Über Einsatzmöglichkeiten von Restklassenkörpern im Bereich der Gleichungslehre, bei Körpererweiterungen und in der Geometrie

Von FRIEDHELM PADBERG

Mit 2 Abbildungen

Geht man neuere Schulbücher für die Sekundarstufe I durch, so findet man in den meisten von ihnen schon eine Behandlung von Restklassen. Allerdings bleibt man dort meist bei der Betrachtung der strukturellen Eigenschaften spezieller Restklassenmengen unter der Restklassenaddition oder -multiplikation stehen. Die Tatsache, daß die Restklassen unter diesen Verknüpfungen übersichtliche Modelle für die verschiedenartigsten algebraischen Strukturen (Halbgruppe, Gruppe, Ring, Integritätsring, Körper[1]*) bilden, ist sicher ein Grund, sie im Unterricht zu behandeln. Daneben kann man Restklassen aber auch noch bei einer größeren Anzahl anderer Gelegenheiten äußerst sinnvoll einsetzen, wie die folgenden Hinweise aufzeigen sollen.*

1. Lineare Gleichungen

1.1. Lineare Gleichungen der Form $a \cdot x = b$

Man kann Restklassenmengen R_m ausgezeichnet dazu benutzen, um die Frage untersuchen zu lassen, ob lineare Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ in beliebigen Verknüpfungsgebilden stets lösbar sind und wieviel Lösungen sie gegebenenfalls haben. Betrachten wir etwa das Verknüpfungsgebilde $\langle R_6, \cdot \rangle$, also die Menge aller Restklassen modulo 6 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ bezüglich der Restklassenmultiplikation[2]), so kann man erarbeiten lassen, daß einige lineare Gleichungen $a \cdot x = b$ über R_6[3]) unlösbar sind (z. B. $2 \cdot x = 3$), eindeutig lösbar sind (z. B. $1 \cdot x = 2$, $L = \{2\}$), mehrere Lösungen aufweisen (z. B. $3 \cdot x = 3$, $L = \{1, 3, 5\}$) oder sogar allgemeingültig über R_6 sind ($0 \cdot x = 0$). Betrachten wir dagegen dieselben Gleichungen über R_5, so stellen wir fest, daß dort alle oben genannten Gleichungen – außer $0 \cdot x = 0$ – eindeutig lösbar sind.

Fordern wir in $a \cdot x = b$ speziell, daß a und b beide ungleich 0 sind, gehen wir also über zu dem Verknüpfungsgebilde $\langle R_5 \setminus \{0\}, \cdot \rangle$, so verifiziert man leicht, daß in diesem Fall sogar alle linearen Gleichungen dieses Verknüpfungsgebildes eindeutig lösbar sind. Wir können als Ergebnis festhalten: in beliebigen Verknüpfungsgebilden sind lineare Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ keineswegs stets noch immer eindeutig lösbar, während es durchaus spezielle Verknüpfungsgebilde – wie etwa $\langle R_5 \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ – gibt, in denen alle linearen Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ eindeutig lösbar sind. Bezeichnen wir das Inverse (bzgl. $\cdot$) von a mit a^{-1}, so ist $a^{-1} \cdot b$ eine Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$; denn es gilt:

$$a \cdot (a^{-1} \cdot b) \overset{(1)}{=} (a \cdot a^{-1}) \cdot b \overset{(2)}{=} 1 \cdot b \overset{(3)}{=} b\,.$$

Damit also alle linearen Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ in einem Verknüpfungsgebilde lösbar sind, müssen wir für das Verknüpfungsgebilde speziell fordern, daß es (1) assoziativ ist, (2) daß es zu jedem Element ein Inverses besitzt, (3) daß es ein neutrales Element besitzt, daß es also eine Gruppe bildet. In Gruppen aber sind lineare Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ sogar eindeutig lösbar, wie sich unmittelbar aus der Eigenschaft der Regularität ergibt. Damit haben wir die Ursachen für das unterschiedliche Verhalten von $\langle R_6, \cdot \rangle$ und $\langle R_5 \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ gefunden: $\langle R_5 \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ bildet im Gegensatz zu $\langle R_6, \cdot \rangle$[4]) eine Gruppe. Da $\langle R_p \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ für alle Primzahlen p jeweils eine Gruppe bildet, während $\langle R_m, \cdot \rangle$ für zusammengesetzte Zahlen m keine Gruppe bildet, hätten wir beim einleitenden Beispiel statt $m = 6$ jede zusammengesetzte Zahl sowie beim folgenden Beispiel statt 5 auch jede andere Primzahl verwenden können.

