# Aktuelle Fragen und Themen der Didaktik

## EIN WEG ZUR EINFÜHRUNG DES GRUPPENBEGRIFFS IM UNTERRICHT

Von F. Padberg

Die algebraischen Strukturen sind erst relativ spät Unterrichtsgegenstand geworden. Noch vor 15 Jahren mußte der Gruppenbegriff um seine Berücksichtigung auf der Schule kämpfen, die Theorie der Gruppen wurde bestenfalls in Arbeitsgemeinschaften behandelt. (Sielaff, p IV). Heute hat sich die Situation (zumindest auf dem Papier) grundlegend geändert. So fordern die Empfehlungen und Richtlinien der Kultusministerkonferenz (zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen; Beschluß der KMK vom 3.10.1968) – die allerdings erst mit dem Beginn des nächsten Schuljahres schrittweise von der Grundschule aufwärts verbindlich werden sollen – schon für die Klasse 7 bzw. 8 unter dem Themenkreis "Kongruenzabbildungen" bei der Schiebung nach Einführung des Vektorbegriffs die Behandlung der Gruppeneigenschaften und bei der Verknüpfung von Kongruenzabbildungen die Behandlung einfacher endlicher Gruppen und Permutationen. Im Themenkreis "Algebraische Strukturen" wird ebenfalls für die 7. bzw. 8. Klasse die "Abstraktion (des Gruppenbegriffs) aus bekannten Modellen der Geometrie und Arithmetik" verlangt. Allerdings schlagen sich die Modernisierungsbestrebungen der KMK-Empfehlungen bislang erst am stärksten in den Schulbüchern der Grundschule nieder, während man in den Büchern der Sekundarstufe I und II deutlich merkt, wie die Reform langsam von unten her "durchwächst".

Sicher kann man bei der Einführung der algebraischen Strukturen nicht so vorgehen, wie einige von Steiner (p 6) zu Recht kritisierte Schulbücher der Mittelstufe, bei denen die Schüler den Gruppenbegriff von einem einzigen Beispiel, etwa der Gruppe der rationalen Zahlen ohne die Null bezüglich der Multiplikation, abstrahieren sollen und das

Abstraktum dann auch noch als "multiplikative" Gruppe bezeichnet wird. Vielmehr ist eine Einführung des Begriffs "Gruppe" nur dann sinnvoll möglich, wenn er zuvor an einer größeren Zahl verschiedenartiger Modelle inhaltlich erarbeitet worden ist. Sonst bleiben der Begriff "Gruppe" und die übrigen algebraischen Strukturbegriffe nur inhaltsleere, modische Vokabeln. Daher soll im folgenden ein Weg skizziert werden, w i e m a n d e n G r u p p e n b e g r i f f - entsprechend den KMK-Empfehlungen - i n d e n K l a s s e n 7 b z w. 8 e i n f ü h r e n k a n n:

Zunächst wird man aus einer Fülle verschiedenartiger Modelle den Verknüpfungsbegriff und den Begriff Verknüpfungsgebilde abheben und damit über den Bereich der Grundrechenoperationen hinaus verallgemeinern und präzisieren. Am günstigsten führt man die verschiedenen Modelle jeweils bei geeigneten Gelegenheiten ein und stellt eine Auswahl vor Beginn dieser Unterrichtsreihe wiederholend zusammen. In Anbetracht des häufig fachfremd erteilten Unterrichts auf der Unterstufe kann es sich jedoch auch als notwendig erweisen, daß man eine größere Zahl der Modelle zunächst am Beginn der Unterrichtsreihe neu einführen muß.

