# Dezimalbrüche – problemlos und leicht?

*Verfasser: Prof. Dr. Friedhelm Padberg, Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Universitätstraße, 4800 Bielefeld*

*Klagen über den Unterrichtserfolg bei der Behandlung gemeiner Brüche sind weit verbreitet, Klagen über den Unterrichtserfolg bei Dezimalbrüchen dagegen selten. Die folgende empirische Untersuchung an Gymnasialschülern des siebten Schuljahres liefert Antworten auf die Frage, ob die Behandlung von Dezimalbrüchen problemlos und leicht ist, und gibt Hinweise auf typische Fehlvorstellungen und Fehlerstrategien.*

## 1 Vorbemerkungen

Die Bruchrechnung mit den sogenannten gemeinen Brüchen bereitet bekanntlich vielen Schülern große Schwierigkeiten. Dies belegt beispielsweise die von mir 1986 publizierte empirische Untersuchung an über 1000 Schülern von Realschulen in Ostwestfalen [19]. Dagegen hört man kaum Klagen über fehlende Unterrichtserfolge bei der Behandlung der Dezimalbrüche. Kann man hieraus schließen, daß die Behandlung von Dezimalbrüchen problemlos und leicht ist?

Eine Antwort auf diese Frage liefern die Ergebnisse einer gerade von mir abgeschlossenen, von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützten empirischen Untersuchung an knapp 900 Gymnasialschülern aus 34 Klassen des siebten Schuljahres von 11 verschiedenen Gymnasien in Westfalen [22]. Ergänzend verweise ich gelegentlich auch auf Ergebnisse zweier von mir angeregter Untersuchungen über Fehler bei Dezimalbrüchen, die in 17 Klassen an 8 verschiedenen Realschulen in Ostwestfalen durchgeführt wurden [17], [26].

Im Mittelpunkt steht hierbei die Frage nach typischen Fehlvorstellungen und Fehlerstrategien, die nicht nur von einzelnen, sondern von einer größeren Anzahl von Schülern benutzt werden. Werden diese Fehler zusätzlich von den Schülern systematisch gemacht, so bietet ihre Kenntnis die Möglichkeit zu einer drastischen Fehlerreduzierung.

## 2 Unterrichtserfolge bei gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen

Der folgende globale Vergleich des Unterrichtserfolges bei der Behandlung der gemeinen Brüche [19] und der Dezimalbrüche [22] liefert schon deutliche Hinweise, daß man keineswegs sagen kann, daß nur die Behandlung der gemeinen Brüche äußerst schwierig ist, daß dagegen die Behandlung der Dezimalbrüche problemlos und leicht ist und daß hier die Unterrichtserfolge generell höher liegen als bei den gemeinen Brüchen.

Prozentsätze richtig gelöster Aufgaben je Rechenoperation und Aufgabentyp bei den gemeinen Brüchen siehe Abb. 1.

Die Daten belegen, daß selbst in Realschulen der Unterrichtserfolg bei der Behandlung gemeiner Brüche noch stark verbesserungsbedürftig ist. Dies gilt ganz besonders für Aufgaben, bei denen gemeine Brüche und natürliche Zahlen kombiniert auftreten. Die Leistungen von Hauptschülern sind noch wesentlich schwächer, wie Untersuchungen von Hasemann dokumentieren [11], [12]. Aber auch im Ausland ist die Situation nicht besser, wie beispielsweise vielfältige empirische Untersuchungen aus den USA erkennen lassen (vgl. z. B. [7], [18]).

Zur ersten Charakterisierung des Unterrichtserfolges bei den Dezimalbrüchen dienen die beiden folgenden Übersichten:

(1) Prozentsatz richtig gelöster Aufgaben im Durchschnitt je Operation:

| | | |
|---|---|---|
| Anordnung | (8 Aufg.) | 76 |
| Addition | (14 Aufg.) | 88 |
| Subtraktion | (18 Aufg.) | 80 |
| Multiplikation | (18 Aufg.) | 59 |
| Division | (28 Aufg.) | 43 |