1.2. Lineare Gleichungen der Form $a \cdot x + b = c$

Mit Hilfe von Restklassenmengen kann man aber auch gut erarbeiten lassen, welchen strukturellen Anforderungen Verknüpfungsgebilde genügen müssen, damit lineare Gleichungen der Form $a \cdot x + b = c$ stets lösbar oder auch stets eindeutig lösbar sind. Untersucht man lineare Gleichungen obiger Form wiederum über $\langle R_6, +, \cdot \rangle$, so stellt man fest, daß sie z. T. unlösbar, z. T. eindeutig lösbar sind oder auch mehrere Lösungen aufweisen (Beispiele: $2x + 1 = 4$; $L = \varnothing$; $5x + 5 = 1 \Rightarrow L = \{4\}$; $3x + 4 = 1 \Rightarrow L = \{1, 3, 5\}$). Gleiches gilt entsprechend für alle $\langle R_m, +, \cdot \rangle$, bei denen der Modul m eine zusammengesetzte Zahl ist. Dagegen sind alle linearen Gleichungen $a \cdot x + b = c$ mit $a \neq 0$ über $\langle R_5, +, \cdot \rangle$ – allgemein über $\langle R_p, +, \cdot \rangle$ mit p Primzahl – eindeutig lösbar. Der Unterschied rührt daher, daß $\langle R_m, +, \cdot \rangle$ für zusammengesetzte Zahlen m nur Ringstruktur, jedoch keine Körperstruktur aufweist, während die $\langle R_p, +, \cdot \rangle$ für alle Primzahlen p stets Körper bilden. Bezeichnen wir nämlich das multiplikativ Inverse zu a mit a^{-1}, das additiv Inverse zu b mit $-b$, ferner $c + (-b)$ mit $c - b$, so bildet $a^{-1}(c - b)$ eine Lösung obiger Gleichung; denn es gilt:

[1]) Man vgl. etwa: F. PADBERG: Elementare Zahlentheorie. 3. Aufl., – Freiburg: Herder 1976.

[2]) Für die Restklassenaddition bzw. -multiplikation werden wir im folgenden – aus Gründen besserer Lesbarkeit – statt der Zeichen »$\oplus$« und »$\odot$« einfach die Zeichen »+« und »·« benutzen. Aus demselben Grund werden wir auch für die Restklassen statt $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots$ kurz $0, 1, 2, \ldots$ schreiben.

[3]) Gehen die zugehörigen Verknüpfungsvorschriften aus dem Kontext klar hervor, so schreiben wir im folgenden statt $\langle R_m, \cdot \rangle$ bzw. $\langle R_m, +, \cdot \rangle$ meist nur kurz R_m.

[4]) $\langle R_6 \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ dagegen würde nicht einmal ein Verknüpfungsgebilde bilden, da es nicht abgeschlossen ist (Beispiel: $2 \cdot 3 = 0$)).

$$
\begin{aligned}
a[a^{-1}(c-b)] + b &= (aa^{-1})(c-b) + b \\
&= 1(c-b) + b \\
&= (c-b) + b \\
&= c + ((-b) + b) \\
&= c + 0 = c\,.
\end{aligned}
$$

Damit es also garantiert für jede lineare Gleichung $a \cdot x + b = c$ mit $a \neq 0$ mindestens eine Lösung gibt, müssen wir verlangen, daß in dem Verknüpfungsgebilde bezüglich beider Verknüpfungen das Assoziativgesetz gilt, es ein neutrales Element und zu jedem Element (außer der 0 bezüglich der Multiplikation) ein Inverses gibt, wie aus der obigen Gleichungskette hervorgeht. Diese Eigenschaften sind jedoch noch nicht in beliebigen Ringen, sondern erst in Körpern erfüllt. Wegen der dort gegebenen Regularität bezüglich beider Verknüpfungen ist dort dann sogar jede lineare Gleichung $a \cdot x + b = c$ eindeutig lösbar. Daß lineare Gleichungen $a \cdot x + b = c$ über R_m bei zusammengesetztem Modul m auch mehr als eine Lösung aufweisen können, rührt daher, daß diese Ringe Nullteiler besitzen. Bei Übergang speziell zu nullteilerfreien Ringen, also zu Integritätsringen, weisen diese Gleichungen nur noch höchstens eine Lösung auf. Dies können wir jedoch nicht an speziellen Restklassenmengen demonstrieren, da endliche Integritätsringe mit wenigstens 2 Elementen stets schon Körper bilden (vgl. [2]), dafür jedoch etwa an dem vertrauten Integritätsring $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen.