Diese verschiedenen V e r k n ü p f u n g s g e b i l d e wird man sodann gezielt auf bestimmte, z. T. von den natürlichen Zahlen ( $\mathbb{N}$) bzw. von den rationalen Zahlen ( $\mathbb{Q}$) her vertraute Eigenschaften (Assoziativität, Kommutativität, Existenz eines neutralen Elementes und eines inversen Elementes) hin untersuchen. So soll den Schülern klar werden, daß keineswegs alle Verknüpfungsgebilde "gleich" sind, sondern daß sie jeweils eine recht verschiedene Auswahl obiger Eigenschaften besitzen. Die Untersuchung einer größeren Zahl äußerlich völlig verschiedener Verknüpfungsgebilde bietet darüber hinaus überhaupt erst die Möglichkeit, daß Begriffe wie "Neutrales Element" und "Inverses Element" in ihrer breiten Allgemeingültigkeit erfaßt werden und nicht - wie sonst leicht - mit dem Element 0 oder 1 bzw. mit (-a) oder 1/a identifiziert werden. Hat man so auf breiter Basis und in hinreichender Allgemeinheit die einzelnen Bestandteile des Gruppenbegriffs erarbeitet, führt man abschließend den Begriff "Gruppe" ein und gewinnt aus den bereitgestellten Beispielen verschiedene Gruppenmodelle.

1. Verknüpfungen/Verknüpfungsgebilde

Um entsprechend unserer Zielsetzung die Begriffe "Verknüpfung in einer Menge" und "Verknüpfungsgebilde" in möglichst breiter Allgemeinheit erarbeiten lassen zu können, werden im folgenden eine größere Zahl von Modellen aus den verschiedensten mathematischen Bereichen bereitgestellt: 1)

(I) (1) $(\{+1, -1\}, \cdot)$
(2) $(\{1, 2, 4, 8\}, \text{ggT})$
(3) $(\{1, 2, 4, 8\}, \text{kgV})$
(4) $(\{1, 2, 4, 8\}, \bullet)$ mit $a \bullet b := b$
(5) $(N, \ast)$ mit $a \ast b := a^b$
(6) $(N, \blacksquare)$ mit $a \blacksquare b := (a+b)^2$
(7) $(N, \blacktriangle)$ mit $a \blacktriangle b := a + b^2$

Anmerkung: Das Bemühen, die Ergebnisse möglichst übersichtlich festzuhalten, ist eine geeignete Motivierung, an dieser Stelle - sofern nicht schon vorher, etwa in der Grundschule, geschehen - die "Ergebnistafeln" (später nennen wir sie nach Einführung des Begriffes "Verknüpfung" Verknüpfungstafeln") einzuführen.

(II) $R_n$ bezeichne die Menge der Restklassen mod n, $\oplus$ bzw. $\odot$ die übliche Restklassenaddition bzw. -multiplikation:

(8) $(R_2, \oplus)$
(9) $(R_3, \oplus)$
(10) $(R_4, \oplus)$
(11) $(R_4, \odot)$

(III) $M = \{a,b\}$ sei eine vorgegebene Menge, $P(M)$ die zugehörige Potenzmenge, d.h. die Menge aller Teilmengen von M, also $P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. Die Symbole $\cap$, $\cup$ und $\setminus$ bezeichnen die Operationen der Durchschnitts-, der Vereinigungs- und der Restmengenbildung:

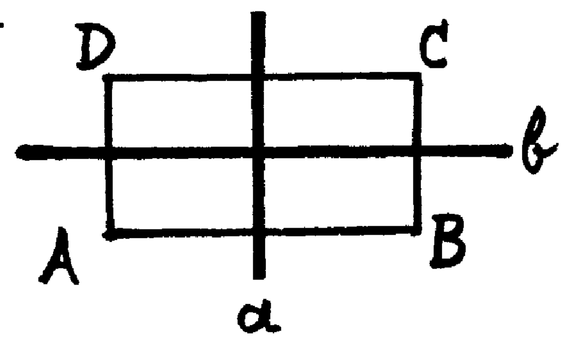
(12) $(P(M), \cap)$
(13) $(P(M), \cup)$
(14) $(P(M), \setminus)$

(IV) 1. Das Quadrat besitzt 4 Deckdrehungen, (und zwar die Drehungen im Gegenuhrzeigersinn um seinen Mittelpunkt um $0^\circ + n \cdot 360^\circ$, um $90^\circ + n \cdot 360^\circ$, um $180^\circ + n \cdot 360^\circ$