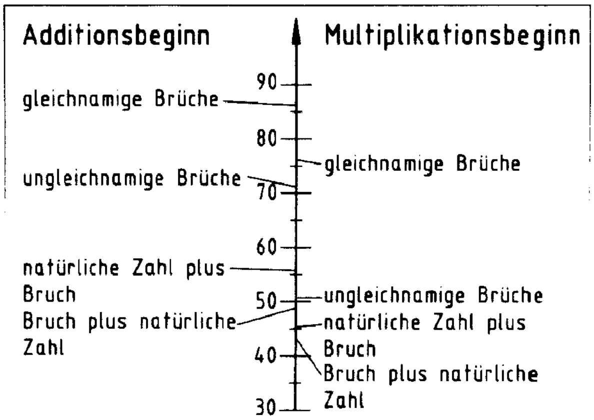
(2) Prozentsatz der Schüler, die die betreffende Aufgabe richtig lösen:

| | zweitleichteste Aufgabe | zweitschwerste Aufgabe |
|---|---|---|
| Anordnung | 88 | 69 |
| Addition | 94 | 79 |
| Subtraktion | 93 | 67 |
| Multiplikation | 83 | 43 |
| Division | 78 | 25 |

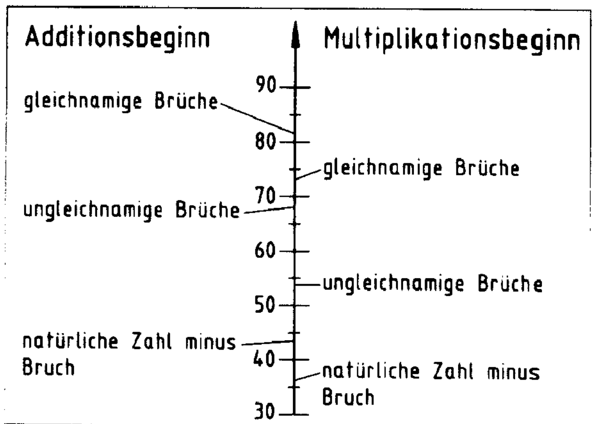
Die Daten belegen eindeutig, daß selbst an Gymnasien die Behandlung der Dezimalbrüche keineswegs problemlos ist. Gleiches gilt vermutlich erst recht für die übrigen Schulformen. Insbesondere im Bereich der Multiplikation und Division sind hohe Defizite erkennbar. Ein Vergleich der Leistungen bei gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen ergibt – bei aller Vor-

MNU 42/7 (15. 10. 1989) Seiten 387-395 ISSN 0025-5866 

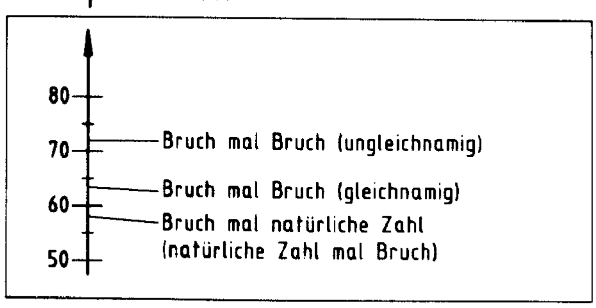
Addition




Subtraktion




Multiplikation




Division

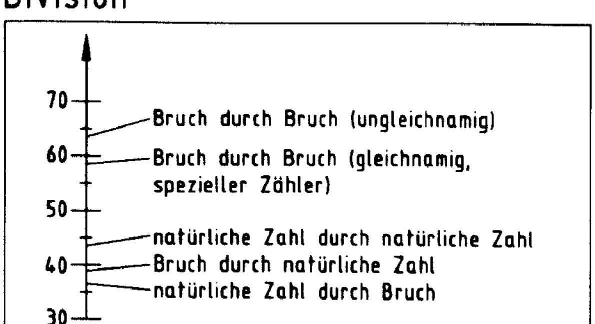



*Abb. 1*

sicht in der Interpretation – folgende Hinweise: Der Unterrichtserfolg ist bei den Dezimalbrüchen keineswegs generell höher als bei den gemeinen Brüchen. Vielmehr liegen die Leistungen nur bei der Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen höher, und zwar etwa auf der Höhe für gleichnamige Brüche, während sie bei der Multiplikation und Division deutlich unter den entsprechenden Werten für die gemeinen Brüche liegen.