1.3. Gleichungskalkül

Aber nicht nur bei der gezielten Untersuchung der Elementanzahl der Lösungsmengen linearer Gleichungen können uns Restklassenringe nützlich sein, sondern auch bei der Behandlung des Gleichungskalküls. So kann man meines Erachtens mit ihrer Hilfe gut Aussagen über die Äquivalenzumformungen beim Lösen von Gleichungen finden und begründen lassen. Betrachten wir hierzu etwa die linearen Gleichungen

$$x + 2 = 0\,,\quad 2x + 1 = 0\,,\quad x + 1 = 2\,,$$
$$x + 0 = 1 \quad \text{und} \quad 2x + 2 = 1$$

über dem Restklassenkörper R_3, so stellt man durch Einsetzen leicht fest, daß sie alle dieselbe Lösungsmenge, nämlich $\{1\}$, haben, daß sie also äquivalent sind. Durch die Frage, ob und gegebenenfalls wie diese äußerlich verschiedenen Gleichungen miteinander zusammenhängen, stößt man rasch zu Vermutungen über Äquivalenzumformungen vor.

Da es jedoch über R_3 insgesamt nur 18 lineare Gleichungen $ax + b = c$ (mit $a \neq 0$) gibt, die alle $L_1 = \{0\}$ bzw. $L_2 = \{1\}$ bzw. $L_3 = \{2\}$ als Lösungsmenge haben, die also alle äquivalent zu $x = 0$ bzw. $x + 2 = 0$ bzw. $x + 1 = 0$ sind, überschaut man hier rasch sämtliche möglichen Äquivalenzumformungen. Diese kann man anschließend an linearen Gleichungen über dem Restklassenkörper R_5 weiter verifizieren und abklären lassen, um so schließlich zu Regeln für Äquivalenzumformungen über dem Körper $\mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{R}$) der rationalen (bzw. reellen) Zahlen hinzuführen. Hierbei bietet die Betrachtung von linearen Gleichungen $ax + b = c$ über endlichen Restklassenkörpern R_p gegenüber einer Betrachtung über den unendlichen Körpern $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ den offensichtlichen Vorteil, daß man wegen der kleinen Grundmenge und der nur geringen Anzahl von Gleichungen jeweils leicht jede Klasse zueinander äquivalenter linearer Gleichungen vollständig überschaut und somit leicht sämtliche äquivalenten Umformungen erarbeiten kann.

Aber auch zur Abklärung der einzelnen Schritte, die man beim Lösen einer linearen Gleichung durchführt, eignen sich die Restklassenkörper R_p ausgezeichnet, wie wir dem folgenden Beispiel einer linearen Gleichung über R_5 entnehmen können:

$$3x + 2 = 1$$

Addition des (bzgl. »+«) Inversen von 2, also 3, auf beiden Seiten der Gleichung.

$$(3x + 2) + 3 = 1 + 3$$

Anwendung des Assoziativgesetzes; $2 + 3 = 0$; 0 neutrales Element bzgl. $+$; $1 + 3 = 4$.

$$3x = 4$$

Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit dem (bzgl. »·«) Inversen von 3, also mit 2.

$$2 \cdot (3x) = 2 \cdot 4$$

Anwendung des Assoziativgesetzes; $2 \cdot 3 = 1$; 1 neutrales Element bzgl. »·«; $2 \cdot 4 = 3$.

$$x = 3$$
$$L = \{3\}\,.$$

Der Vorteil der Restklassenkörper: man muß sich beim Lösungsverfahren die einzelnen Lösungsschritte ganz bewußt machen und kann hiermit sicherlich eine zu frühzeitige, sinnentleerte Automatisierung des Lösungsverfahrens (»auf die andere Seite schaffen« u. ä.) vermeiden[5]). So bedeutet die übliche Subtraktion beim Lösungsverfahren eine Addition des Additiv-Inversen, die übliche Division eine Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit dem Multiplikativ-Inversen. Hierbei kann man meines Erachtens die Behandlung des Lösungsverfahrens linearer Gleichungen über Restklassenkörpern entweder parallel zur Behandlung des entsprechenden Verfahrens über $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ oder im Anschluß an diese Behandlung über $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ als Rückblick und Vertiefung durchführen.

[5]) Analog verhält man sich heute bekanntlich auch bei der Behandlung von Stellenwertsystemen, wo man neben dem Dezimalsystem auch nichtdezimale Stellenwertsysteme behandelt.