1) $(M, \bullet)$ bedeutet eine Menge, auf der eine Verknüpfung definiert ist. Auf die hier erwähnten Beispiele (1) bis (7) werden wir im folgenden öfters zurück verweisen.

und um $270^o + n \cdot 360^o$ (mit $n \in \mathbb{N}_o$, wobei $\mathbb{N}_o := \mathbb{N} \cup \{0\}$), im folgenden abgekürzt durch $D_0$, $D_{90}$, $D_{180}$ und $D_{270}$. Führt man zwei Deckdrehungen nacheinander durch, beispielsweise: zuerst $D_{90}$, dann $D_{180}$, symbolisch geschrieben: $D_{90} \circ D_{180}$, so läßt man anschließend nach einer Deckdrehung suchen, die dasselbe bewirkt. Man erhält $D_{270}$ und schreibt hierfür kurz: $D90 \circ D_{180} = D\ 270$.

2. Das Rechteck besitzt ebenfalls 4 Deckabbildungen, und zwar 2 Drehungen im Gegenuhrzeigersinn, um seinen Mittelpunkt: $D_0$ und $D_{180}$ sowie 2 Spiegelungen an den Achsen a und b, kurz geschrieben: $S_a$ und $S_b$. Auch hier kann man analog wie beim Quadrat eine Deckabbildung jeweils suchen lassen, die dasselbe leistet wie zwei hintereinandergeschaltete Deckabbildungen. Konkrete Bewegungen mit einem Papprechteck sind hierbei ggf. nützlich.




(15) ({Deckdrehungen des Quadrats}, Hintereinanderausführung)

(16) ({Deckabbildungen des Rechtecks}, Hintereinanderausführung)

(V) $P_2$ bezeichnet die Menge der eineindeutigen Abbildungen der Menge $\{1,2\}$ auf sich ("Permutationen"), also $P_2 = \left\{ \binom{12}{12}, \binom{12}{21} \right\}$ (hierbei steht in den Klammern jeweils in der unteren Zeile das Bild des darüberstehenden Elements) und $P_3$ entsprechend die Permutationen der Menge 1,2,3 , also

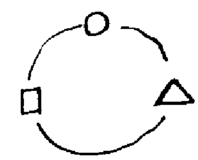
$$P_3 = \left\{ a := \binom{123}{123}, b := \binom{123}{132}, c := \binom{123}{213}, d := \binom{123}{231}, e := \binom{123}{312}, f := \binom{123}{321} \right\}.$$

Analog wie bei (IV) läßt man zu zwei hintereinander ausgeführten Permutationen, etwa

$c = \binom{123}{213}$ und $e = \binom{123}{312}$, eine Permutation suchen, die dasselbe leistet; in unserem Beispiel: erhält man $b = \binom{123}{132}$ und schreibt hierfür kurz: $c \circ e = b.$ [2)]

(17) ($P_2$, Hintereinanderausführung)
(18) ($P_3$, Hintereinanderausführung)

(VI) 1. Wir legen 3 verschiedene Plättchen etwa in der folgenden Form auf den Tisch (Ausgangszustand): Drei verschiedene Befehle werden gegeben, die mit diesen Plättchen auszuführen sind:



1. Tue nichts (N), 2. Verschiebe jedes Plättchen rechts herum um einen Platz (R), 3. Verschiebe jedes Plättchen links herum um einen Platz (L). Wiederum läßt man zu 2 nacheinander ausgeführten Befehlen, etwa zunächst R, dann L, nach einem Befehl suchen, der dasselbe leistet. In diesem Fall erhält man N und schreibt hierfür kurz: $R \circ L = N$.