## 3 Dezimalbrüche: Sprech- und Schreibweise

Einen nicht unerheblichen Anteil an den Fehlern bei der Benutzung von Dezimalbrüchen hat die im täglichen Leben weit verbreitete Benennung von z. B. 3,45 als drei Komma *»fünfundvierzig«*. Diese Sprechweise muß im Mathematikunterricht unbedingt vermieden werden, da sie eine Fülle typischer Fehler bzw. Schwierigkeiten verursacht, und zwar:

- beim Größenvergleich: $0{,}5 < 0{,}13$, da $5 < 13$,
- beim Erweitern: $0{,}10 \neq 0{,}100$, da $10 \neq 100$,
- bei der Addition: $0{,}63 + 0{,}4 = 0{,}67$, da $63 + 4 = 67$,
- bei der Subtraktion: $0{,}63 - 0{,}4 = 0{,}59$, da $63 - 4 = 59$,

Den Stellen rechts vom Komma wird bei dieser Sprechweise sogar je nach Anzahl der Dezimalen jeweils ein anderer »Scheinstellenwert« gegeben. So liest man die Ziffer 5 in 0,5 Null Komma Fünf, in 0,51 Null Komma Einundfünfzig und in 0,521 Null Komma Fünfhunderteinundzwanzig, obwohl die Ziffer 5 immer an erster Stelle nach dem Komma steht und immer den Wert fünf Zehntel hat (vgl. [1]).

Daher verwendet man im Unterricht die ziffernweise Sprechweise, liest also 0,345 Null Komma Drei Vier Fünf. Die andere mögliche Sprechweise – nämlich Null Komma Dreihundertfünfundvierzig Tausendstel – ist zu umständlich und schwerfällig und wird daher nicht benutzt.

Bei der Übertragung der dezimalen Stellenwertschreibweise von den natürlichen Zahlen auf die Dezimalbrüche unterlaufen selbst Gymnasiasten häufiger zwei fehlerhafte Transfers:

- In $\mathbb{N}$ stehen die Zehner an zweiter, die Hunderter an dritter, die Tausender an vierter Stelle vor dem Komma, dagegen stehen bei Dezimalbrüchen die Zehntel an erster, die Hundertstel an zweiter und die Tausendstel an dritter Stelle nach dem Komma. In analoger Übertragung der Verhältnisse von $\mathbb{N}$ schreiben rund 5% der in die Untersuchung einbezogenen Gymnasiasten z. B. für $\frac{2}{10}$ fehlerhaft 0,02 oder 0,005 für $\frac{5}{100}$. Sogar noch deutlich mehr Schüler kreuzen in 7,654 die Ziffer 5 als Zehntel an. Einige Schüler bezeichnen sogar explizit die erste Stelle nach dem Komma als Eintel.

- In ℕ orientiert sich der Stellenwert der einzelnen Ziffer an der letzten Stelle, und man zählt die Ziffern von rechts nach links ab. Dagegen orientiert sich bei Dezimalbrüchen der Stellenwert der Dezimalen am Komma. Man zählt die Ziffern vom Komma aus - also von links nach rechts - ab. Die Sichtweise von ℕ behalten Schüler häufiger auch bei Dezimalbrüchen fehlerhaft bei. Dies wird sichtbar, wenn sie z. B. bei entsprechenden Aufgaben die drittletzte Stelle dieser gegebenen Zahl als Hundertstel ankreuzen.

Es ist daher im Unterricht wichtig, nicht nur die Gemeinsamkeiten zwischen natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen zu betonen, sondern gerade auch die Unterschiede deutlich herauszustellen, um so fehlerhafte Übergeneralisierungen zu vermeiden.

Besonders viele Fehler werden bei der Schreibweise gemacht, wenn ein Umbündeln erforderlich ist, insbesondere wenn hierbei das Komma überschritten werden muß. So schreiben 25% (!) der von uns getesteten Schüler für 28 Zehntel fehlerhaft 0,28. Aber auch für 97 Tausendstel bzw. 345 Tausendstel notieren sie entsprechend - wenn auch seltener - 0,0097 bzw. 0,00345.

## 4 Größenvergleich

Über typische Fehler bei der Ordnung von Dezimalbrüchen liegen eine Reihe gründlicher Untersuchungen vor (z. B. [16], [24], [6], [10], [8], [28], [2], [4]).