2. Quadratische Gleichungen

Aber nicht nur bei linearen, auch bei quadratischen Gleichungen lassen sich Restklassenkörper im Unterricht mit Gewinn einsetzen. So kann man etwa die Frage stellen, ob auch quadratische Gleichungen, also Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = d \text{ mit } a, b, c, d \in R_p,$$

über Restklassenkörpern R_p lösbar sind. Dazu betrachten wir zunächst als einfaches Beispiel die Gleichung $x^2 = d$ über R_5 und fragen, ob sie für $d \in R_5$ stets lösbar ist. Durch Einsetzen erhalten wir unmittelbar, daß diese Gleichung für $d = 0$ eindeutig lösbar ist, für $d = 1$ und $d = 4$ zwei Lösungen hat und für die beiden übrigen d-Werte aus R_5 unlösbar ist. Entsprechendes gilt sogar für alle Restklassenkörper R_p mit $p > 2$; denn wegen $(p-n)^2 \equiv p^2 - 2pn + n^2 \equiv n^2 \pmod{p}$ für $n \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ ergeben $p-n$ und n bei Einsetzung in $x^2 = d$ jeweils denselben d-Wert. Folglich sind $\frac{p-1}{2}$ Gleichungen über R_p (für $p > 2$)[6]) unlösbar, während der Rest lösbar ist und – mit Ausnahme von $d = 0$ – zwei Lösungen besitzt. Mithin sind generell bei quadratischen Gleichungen über Restklassenkörpern (mindestens) 3 Fälle zu unterscheiden, nämlich daß sie unlösbar sind, eindeutig lösbar sind oder zwei Lösungen haben. Diese drei auftretenden Fälle erinnern an die Elementanzahlen der Lösungsmengen quadratischer Gleichungen über $\mathbb{R}$ und legen die Frage nahe, ob es auch über Restklassenkörpern ein Analogon zur quadratischen Formel gibt. Versucht man analog zur Vorgehensweise über $\mathbb{R}$ über einem Restklassenkörper R_p eine entsprechende quadratische Formel abzuleiten, so bekommt man allerdings Schwierigkeiten mit dem Wurzelbegriff. In $\mathbb{R}$ definiert man bekanntlich für $a > 0$ $\sqrt{a}$ als die positive Zahl, die mit sich selbst multipliziert a ergibt, sowie $\sqrt{0} = 0$. Da jedoch die Restklassenkörper als endliche Körper nicht anordbar sind – $\mathbb{Q}$ bildet bekanntlich den kleinsten angeordneten Körper – können wir bei analoger Definition etwa im Restklassenkörper R_3 $\sqrt{1}$ nicht eindeutig einen Wert zuordnen; denn sowohl 1^2 wie 2^2 ergibt 1. Daher ist $\sqrt{1}$ bei dieser Definition als Zahlzeichen in $\langle R_3, +, \cdot \rangle$ nicht brauchbar; denn Zahlzeichen sind natürlich nur dann sinnvoll, wenn sie eindeutig eine Zahl benennen. Die für R_3 geschilderten Schwierigkeiten gelten entsprechend auch für alle Restklassenkörper R_p mit Primzahlmodulen $p > 2$. Auf diese Art kann man daher Restklassenkörper auch geeignet zur Problematisierung des Wurzelbegriffs einsetzen.

6) Im Fall $p = 2$ sind offensichtlich die beiden Gleichungen eindeutig lösbar.

3. Körpererweiterungen

Wie wir schon in Abschnitt 2 feststellten, sind quadratische Gleichungen über Restklassenkörpern keineswegs stets lösbar. Betrachten wir im folgenden speziell die (insgesamt 18) quadratischen Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$[7]) mit $a \neq 0$ über R_3, so gibt es dort insgesamt 6 unlösbare Gleichungen, nämlich $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + x + 2 = 0$ und $x^2 + 2x + 2 = 0$ sowie die hieraus durch Multiplikation beider Seiten mit 2 hervorgehenden Gleichungen. Analog wie man (im Oberstufenunterricht) alle quadratischen Gleichungen über $\mathbb{R}$ (und nicht nur diese) durch Übergang zu dem Erweiterungskörper der komplexen Zahlen lösbar macht, so wollen wir im folgenden aufzeigen, wie wir auch zu R_3 einen Erweiterungskörper finden können, so daß dort auch alle quadratischen Gleichungen über R_3 lösbar sind. Der aufzuzeigende Weg soll zu einem vertieften Verständnis für Körpererweiterungen führen, da diese Körpererweiterung hier – im Gegensatz zur Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ – an einem endlichen und gut überschaubaren Körper durchgeführt wird.