2. Mit Hilfe einer Menge runder und quadratischer Plättchen der Farben weiß und schwarz kann man bezüglich eines festen Ausgangszustandes ($\genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\square}$) folgende Befehle realisieren:

$\genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\square} \xrightarrow{\text{tue nichts (N)}} \genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\square}$; $\genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\square} \xrightarrow[\text{Farbe (Fa)}]{\text{ändere die}} \genfrac{}{}{0pt}{}{\bullet}{\blacksquare}$; $\genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\square} \xrightarrow[\text{Form (Fo)}]{\text{ändere die}} \genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\circ}$;

$\genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\square} \xrightarrow[\text{die Form (Ff)}]{\text{ändere die Farbe und}} \genfrac{}{}{0pt}{}{\blacksquare}{\bullet}$

Entsprechend wie oben läßt man auch hier zu 2 hintereinander ausgeführten Befehlen, etwa: erst: Fa, dann Fo, einen Befehl suchen, der dasselbe (bzgl. des festen Ausgangszustandes) bewirkt, und erhält Ff. In Symbolsprache schreibt man hierfür: $Fa \circ Fo = Ff$.

---

2) Hier steht die zuerst auszuführende Abbildung aus Gründen der Einheitlichkeit links. Allerdings wird dies in der Literatur nicht einheitlich gehandhabt.

"Befehlsspiele":

(19) ( $\{N, R, L\}$ , Hintereinanderausführung)
(20) ( $\{N, Fa, Fo, Ff\}$ , Hintereinanderausführung)

Ein Vergleich der aufgeführten Beispiele durch die Schüler läßt Gemeinsamkeiten bei allen Modellen erkennen:

So kommt in allen Beispielen eine - allerdings im Einzelfall recht unterschiedliche zusammengesetzte - M e n g e vor. An Elementen erkennen wir: Zahlen, Restklassen, Mengen, Abbildungen und Befehle. Je 2 Elemente einer dieser Mengen wird durch eine - im Einzelfall recht verschiedenartige - Z u o r d n u n g s v o r s c h r i f t wieder jeweils ein Element derselben Menge zugeordnet. An unterschiedlichen Zuordnungsvorschriften haben wir exemplarisch kennengelernt: Rechenoperationen wie Addition, Multiplikation, Potenzieren, kgV- und ggT-Bildung, Operationen mit Restklassen, Mengenoperationen wie Durchschnitts-, Vereinigungs- und Restmengenbildung, Hintereinanderschaltung von Abbildungen, Permutationen und Befehlen. Untersuchen wir anhand der "Ergebnistafeln" genauer diese Zuordnungen, so erkennen wir: J e d e m geordneten Elementepaar einer Menge wird hier durch die Zuordnungsvorschrift wieder g e n a u e i n Element d e r s e l b e n M e n g e zugeordnet.

Indem wir so von den speziellen Eigenschaften der Elemente der Menge sowie den Besonderheiten der Zuordnungsvorschriften und ihrer Symbolik abstrahieren, sind wir schon zu den Begriffen "Verknüpfung in einer Menge M" und "Verknüpfungsgebilde" vorgestoßen und haben sie hiermit von den Einzelbeispielen abgehoben. Wir können etwa festhalten:

Unter einer "V e r k n ü p f u n g i n e i n e r M e n g e M" versteht man eine Zuordnung, durch die jedem geordneten Elementepaar (a,b) mit $a \in M$ und $b \in M$ genau ein Element der Menge M zugeordnet ist. Ist "o" eine Verknüpfung in der Menge M, so nennt man (M, o), also die Menge M mit dieser Verknüpfung o, ein <u>Verknüpfungsgebilde</u>.

<u>Anmerkung</u>: Bei der Definition der "Verknüpfung in einer Menge M" ist zu beachten, daß wir verlangen, daß das Verknüpfungsergebnis wieder zur selben Menge M gehört. (Man sagt hierzu

auch: wir fordern, daß die Menge M bezüglich dieser Verknüpfung " a b g e s c h l o s s e n " ist.) So ist die Addition und Multiplikation eine "Verknüpfung" in der Menge der natürlichen Zahlen, nicht aber die Subtraktion und Division (Beispiel: 2 - 3 ergibt keine natürliche Zahl). Dagegen ist die Subtraktion eine Verknüpfung in der Menge der ganzen Zahlen (Z), die Division eine Verknüpfung in der Menge der rationalen Zahlen ohne die Null.