Nach unseren Untersuchungen wenden Schüler (auch an Gymnasien) bei der Ordnung von Dezimalbrüchen gehäuft folgende Fehlerstrategien an:

(1) Kein-Komma-Strategie (kurz: KK-Strategie)

Die Schüler lassen bei den Dezimalbrüchen das Komma fort und fassen den gesamten Dezimalbruch als eine natürliche Zahl auf. Die Ordnung dieser natürlichen Zahlen übertragen sie auf die Dezimalbrüche.

*Beispiele:*
$0{,}45 < 0{,}238$, denn $45 < 238$;
$2{,}45 < 1{,}328$, denn $245 < 1328$.

Dieser fehlerhafte Transfer von den natürlichen Zahlen liegt nahe, insbesondere bei Verwendung der Lesart Null Komma Fünfundvierzig für 0,45. Diese (generell falsche) Strategie führt bei Dezimalbrüchen mit derselben Anzahl von Dezimalen stets zu einem richtigen Ergebnis. Beginnt man daher die Behandlung der Dezimalbrüche zunächst mit derselben Anzahl von Dezimalen bzw. bringt man Dezimalbrüche vor dem Größenvergleich durch Anhängen von Endnullen auf diese Form, so fallen die KK-Fehler nicht auf und verfestigen sich leicht.

(2) Komma-trennt-Strategie (kurz: KT-Strategie)

Das Komma trennt den Dezimalbruch in zwei natürliche Zahlen, die getrennt verglichen werden.

*Beispiele:*
$2{,}2 < 2{,}13$, denn zwar $2 = 2$, aber $2 < 13$;
$5{,}41 < 5{,}117$, denn zwar $5 = 5$, aber $41 < 117$.

Bei Dezimalbrüchen mit demselben ganzzahligen Anteil (wichtiger Sonderfall: Null) kann man bei einem Fehler bezüglich des Größenvergleichs die KK- und KT-Strategie nicht auseinanderhalten (vgl. jedoch Abschnitt 8).

In unserer Untersuchung umranden in der *Aufgabe:*
»Umrande die größte Zahl
0,3 0,13 0,42 0,135 0,287 !«
8% der Gymnasialschüler die Lösung 0,287, begehen also einen KK- bzw. KT-Fehler. Die Hälfte dieser Schüler begeht diesen Fehler sogar systematisch. Bei einer vergleichbaren Aufgabe unterläuft sogar 18% [17] bzw. 22% [26] der betreffenden Realschüler dieser Fehlertyp. Am häufigsten kreuzen jedoch in dieser Aufgabe die Gymnasiasten die Lösung 0,3 an (19% der Schüler). 6% der Schüler begehen diesen Fehlertyp systematisch. Die zugrundeliegende fehlerhafte Strategie können wir kennzeichnen als:

(3) Je-mehr-Dezimalen-desto-kleiner-Strategie (kurz: MK-Strategie)

Nach dieser Strategie ist die Zahl die kleinere, die mehr Dezimalen bzw. umgekehrt die Zahl die größere, die weniger Dezimalen hat. 0,3 besitzt die geringste Anzahl von Dezimalen und ist daher nach diesem Kriterium die größte Zahl. Ursache dieses Fehlers ist die falsche Deutung des folgenden Sachverhaltes: Bei Dezimalbrüchen hat jede weiter rechts stehende Ziffer einen kleineren Wert, nämlich $\frac{1}{10}$ des Stellenwertes der vorhergehenden Ziffer. Hieraus wird fehlerhaft geschlossen: Je mehr Ziffern rechts vom Komma, desto kleiner ist der Wert des ganzen Dezimalbruchs.

Die KK- bzw. KT-Strategie und die MK-Strategie führen bei vielen Aufgaben zu richtigen Ergebnissen, wie Leonard und Grisvard in einer sehr differenzierten Untersuchung nachweisen konnten [16]. Dies bestärkt die betreffenden Schüler in der Anwendung dieser Strategien.