Entsprechend der Vorgehensweise bei der Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ greifen wir eine der in R_3 unlösbaren Gleichungen, etwa $x^2 + 1 = 0$, heraus und führen – analog zur imaginären Zahl i als Lösung von $x^2 + 1 = 0$ dort – hier die R_3-imaginäre Zahl j (in einem umfassenden, noch zu konstruierenden Körper) ein mit der Eigenschaft $j^2 + 1 = 0$ bzw. $j^2 = 2$. Entsprechend zu $\mathbb{C}$ bezeichnen wir auch die – insgesamt 9 – Zahlen $a + bj$ mit $a, b \in R_3$ als R_3-komplexe Zahlen und definieren eine Addition und Multiplikation R_3-komplexer Zahlen durch:

$$(a + bj) + (c + dj) := (a + c) + (b + d)j$$

$$(a + bj) \cdot (c + dj) := (ac + 2bd) + (ad + bc)j.$$

Die Menge der R_3-komplexen Zahlen bildet unter den beiden vorstehend eingeführten Verknüpfungen einen Körper, wie man etwa durch Aufstellen der zugehörigen Verknüpfungstafeln bzw. durch Rückgriff auf entsprechende Eigenschaften von R_3 leicht verifizieren kann. Dieser Körper umfaßt als Erweiterungskörper unseren Ausgangskörper R_3, wenn wir $0 + 0 \cdot j$, $1 + 0 \cdot j$ bzw. $2 + 0 \cdot j$ mit den Elementen 0, 1 bzw. 2 aus R_3 gleichsetzen.

Der Erweiterungskörper der R_3-komplexen Zahlen weist aber gerade die anfangs angesprochene Zielsetzung auf, daß nämlich in ihm alle quadratischen Gleichungen über R_3 lösbar sind.

So haben $x^2 + 1 = 0$ bzw. $2x^2 + 2 = 0$

7) Auf diese Form können wir alle quadratischen Gleichungen offensichtlich bringen.

die Lösungsmenge $L = \{j, 2j\}$,

$$x^2 + x + 2 = 0 \text{ bzw. } 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

die Lösungsmenge $L = \{1 + 2j, 1 + j\}$,

sowie $x^2 + 2x + 2 = 0$ bzw. $2x^2 + x + 1 = 0$

die Lösungsmenge $L = \{2 + j, 2 + 2j\}$.

So kann man m. E. die Körpererweiterung von R_3 zu den R_3-komplexen Zahlen im Oberstufenunterricht parallel zu der Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ behandeln, um so zu einem vertieften Verständnis für diese Körpererweiterung hinzuführen und um sie nicht als bloßen »Trick« erscheinen zu lassen oder man kann sie auch unabhängig davon (etwa wenn obige Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ nicht behandelt wird) dazu benutzen, um an einem übersichtlichen Beispiel das Prinzip einer einfachen Körpererweiterung abzuklären, wobei man dann etwa zur Abrundung noch eine entsprechende Untersuchung über dem Restklassenkörper R_5 anschließen könnte.

4. Lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme mit n Variablen ($n \geqq 2$)

Auch bei der Behandlung linearer Gleichungen und linearer Gleichungssysteme mit n Variablen ($n \geqq 2$) lassen sich Restklassenkörper gut parallel zur üblichen Behandlung über $\mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{R}$) zum Zwecke der Problematisierung verschiedener Fragestellungen einsetzen. So gibt es etwa über dem Körper R_2 insgesamt nur 6 lineare Gleichungen mit 2 Variablen $ax + by = c$, mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ im Gegensatz zu den unendlich vielen entsprechenden Gleichungen über $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$. Ihre Lösungsmengen, die jeweils nur aus 2 Elementen – nämlich 2 geordneten Paaren – bestehen, lassen sich in einem kartesischen Koordinatensystem übersichtlich darstellen und gestatten es so auf einem Blick zu überschauen, daß die Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme mit 2 Variablen über R_2 nur 2 verschiedene Elementanzahlen aufweisen, nämlich 0 bzw. 1. Oder betrachten wir den Restklassenkörper R_3, so stellen wir fest, daß jede lineare Gleichung $ax + by = c$ (mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$) über R_3 genau 3 Lösungen hat. Bei einer entsprechenden graphischen Veranschaulichung (auf eine mögliche geometrische Deutung dieser Darstellung gehen wir im letzten Abschnitt ein) wie bei R_2 können wir auch hier leicht sehen, daß es insgesamt nur 3 verschiedene Elementanzahlen für die Lösungsmengen der zugehörigen linearen Gleichungssysteme gibt, nämlich 0, 1 oder 3.

Daneben lassen sich lineare Gleichungssysteme über Restklassenkörpern gerade aber auch bei der Behandlung des *Eliminationsverfahrens* für lineare Gleichungssysteme mit Gewinn einsetzen, wie das folgende *Beispiel* eines linearen Gleichungssystems mit 3 Variablen über R_7 demonstriert:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Dieses System ist wegen $-4 = 3$ und $-3 = 4$ gleichbedeutend mit:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit 5 und anschließend Addition des fünffachen bzw. zweifachen dieser Gleichung zur zweiten bzw. dritten Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 6 \\ 0x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 0x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Multiplikation der zweiten Gleichung mit 5 und anschließend Addition des dreifachen bzw. vierfachen dieser Gleichung zur ersten bzw. dritten Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 0x_1 + x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Multiplikation der dritten Gleichung mit 5 und anschließend Addition des vierfachen dieser Gleichung zur ersten bzw. zweiten Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 5 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 &= 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

also: $L = \{(5, 1, 4)\}$.