2. Assoziativgesetz

In der Menge der natürlichen Zahlen unter der Addition bzw. Multiplikation, gilt bekanntlich:

$(a+b)+c = a+(b+c)$ bzw. $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot (b\cdot c)$ für alle a, b, c N.

Es erhebt sich die Frage, ob auch analog

(A) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot (b\cdot c)$ für alle a, b in jedem beliebigen Verknüpfungsgebilde gilt.

Gehen wir unsere Beispiele durch, so finden wir folgende Verknüpfungsgebilde, in denen (A) nicht erfüllt ist, wie man durch Gegenbeispiele leicht zeigen lassen kann. Man vergleiche z.B. (5), (6), (7), (14).

Ferner ist (A) beispielsweise auch nicht erfüllt in den Verknüpfungsgebilden (Z, -) und $(Q\setminus\{0\}, :)$.

Kann man die Nichtgültigkeit von (A) schon durch Angabe eines Gegenbeispiels belegen, ist die Verifizierung der Gültigkeit von (A) didaktisch schwieriger. Liegen jedoch - wie hier geschehen - nur noch Modelle mit endlichen Mengen vor ((5) bis (7) sind bereits ausgeschieden), so kann man (A) direkt durch Einsetzen überprüfen.

Es ergibt sich, daß bei den übrigen aufgeführten Verknüpfungsgebilden (A) erfüllt ist. Daher gibt man Verknüpfungen mit der Eigenschaft (A) einen besonderen Namen:

Man nennt eine Verknüpfung o in einer Menge M a s s o z i a t i v, wenn für alle Elemente a, b, c von M gilt: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

3. Kommutativgesetz

In den Verknüpfungsgebilden $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N}, \cdot)$ gilt $a+b = b+a$ bzw. $a\cdot b = b\cdot a$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$.

Wir stellen die Frage, ob auch analog
(K) $a \circ b = b \circ a$ für alle a, b $\in$ M
in beliebigen Verknüpfungsgebilden (M, $\circ$) gilt. Gehen wir unsere Beispiele durch, so stoßen wir auf Verknüpfungsgebilde, bei denen (K) nicht erfüllt ist, wie wir leicht wiederum durch Gegenbeispiele belegen lassen können. Man vergleiche (4), (5), (7), (14), (18). Ebenso gilt nicht $a-b = b-a$, $a:b = b:a$.

Die übrigen aufgeführten Verknüpfungsgebilde besitzen die Eigenschaft (K), wie man anhand der Verknüpfungstafeln leicht überprüfen lassen kann. Hierzu braucht man nicht alle entsprechenden Verknüpfungen jeweils zu vergleichen, vielmehr erkennt man die Gültigkeit von (K) an der Spiegelsymmetrie der Verknüpfungstafel bezüglich der Hauptdiagonalen. Die Gültigkeit von (K) bei (6) ergibt sich unmittelbar durch Rückgriff auf die Gültigkeit von (K) in (N, +).

Wir führen für die Eigenschaft (K) von Verknüpfungen einen speziellen Namen ein:

Eine Verknüpfung o in einer Menge M heißt **kommutativ**, wenn für alle Elemente a, b von M gilt: $a \circ b = b \circ a$.

Die Frage stellt sich, ob eine assoziative Verknüpfung schon per se kommutativ ist bzw. umgekehrt. Untersuchen wir die gegebenen Verknüpfungen, so erhalten wir folgendes Bild:

| Verknüpfungsgebilde | Assoziativgesetz | Kommutativgesetz |
|---|---|---|
| (2) | ja | ja |
| (4) | ja | nein |
| (6) | nein | ja |
| (5) | nein | nein |

Deutlich wird sichtbar, daß das Assoziativ- und das Kommutativgesetz in einem Verknüpfungsgebilde völlig unabhängig voneinander sind.

## 4. Neutrales Element

In den Verknüpfungsgebilden ( $\mathbb{N}_0$, +) und ( $\mathbb{N}_0$, $\cdot$) gilt:
$a+0 = 0+a = a$ bzw. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ für alle $a \in \mathbb{N}_0$.