Günther [10] berichtet von einer weiteren fehlerhaften Strategie beim Ordnen von Dezimalbrüchen, die offensichtlich auf einer fehlerhaften Übergeneralisierung der bei den natürlichen Zahlen gültigen Regel beruht, nämlich vom Ordnen durch Vergleichen der Ziffern von links (ohne Beachtung des Dezimalkommas). Diese Strategie führt etwa zu folgendem (teilweise richtigen) Ergebnis:

$$13{,}5 > 1{,}33 > 1{,}303 > 10{,}34.$$

Bei der Beurteilung der Fehlerhäufigkeit beim Ordnen von Dezimalbrüchen muß beachtet werden, daß den Schüler außerschulische, alltägliche Erfahrungen bezüglich des Größenvergleichs weithin fehlen; denn im täglichen Leben kann man durch Übergang zu kleineren Maßeinheiten ein Argumentieren mit Kommazahlen vermeiden und argumentiert daher vielfach mit natürlichen Zahlen als Maßzahlen.

## 5 Umwandlungen

Für ein gründliches Verständnis der Dezimalbrüche ist die Kenntnis des Zusammenhangs zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen grundlegend. Dennoch benutzen selbst Schüler von Gymnasien bei der Umwandlung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche häufiger folgende Fehlerstrategien (vgl. auch [3], [10], [13]):

- Bruchstrich und Komma werden gleichgesetzt:
  *Beispiele:* $\frac{1}{2} = 1{,}2$; $\frac{3}{4} = 3{,}4$.
  Dieser Fehler wird von rund 3% der Schüler gemacht, meist sogar systematisch.
- Falscher Transfer von IN bzgl. des Stellenwerts (vgl. Abschnitt 3):
  *Beispiele:* $\frac{3}{10} = 0{,}03$; $\frac{3}{100} = 0{,}003$.
  So wie bei natürlichen Zahlen die Zehner an zweit-, die Hunderter an dritt- und die Tausender an viertletzter Stelle stehen, so schreiben rund 4% der Gymnasiasten die Zehntel an die zweite, die Hundertstel an die dritte und die Tausendstel an die vierte Stelle nach dem Komma. Dieser Fehler tritt noch wesentlich häufiger auf, wenn umgebündelt werden muß.
  *Beispiele:* $\frac{23}{10} = 0{,}23$; $\frac{287}{100} = 0{,}287$.
  Hier unterläuft dieser Fehler rund 8%, im Fall $\frac{23}{10} = 0{,}23$ sogar 11% der Gymnasiasten!
  Die beiden Fehlerlösungen können auch gedeutet werden als Folge der Strategie: Notiere den Zähler direkt hinter dem Komma.
  Diese Strategie führt bei speziellen Zehnerbrüchen zum richtigen Ergebnis (Beispiele: $\frac{2}{10} = 0{,}2$; $\frac{35}{100} = 0{,}35$; $\frac{487}{1000} = 0{,}487$) und wird fehlerhaft übergeneralisiert.

Bei der Umwandlung von endlichen Dezimalbrüchen in gemeine Brüche spielen im wesentlichen dieselben Fehlerstrategien eine Rolle.

- Komma und Bruchstrich werden gleichgesetzt:
  *Beispiele:* $0{,}7 = \frac{0}{7}$; $0{,}357 = \frac{0}{357}$.
- Falscher Transfer von IN bzgl. des Stellenwerts:
  *Beispiele:* $0{,}29 = \frac{29}{10}$; $0{,}03 = \frac{3}{10}$.
- Formale Notation des Dezimalbruchs (<1) als Stammbruch:
  *Beispiele:* $0{,}7 = \frac{1}{7}$; $0{,}357 = \frac{1}{357}$.

## 6 Addition

Nach unseren Untersuchungen an Gymnasialschülern [22] und Realschülern [17] massieren sich die Fehler bei der Addition von Dezimalbrüchen auf nur eine Fehlerstrategie, nämlich auf die Komma-trennt-Strategie (KT-Strategie): So rechnen 18% der Gymnasialschüler $3{,}48 + 4{,}2 = 7{,}50$ oder fast genau so viele $2{,}75 + 3{,}8 = 5{,}83$. Beachtliche 13% machen den KT-Fehler bei diesem Aufgabentyp systematisch und rund 6% formulieren sogar die Additionsregel im Sinne dieser KT-Strategie. Bei den Realschülern rechnen gar 31% fehlerhaft $2{,}7 + 3{,}11 = 5{,}18$ und immerhin noch 16% $6{,}31 + 7{,}802 = 13{,}833$.