Man erkennt an diesem Beispiel: das Prinzip des Eliminationsverfahrens läßt sich ebenso gut an linearen Gleichungssystemen über Restklassenkörpern einführen, wobei man hierbei sich jeden einzelnen Umformungsschritt sehr bewußt vergegenwärtigen muß und so einer zu frühzeitigen, gedankenlosen Automatisierung des Lösungsverfahrens entgegenwirken kann. Vor allem aber ist der Rechenaufwand hierbei wesentlich geringer als bei den meisten linearen Gleichungssystemen über $\mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{R}$), da die dort störenden Brüche hier völlig vermieden werden.

Restklassenkörper können weiterhin als endliche *Vektorraummodelle*[8]) nützlich sein und so für viele Aussagen der linearen Algebra eine induktive Basis zur Verfügung stellen. So umfaßt der Vektorraum $R_3 \times R_3$ über R_3 etwa nur 9 Elemente oder der Vektorraum $R_2 \times R_2 \times R_2$ über R_2 nur 8 Elemente. An derartigen – gut überschaubaren – endlichen Vektorraummodellen mit nur wenigen Vektoren als Elementen lassen sich Begriffe wie Untervektorraum, Er-

[8]) Man vgl. F. Padberg: Einführung in die lineare Algebra (Lineare Gleichungssysteme/Vektorräume). – Freiburg: Herder 1976.

zeugendensystem, Basis und Dimension gut einführen und Vermutungen über – für Vektorräume generell – gültige Sätze gewinnen und für diese speziellen Vektorräume sogar durch eine vollständige Ausschöpfung der verschiedenen möglichen Fälle beweisen.

5. Affine ebene Inzidenzgeometrien

Nachdem wir bisher Einsatzmöglichkeiten von Restklassenkörpern an Beispielen aus dem Bereich der Algebra betrachtet haben, wollen wir in diesem letzten Abschnitt verdeutlichen, daß Restklassenkörper auch im Bereich der Geometrie von Nutzen sein können. So kann man die geometrische Veranschaulichung der Lösungsmengen linearer Gleichungen mit 2 Variablen über Restklassenkörpern R_p speziell für $p = 2$ und $p = 3$ bei geeigneter Interpretation auch als Modelle affiner ebener Inzidenzgeometrien der Ordnung 2 bzw. 3 deuten und von diesen anschaulichen Modellen her Hinweise auf einige interessante Sätze über endliche affine ebene Inzidenzgeometrien gewinnen. Bezeichnet man – entsprechend den Verhältnissen in $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbf{R}$ – den Graph einer linearen Gleichung $ax + by = c$ (mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$) (in einem kartesischen Koordinatensystem) als »Gerade« und jedes Lösungs-2-tupel als »Punkt« und heben wir die verschiedenen »Geraden« dadurch hervor, daß wir die beiden Punkte jeder »Geraden« durch einen Strich verbinden, so erhalten wir für die Lösungsmengen der linearen Gleichungen $ax + by = c$ (mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$) über R_2 Abbildung 1.

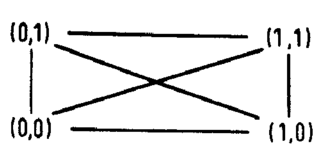

Abb. 1

Dieses Bild besteht aus 4 »Punkten« und 6 »Geraden«, wobei jede »Gerade« durch genau 2 »Punkte« geht. Durch jeden Punkt verlaufen 3 »Geraden«. Nennt man in diesem Bild (Modell) – entsprechend den Verhältnissen in $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbf{R}$ – 2 Geraden parallel, wenn es keinen Punkt gibt, der auf beiden Geraden liegt, so gilt für dieses Modell das Parallelenaxiom[9]). Es gibt hier drei Scharen von Parallelen mit jeweils zwei Parallelen. Obiges Bild ist ein Minimalmodell für eine endliche, affine, ebene Inzidenzgeometrie[10]).

[9]) Dies bedeutet, daß es zu einer gegebenen Geraden g und einem Punkt P, der nicht auf g liegt, genau eine Gerade h durch P gibt, die g nicht »schneidet«, d. h. die keinen Punkt mit g gemeinsam hat.