Es stellt sich die Frage, ob es analog in beliebigen Verknüpfungsgebilden $(M, \circ)$ ein festes Element - nennen wir es e - gibt, so daß gilt:

(N) $a \cdot e = e \cdot a = a$ für alle $a \in M$.

Mustern wir erneut unsere vorstehenden Verknüpfungsgebilde durch, so finden wir eine Reihe von Beispielen, bei denen (N) nicht erfüllt ist.

(4) $(\{1,2,4,8\} \bullet)$; (5) $(\mathbb{N}, \ast)$; (6) $(\mathbb{N}, \blacksquare)$; (7) $(\mathbb{N}, \blacktriangle)$; (14) $(P(M), \setminus)$.

Besonders interessant sind hierbei die Verknüpfungsgebilde (5) und (14); denn in beiden gibt es zwar ein Element a, so daß $a \cdot e = a$ für alle $a \in M$ - bei (5): die Zahl 1, bei (14): die leere Menge $\emptyset$ - , jedoch gilt für dieses Elemente e nicht $e \circ a = a$, für alle $a \in M$, wie man rasch überprüfen lassen kann.

Die übrigen unter Punkt 1 eingeführten Verknüpfungsgebilde besitzen, wie man anhand der Verknüpfungstafeln leicht feststellen kann, die Eigenschaft (N). Man gibt daher einem derartigen Element a einen besonderen Namen:

Ein Element e heißt in einem Verknüpfungsgebilde $(M, \circ)$ <u>neutrales Element</u>, wenn für jedes $a \in M$ gilt: $a \circ e = e \circ a = a$.

Gehen wir unsere Beispiele durch, so erkennen wir, welche verschiedenartigen Elemente "neutrales Element" sein können. Wir finden u.a. die Zahl 8, die Restklassen $\overline{0}$ und $\overline{1}$, die leere Menge $\emptyset$, die Drehung $D_0$ um $0^{\circ}$ oder den Befehl "Tue nichts!". Diese Vielfalt hilft die Gefahr bannen, daß die Schüler das neutrale Element mit der Zahl 0 oder der Zahl 1 identifizieren, und läßt sie so allmählich zu dem Begriff "neutrales Element" in seiner vollen Breite vorstoßen.

## 5. Inverses Element

In der Menge der ganzen Zahlen unter der Addition und der Menge der rationalen Zahlen (ohne Null) unter der Multiplikation, gibt es zu jedem Element der betreffenden Menge ein Element, so daß die Summe bzw. das Produkt das neutrale Element ergibt:

$a + (-a) = (-a) + a = 0$ bzw. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

Im folgenden wird man anhand der vorgegebenen Verknüpfungsgebilde die Frage untersuchen lassen, ob es analog in anderen Verknüpfungsgebilden $(M, \circ)$ mit dem neutralen Element e zu jedem Element a von M ein $a'$ von M gibt, so daß gilt:

$$(J) \quad a \circ a' = a' \circ a = e$$

Dabei nennen wir das Element $a'$ inverses Element von a.

Zunächst ist klar, daß wir nur die Verknüpfungsgebilde in Betracht zu ziehen brauchen, die ein neutrales Element besitzen. Aber auch bei diesen Verknüpfungsgebilden mit neutralem Element kann man anhand der gegebenen Beispiele interessante Unterschiede aufdecken lassen:

So besitzen unsere Beispiele (2) $(\{1,2,4,8\}, \text{ggT})$, (3) $(\{1,2,4,8\}, \text{kgV})$, (12) $(P(M), \cap)$ und (13) $(P(M), \cup)$ nur zu einem einzigen Element, nämlich zu dem neutralen Element, ein Inverses. Anhand der Definition des neutralen Elementes kann man rasch klären, daß das neutrale Element in allen Verknüpfungsgebilden ein inverses Element besitzt, nämlich sich selbst. Dagegen besitzt in unserem Beispiel (11) neben dem neutralen Element $\bar{1}$ auch noch die Restklasse $\bar{3}$ ein inverses Element, während die beiden übrigen Restklassen keine Inversen besitzen.