Der KT-Fehler spielt z. B. auch in den USA eine sehr dominante Rolle (vgl. [3]). So rechnet fast jeder 4. (!) amerikanische Schüler in einer Repräsentativerhebung: $0{,}70 + 0{,}40 + 0{,}20 = 0{,}130$ (bzw. 0,13).

Einige der getesteten Schüler werden zu diesem KT-Fehler nur durch Flüchtigkeit verführt, insbesondere bei Aufgaben, die man schnell im Kopf rechnen kann. Andere dagegen sehen einen Dezimalbruch offensichtlich nicht als eine Zahl, sondern als ein Gebilde an, das aus zwei natürlichen Zahlen besteht, die man getrennt manipulieren muß. In dieselbe Richtung führt auch die häufig erfolgreiche Strategie »Verknüpfe Gleichartiges«. Diese Strategie ist bei der Addition von Dezimalbrüchen richtig, wenn man stellengerecht Zehner, Einer, Zehntel, Hundertstel usw. addiert. Sie ist hingegen nicht stets richtig, wenn man die natürlichen Zahlen vor dem Komma und die Dezimalen nach dem Komma jeweils als gleichartigen Gesamtblock betrachtet und addiert.

Das Hauptfehlermuster bei der Addition gemeiner Brüche, nämlich $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ entspricht offensichtlich weitgehendst dieser KT-Strategie bei der Addition von Dezimalbrüchen.

Bei den gemischten Fällen (Addition von Dezimalbrüchen und natürlichen Zahlen) wird häufiger fehlerhaft gerechnet $0{,}45 + 7 = 0{,}52$ oder $0{,}3 + 6 = 0{,}9$, also um 7 bzw. 6 »weitergezählt« (vgl. [28]). Dieser Fehler wird meist systematisch gemacht. Die KT-Vorstellung spielt auch hier als Ursache eine Rolle.

Weitere in der Literatur beschriebene Fehlerstrategien wie die rechtsbündige Anordnung ohne Rücksicht auf das Komma mit anschließender Addition der Summanden (Beispiel: $5{,}37 + 1{,}4 = 5{,}51$) oder die verschiedenen von DAUBERT [5] beschriebenen Wege, wie Schüler bei der schriftlichen Addition durch verschiedene fehlerhafte Maßnahmen das Problem fehlender Rechtsbündigkeit lösen, spielen in unserer Untersuchung keine nennenswerte Rolle.

## 7 Subtraktion

Auch bei der Subtraktion ist der Komma-trennt-Fehler bei entsprechenden Aufgaben jeweils der wichtigste Einzelfehler. So rechnen 7% bzw. 8% der Gymnasiasten 0,87 - 0,3 = 0,84 bzw. 5,07 - 1,3 = 4,04 (oder 4,4) oder 14% bzw. 10% der Realschüler 0,85 - 0,5 = 0,8 bzw. 8,743 - 5,31 = 3,712 (vgl. auch [28], [24]). Der Komma-trennt-Fehler unterläuft den untersuchten Schülern bei der Addition wesentlich öfter als bei der Subtraktion. Dies hängt damit zusammen, daß die KT-Strategie bei der Addition viel häufiger angewandt werden kann - nämlich bei praktisch allen Additionsaufgaben - und dort auch häufiger zum Erfolg führt, während sie bei der Subtraktion nur in Sonderfällen naheliegt und selbst bei Dezimalbrüchen mit gleicher Anzahl von Dezimalen wegen der häufig erforderlichen Überträge nur relativ selten zum Erfolg führt.

Weitere in der Literatur beschriebene Fehlerstrategien wie die rechtsbündige Anordnung von Minuend und Subtrahend ohne Rücksicht auf das Komma mit anschließender Subtraktion (Beispiel: 5,07 - 1,3 = 4,94) oder die verschiedenen von DAUBERT [5] beschriebenen Wege, wie Schüler bei der schriftlichen Subtraktion durch verschiedene fehlerhafte Maßnahmen das Problem fehlender Rechtsbündigkeit lösen (durch Ignorieren der letzten Stelle, durch die Übernahme »überstehender« Ziffern in das Ergebnis, . . .), spielen in unserer Untersuchung keine nennenswerte Rolle.

Im Bereich der natürlichen Zahlen entfällt bei der schriftlichen Subtraktion auf Übertragsfehler (generell kein Übertrag, kein Übertrag in Sondersituationen, . . .) rund die Hälfte aller Fehler (vgl. [20], [15]). Dies schlägt auch auf den Bereich der schriftlichen Subtraktion von Dezimalbrüchen durch.