[10]) Eine Geometrie mit den Mengen P (Punkte), G (Geraden) mit $P \cap G = \varnothing$ und mit einer Inzidenzrelation bezeichnen wir hierbei als ebene affine Inzidenzgeometrie, wenn gilt:

1. Zu 2 verschiedenen Punkten P und Q gibt es genau eine Gerade g, die mit beiden Punkten inzidiert.
2. Zu einer Geraden g und einem Punkt P, der nicht mit g inzidiert, gibt es genau eine Gerade h, die mit P inzidiert und zu g parallel ist (Parallelenaxiom).
3. Es gibt 3 verschiedene Punkte P, Q, R, die nicht mit einer Geraden inzidieren.

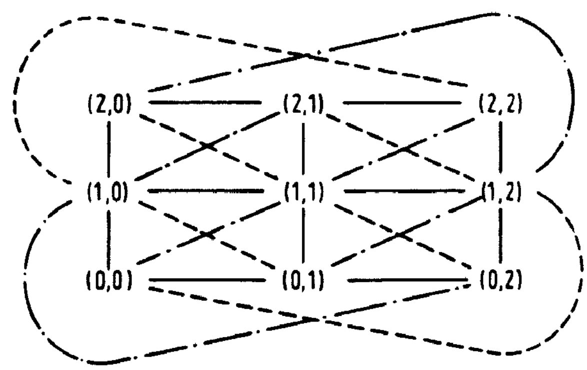

Abb. 2

Veranschaulichen wir entsprechend die Lösungsmengen linearer Gleichungen $ax + by = c$ (mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$) über R_3, so erhalten wir Abbildung 2.

Da die 3 Axiome erfüllt sind, handelt es sich um ein Modell einer endlichen, affinen, ebenen Inzidenzgeometrie. Dieses Modell besteht aus 9 »Punkten« und 12 »Geraden«. Jede »Gerade« verläuft jeweils durch genau 3 »Punkte«, daher handelt es sich um ein Modell einer affinen, ebenen Inzidenzgeometrie der Ordnung 3[11]). Das Modell besteht aus 4 Parallelenscharen zu je 3 Parallelen (die in der Zeichnung jeweils durch einheitliche Signatur hervorgehoben sind). Durch jeden »Punkt« verlaufen genau 4 »Geraden«. Je 2 »Geraden« schneiden sich jeweils in einem Punkt oder sind parallel.

Die Lösungsmengen linearer Gleichungen $ax + by = c$ (mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$) sind auch über Restklassenkörpern R_p mit $p > 3$ bei einer entsprechenden Interpretation als Modelle für endliche, affine, ebene Inzidenzgeometrien deutbar, wobei allerdings eine geometrische Veranschaulichung in diesem Fall problematisch ist.

Betrachten wir abschließend die beiden vorstehend behandelten affinen, ebenen Inzidenzgeometrien der Ordnung 2 bzw. 3 auf Gemeinsamkeiten hin, so wird man leicht zu einigen (richtigen) Vermutungen über Sätze geführt, die generell für endliche, affine, ebene Inzidenzgeometrien gelten, so etwa zu den folgenden 6 Sätzen:

In jeder endlichen, affinen, ebenen Inzidenzgeometrie der Ordnung n gilt:

(1) Es gibt genau n^2 »Punkte«,
(2) es gibt genau $n^2 + n$ »Geraden«,
(3) jeder »Punkt« inzidiert mit genau $n + 1$ »Geraden«,
(4) mit jeder »Geraden« inzidieren genau n »Punkte«,
(5) es gibt genau $n + 1$ Scharen von je n Parallelen,
(6) zwei »Geraden« g und h haben nicht mehr als einen »Punkt« gemeinsam.

[11]) In einer endlichen, affinen, ebenen Inzidenzgeometrie heißt die Anzahl n der Punkte einer beliebigen Geraden die Ordnung n der Inzidenzgeometrie.

Für die Einsatzmöglichkeiten dieses Stoffgebietes im Unterricht gibt es zwei Möglichkeiten: entweder man behandelt die oben genannten Modelle im Zusammenhang mit den entsprechenden Aussagen der euklidischen Geometrie, um die dort oft so selbstverständlich erscheinenden Aussagen etwas zu problematisieren oder man benutzt die Modelle als eine anschauliche Einführung in die endliche, affine, ebene Inzidenzgeometrie.

Literatur

[1] S. J. GRANT – W. R. STEWART: Complex modular numbers: complex numbers need not to be complex. – The Mathematics Teacher **69** (1976) 53–54.

[2] F. PADBERG: Algebraische Strukturen für Studenten und Lehrer der Primar- und Sekundarstufe I. – Ratingen: Henn 1973.