Die Beispiele (1), (8) bis (10) und (15) bis (20) schließlich weisen zu jedem Element ein Inverses auf. Folglich besitzen nur sie (unter unseren Beispielen) die Eigenschaft (J).

## 6. Gruppe

Gehen wir unsere Verknüpfungsgebilde durch, so erkennen die Schüler, daß nur ein Teil von ihnen sämtliche herausgestellten Eigenschaften (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Existenz eines neutralen Elementes, Existenz eines inversen Elementes zu jedem Element der Menge) aufweist. Da eine derartige Kombination von Verknüpfungseigenschaften bei "interessanten" algebraischen Strukturen im Bereich der Mathematik häufig auftritt, gibt man Verknüpfungsgebilden mit diesen Eigenschaften einen besonderen Namen und nennt sie kommutative Gruppe bzw. - wenn man auf die Kommutativität verzichtet - Gruppe. Wir halten dies in nachstehender Definition fest:

Man nennt ein Verknüpfungsgebilde $(M, \circ)$ Gruppe wenn gilt:

1. (Assoziativgesetz)
   Für alle a, b, c $\in$ M gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
2. (Neutrales Element)
   Es existiert in M (genau) ein Element e mit:
   $a \circ e = e \circ a = a$ für alle a $\in$ M
3. (Inverses Element)
   Zu jedem a $\in$ M gibt es (genau) ein Element $a' \in$ M mit
   $a \circ a' = a' \circ a = e$
   Gilt zusätzlich
4. (Kommutativgesetz)
   Für alle a, b $\in$ M gilt $a \circ b = b \circ a$, so nennen wir $(M, \circ)$
   eine **kommutative Gruppe**.

Anmerkung:

Auf die Forderung "genau" bei den Punkten 2 und 3 kann man verzichten; denn man kann ganz elementar zeigen, daß eine Verknüpfung in M höchstens ein neutrales Element besitzt und daß ein Verknüpfungsgebilde mit neutralem Element, in dem das Assoziative Gesetz gilt, höchstens ein inverses Element besitzt (vgl. etwa: Kristensen/Rindung, p 25/6). Da die Verifizierung der Gruppenaxiome in der schwächeren Formulierung (ohne "genau") leichter ist, sollte man sie benutzen.

Folglich sind folgende Verknüpfungsgebilde Gruppenmodelle:

a) kommutative Gruppenmodelle:

(1) $(\{+1, -1\}, \cdot)$

(8) bis (10) $(R_2, \oplus)$, $(R_3, \oplus)$, $(R_4, \oplus)$

(15) ({Deckdrehungen des Quadrats}, Hintereinanderausführung)

(16) ({Deckabbildungen des Rechtecks}, Hintereinanderausführung)

(17) ({Permutationen der Zahlen 1, 2}, Hintereinanderausführung)

(19) Befehlsspiel ({N, R, L}, Hintereinanderausführung)

(20) Befehlsspiel ({N, Fa, Fo, Ff}, Hintereinanderausführung).

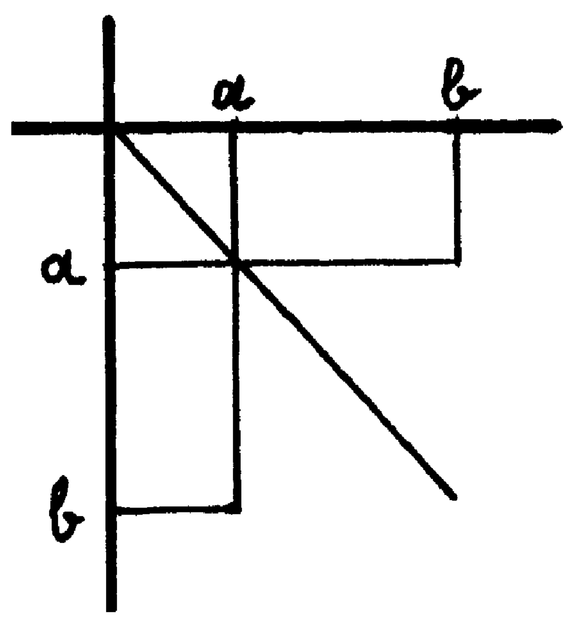
b) nicht kommutative Gruppenmodelle:

(18) ({Permutationen der Zahlen 1,2,3}, Hintereinanderausführung).

