})$ auf, so sind die Einheiten in RG von der Form $\pm f$, wobei f ein stetiger Homomorphismus von G in die Gruppe S der komplexen Zahlen vom Betrage 1 ist.*

Beweis. Ist f ein stetiger Homomorphismus von G in S, so ist $\pm f$ offenbar eine Einheit in RG.

Sei nun x eine Einheit in RG. Nach (2.5) gibt es endlichdimensionale komplexe Vektorräume V_1 und V_2 und stetige Homomorphismen f_i: $G \to \mathrm{Aut}(V_i)$ mit $x = \mathrm{Sp} \circ f_1 - \mathrm{Sp} \circ f_2$. Sei wiederum T eine maximale abelsche und zusammenhängende Untergruppe von G und i die Einbettung von T in G. Dann ist $x \circ i$ eine Einheit in RT, RT ist aber nach (2.7) nichts anderes als der $\mathbf{Z}$-Gruppenring der torsionsfreien abelschen Charaktergruppe $\mathrm{Ch}(T)$. Nach (2.9) gibt es folglich einen stetigen Homomorphismus h von T in S mit $x \circ i = \pm h$, wir können o.B.d.A. $x \circ i = +h$ annehmen, andernfalls führe man den Beweis mit $-x$ durch. Faßt man h auf als Homomorphismus von T in die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ der $\mathbf{C}$-linearen Automorphismen von $\mathbf{C}$ in sich (S sei kanonisch in $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ eingebettet), so ist $(\mathbf{C}, h)$ ein T-Modul. Wegen $\mathrm{Sp} \circ f_1 \circ i = \mathrm{Sp} \circ f_2 \circ i + h$ sind die T-Moduln $(V_1, f_1 \circ i)$ und $(V_2, f_2 \circ i) \oplus (\mathbf{C}, h)$ isomorph, insbesondere gilt $\det f_1(t) = \det f_2(t)\, h(t)$ für alle $t \in T$ (det bezeichne die Determinante). f: $G \to \mathbf{C}$ sei definiert durch $f(g) = \det f_1(g)/\det f_2(g)$, f ist ein stetiger Homomorphismus von G in S, insbesondere also eine Klassenfunktion.

Ferner gilt $f \circ i = x \circ i$. Da nun auch x eine Klassenfunktion ist, ergibt sich mit (2.4) $f = x$ und damit die Behauptung.

(2.12) *Bemerkung*. Nach (2.11) ist die Pontrjaginsche Charaktergruppe $\mathrm{Ch}(G/G')$ von G/G' (G' sei die Kommutatorgruppe von G) isomorph zur Gruppe der Einheiten von RG modulo einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2. Da man zeigen kann, daß G genau dann weg- bzw. lokalzusammenhängend ist, wenn G/G' die betreffende Eigenschaft besitzt, und sich diese topologischen Eigenschaften durch die algebraische Struktur von $\mathrm{Ch}(G/G')$ ausdrücken lassen, liefert der Darstellungsring RG Auskunft darüber, ob G weg- bzw. lokalzusammenhängend ist oder nicht.

Ferner wurde in [2], 4.2 und 4.4, gezeigt, daß der Darstellungsring einer kompakten, zusammenhängenden Lieschen Gruppe noethersch ist. Im nächsten Satz beweisen wir nun:

(2.13) **Satz.** *H sei eine kompakte Gruppe. Ist der Darstellungsring RH noethersch, so ist H eine Liesche Gruppe.*

Beweis. Wir zeigen: Ist H keine Liesche Gruppe, so ist RH nicht noethersch.

Induktiv kann man eine Folge von H-Moduln (V_n, f_n) mit

$$H = \mathrm{Kern}\, f_0 \supsetneqq \mathrm{Kern}\, f_1 \supsetneqq \cdots$$

konstruieren.

Sei etwa (V_0, f_0) der triviale eindimensionale Modul.

Sind dann $(V_0, f_0), \ldots, (V_n, f_n)$ mit $\mathrm{Kern}\, f_0 \supsetneqq \mathrm{Kern}\, f_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathrm{Kern}\, f_n$ bereits bestimmt, so gibt es ein vom Einselement verschiedenes Element x in $\mathrm{Kern}\, f_n$ (andernfalls wäre $\mathrm{Kern}\, f_n$ trivial und H im Widerspruch zu unserer Annahme eine Liesche Gruppe). Zu diesem x existiert dann ein H-Modul (W, k) mit $k(x) \neq 1_W$. Es sei $(V_{n+1}, f_{n+1}) := (V_n, f_n) \oplus (W, k)$, offenbar ist Kern f_{n+1} echt in Kern f_n enthalten.

Zur Abkürzung setzen wir $M_n := \operatorname{Kern} f_n$, ferner sei mit $i_n \colon M_n \to H$ der Inklusionshomomorphismus bezeichnet.

Wie stets werden wir auch im folgenden RH (und analog RM_n) als Unterring von $C(H, \mathbf{C})$ auffassen, für $f \in RH$ ist dann $R\, i_n(f)$ nichts anderes als $f \circ i_n$. Wir sind fertig, wenn wir gezeigt haben, daß die Ideale Kern $R\, i_n$ eine echt aufsteigende Folge bilden. Der Nachweis für „aufsteigend" ist trivial, es bleibt noch „echt" zu zeigen, d.h. es ist bei festem n ein $f \in RH$ mit $f \circ i_{n+1} = 0$, aber $f \circ i_n \neq 0$ anzugeben. Ist r die Dimension von V_{n+1}, so wähle $f := \operatorname{Sp} \circ f_{n+1} - r$. Offenbar ist $f \in RH$ und $f \circ i_{n+1} = 0$. Es gilt auch $f \circ i_n \neq 0$, denn wäre $f \circ i_n = 0$, so wäre der M_n-Modul $(V_{n+1}, f_{n+1} \circ i_n)$ zur trivialen Darstellung von M_n in V_{n+1} isomorph und folglich $f_{n+1} \circ i_n$ der triviale Homomorphismus, im Widerspruch zu der Tatsache, daß Kern f_{n+1} echt in M_n enthalten ist.

Literatur

1. Adams, J. F.: Lectures on Lie groups. New York: Benjamin 1969.
2. Atiyah, M. F., Hirzebruch, F.: Vector bundles and homogeneous spaces. Proceedings of Symposium in Pure Mathematics, vol. 3. Amer. Math. Soc. 1961.
3. Chevalley, C.: Theory of Lie groups. Princeton: University Press 1946.
4. Hochschild, G.: The structure of Lie groups. San Francisco: Holden-Day 1965.
5. Hofmann, K. H.: Introduction to the theory of compact groups, part I. Vorlesungsausarbeitung, New Orleans 1968.
6. Hofmann, K. H.: Introduction to the theory of compact groups, part II. Vorlesungsausarbeitung, New Orleans 1969.
7. Husemoller, D.: Fibre bundles. New York: McGraw-Hill 1966.
8. Kelley, J. L.: General topology. Princeton: Van Nostrand 1955.
9. Montgomery, D., Zippin, L.: Topological transformation groups. New York: Interscience Publishers 1955.
10. Poguntke, D.: Epimorphisms of compact groups are onto. Proc. Amer. Math. Soc. **26**, 503–504 (1970).
11. Pontrjagin, L. S.: Topologische Gruppen, Teil 1. Leipzig: Teubner 1958.
12. Pontrjagin, L. S.: Topologische Gruppen, Teil 2. Leipzig: Teubner 1958.

Dr. D. Poguntke
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
D-4800 Bielefeld
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 7. April 1972)