[3] F. PADBERG: Elementare Zahlentheorie. 3. Aufl. – Freiburg: Herder 1976.

[4] F. PADBERG: Einführung in die lineare Algebra (Lineare Gleichungssysteme/Vektorräume). – Freiburg: Herder 1976.

[5] M. SWADENER: A finite field as a facilitator in algebra and geometry classes. – The Mathematics Teacher **68** (1975) 271–275.

[6] H. ZEITLER: Abbildungen affiner Inzidenzebenen. – MU **16** (1970) 19–38.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. F. Padberg, Bretonische Straße 242, 4800 Bielefeld 12

Ein Vorschlag zur Behandlung des Heißluftmotors und der Wärmepumpe

Von WALTER WITZEL

Mit 5 Abbildungen

Ziel dieses Artikels ist es, einige Gründe für eine Unterrichtssequenz »Heißluftmotor und Wärmepumpe« in Klasse 11 zu nennen und einen möglichen Unterrichtsverlauf zu skizzieren.

1. Didaktische Vorüberlegungen

Die Stoffülle der Physik-Lehrpläne der Oberstufe ist allgemein bekannt. Daher ist es notwendig, bei neuen Inhalten oder Wahlgebieten genauer zu begründen, warum diese in den Unterrichtskanon aufgenommen werden sollen. Derartige Begründungen können auf mehreren Ebenen geführt werden: Einerseits läßt sich ein Unterrichtsinhalt z. B. dadurch rechtfertigen, daß ihm innerhalb der Fachsystematik eine bedeutende Stellung zukommt. Andererseits lassen sich Themen auch dadurch begründen, daß der Lernende durch die Beschäftigung mit Ihnen Qualifikationen erwirbt, die er im späteren Leben benötigt. Darüberhinaus muß bei jedem Inhalt geprüft werden, inwieweit er den Interessen der Lernenden entspricht.

Für das Thema »Heißluftmotor und Wärmepumpe« lassen sich derartige Begründungen wie folgt führen: Fachlich handelt es sich hier um die Anwendung thermodynamischer Kreisprozesse zur gegenseitigen Umwandlung von mechanischer Energie und Wärme. Insofern läßt sich an diesem Thema ein zentraler Punkt der Oberstufenphysik demonstrieren, nämlich der Energieerhaltungssatz. Die Äquivalenz von Wärme und mechanischer Energie kann innerhalb dieses Themengebietes besonders gut gezeigt werden, denn beide Energieumformungen (Wärme → mechanische Energie; und: mechanische Energie → Wärme) können an einem Versuchsaufbau demonstriert werden. Daher ist anzunehmen, daß sich der enge Zusammenhang dieser beiden Versuche bei den Schülern besonders gut einprägt.

Thermodynamische Kreisprozesse sind zwar für die Schule ein schwieriges Thema, aber innerhalb der Fachwissenschaft kommt ihnen große Bedeutung zu. Insofern ist es (zumindest für angehende Physiker und Techniker) gerechtfertigt, hiervon einen Spezialfall in der Schule zu behandeln.

Auch im Hinblick auf die Qualifizierung und die Interessen der Schüler läßt sich die Wahl des oben genannten Themas begründen: Gerade die anläßlich der sogenannten Ölkrise aufflammende Energiedebatte hat deutlich gemacht, wie wichtig die Suche nach Energieumwandlern mit nur geringen Verlusten ist. Um in einer derartigen Diskussion kompetente Urteile abgeben und um geeignete Handlungsstrategien wählen zu können, sollten die Schüler auch die bisher wenig bekannten Alternativen kennenlernen, wozu auch die unten beschriebenen Maschinen gehören. Außerdem ist zu erwarten, daß Schüler derartigen Maschinen Interesse entgegenbringen.

Diese hier skizzierten Begründungen sind nicht absolut zu sehen. Bei der Entscheidung über bestimmte Wahlthemen oder Unterrichtsschwerpunkte sind vielmehr alle in Frage kommenden Themen in dieser Weise zu befragen. Die endgültige Entscheidung kann dann nur aufgrund der Berücksichtigung der klassenspezifischen Bedingungen getroffen werden. Obige Argumente können also keinesfalls die universale Bedeutung dieses Themas beweisen. Es sollte hier nur versucht werden, einige Gedankengänge zu skizzieren, die im Rahmen eines solchen Entscheidungsprozesses über Ziele und Inhalte notwendig sind.

Die folgende Darstellung geht nicht vom Carnotschen Kreisprozeß aus, sondern von dem weniger bekannten Stirlingschen Kreisprozeß. Letzterer ist einfacher zu behandeln: Zum einen ist der mathematische