Die Frage, wie sich die charakteristischen Gruppenmerkmale in der Verknüpfungstafel niederschlagen, kann jetzt, da genügend Gruppenmodelle zur Verfügung stehen, durch Vergleich mit den Verknüpfungstafeln der übrigen Verknüpfungsgebilde geklärt werden

(neutrales Element e: die Spalte unterhalb von e und die Zeile neben e sind in unserer Verknüpfungstafel gleich und stimmen mit der oberen Zeile bzw. der linken Spalte unserer Tafel überein;
inverses Element: zu jedem a können wir ein b finden, so daß im Schnittpunkt der Spalte unterhalb von a und der Zeile neben b sowie der Spalte unterhalb von b und der Zeile neben a jeweils das neutrale Element e liegt und außerdem beide Schnittpunkte bezüglich der Hauptdiagonalen symmetrisch liegen:

| kgV | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 4 | 10 | 6 | 14 |
| 3 | 3 | 6 | 3 | 12 | 15 | 6 | 21 |
| 4 | 4 | 4 | 12 | 4 | 20 | 12 | 28 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 5 | 30 | 35 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 12 | 30 | 6 | 42 |
| 7 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 7 |




kommutatives Gesetz: die Elemente in der Verknüpfungstafel sind spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen angeordnet; außerdem: in jeder Zeile und in jeder Spalte kommt jedes Element der Gruppe genau einmal vor.)

Nachdem jetzt der Gruppenbegriff an verschiedenen endlichen Modellen hinreichend abgeklärt ist, können auch sinnvoll die bislang behandelten (unendlichen) Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ nebst Teilmengen bezüglich der Addition und Multiplikation daraufhin untersucht werden, ob sie Gruppen bilden.

## 7. Ausblick

Im weiteren Verlauf des Unterrichts werden wir uns nicht damit begnügen, vorgegebene Verknüpfungsgebilde zu untersuchen, ob sie Gruppen bilden oder nicht, also eine Art "Gruppenerkennungsdienst" zu spielen, vielmehr werden wir anhand unserer Gruppenmodelle Vorarbeiten zur Einführung der Begriffe "erzeugendes Element", "Untergruppe" und "Isomorphie (von Gruppen)" leisten.

In der Oberstufe schließlich kann die algebraische Struktur Gruppe wegen ihres einfachen und übersichtlichen Axiomensystems sehr gut als Beispiel dazu herangezogen werden, um die axiomatische Methode in der Mathematik exemplarisch zu verdeutlichen.

### Literaturhinweise:

Andelfinger/Nestle: Wege zu einer neuen Schulmathematik, Freiburg 1967

P. S. Alexandroff, Einführung in die Gruppentheorie, Berlin 1971

Dienes/Golding: Gruppen und Koordinaten, Freiburg 1970

Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen. Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 3.10.1968

Grossman/Magnus: Gruppen und ihre Graphen, Stuttgart 1971

E. Kristensen/0. Rindung: Eine Einführung des Gruppenbegriffs im Unterricht, in: Der Mathematikunterricht, 2/1966, p 19 - 38

J. Lauter: Gruppentheorie im Arithmetikunterricht der Mittelstufe, in: Der Mathematikunterricht, 2/1966, p 67 - 79

H. Schroeder: Die Bedeutung des Gruppenbegriffs für den Mathematikunterricht an den Gymnasien, in: Der Mathematikunterricht im Gymnasium, Hannover 1967, p 187 - 214

H. - G. Steiner: Einfache Verknüpfungsgebilde als Vorfeld der Gruppentheorie, in: Der Mathematikunterricht, 2/1966, p 5 - 18