## 8 Multiplikation

Bei der Multiplikation von Dezimalbrüchen spielen - neben den Fehlern im Zusammenhang mit der Kommasetzung - auch die Fehler eine größere Rolle, die schon bei der Multiplikation natürlicher Zahlen gehäuft auftreten (vgl. [20]). Hierbei handelt es sich insbesondere um

- Stellenwertfehler durch falsche Anordnung der Teilprodukte (z. B. kein Ausrücken),
- Nichtbeachtung der stellenwertbelegenden Rolle der Null im 2. Faktor,
- Einmaleinsfehler der Nähe (Beispiel: 8 · 3 = 21),
- Fehler mit Behalteziffern.

Ferner machen sich die schon in $\mathbb{N}$ beobachteten Schwierigkeitsfaktoren, wie Anzahl und Größe der Behalteziffern oder das Vorkommen von Nullen im Multiplikand, Multiplikator bzw. in Teilprodukten, auch bei der Multiplikation von Dezimalbrüchen bemerkbar. Zusätzlich spielen hier u. a. die Anzahl der Dezimalen sowie die Frage, ob die Faktoren gleichviel oder unterschiedlich viele Dezimalen besitzen, eine Rolle. Besonders fehlerträchtig sind Aufgaben, bei denen Nullen im Ergebnis ergänzt werden müssen.

Wieweit die Kommasetzungsregel wirklich verstanden worden ist, läßt sich gut an Aufgaben wie 5,6 · 0,1 abklären, bei denen Multiplikationsfehler in $\mathbb{N}$ so gut wie ausgeschlossen sind. Fast jeder vierte (!) Realschüler ([17]) bzw. Gymnasiast ([22]) rechnet hier 5,6 · 0,1 = 5,6, läßt also den ersten Faktor unverändert. Bei der Multiplikation mit 0,01 und 0,001 lassen die Schüler den ersten Faktor etwas seltener - nämlich nur noch halb so häufig - unverändert. Dennoch unterläuft dieser Fehler 17% (!) der Gymnasialschüler systematisch.

Die bei der Multiplikation mit 0,01 bzw. 0,001 häufiger gefundenen fehlerhaften Ergebnisse wie 3,8 · 0,01 = 0,38 oder 4,7 · 0,001 = 0,047 können als Ergebnis der Strategie: »Die Anzahl der Nachkommastellen in einem Produkt richtet sich nach dem Faktor mit den meisten Dezimalen« gedeutet werden, eine Strategie, die bei der Addition und Subtraktion erfolgreich ist. In diesem Sinne kann auch das Ergebnis der Aufgabe 5,6 · 0,1 = 5,6 interpretiert werden.

Auch die Multiplikation von Dezimalbrüchen mit Zehnerpotenzen läßt ggf. gut Schwächen in der Beherrschung der Kommasetzungsregel erkennen. Dieser Aufgabentyp fällt den Schülern etwas leichter als die - weniger vertraute? - Multiplikation mit 0,1 bzw. 0,01 bzw. 0,001. Nach NEUMANN [17] rechnen 6% der von ihm untersuchten Realschüler 2,3 · 10 = 2,30 bzw. 100 · 127,305 = 127,30500, übertragen also die Nullanhängungsregel aus dem Bereich der natürlichen Zahlen fehlerhaft auf die Dezimalbrüche. Dieser Fehler wird allerdings nur selten systematisch gemacht. Den Gymnasialschülern unterläuft dieser Fehler nur ganz vereinzelt. Weitere häufiger gemachte Fehler wie 3,4 · 10 = 30,40 oder 100 · 127,305 = 12 700,30500 beruhen auf der Komma-trennt-Vorstellung.

Während dieser KT-Fehler bei der Multiplikation mit Zehnerpotenzen nur relativ selten auftritt, ist er im Normalfall der häufigste Multiplikationsfehler (vgl. [28]). So rechnen 55% bzw. 44% der getesteten Realschüler 0,4 · 0,2 = 0,8 bzw. 0,8 · 0,11 = 0,88 ([17]) oder rund 30% der Gymnasiasten 0,2 · 0,3 = 0,6 bzw. 0,8 · 0,11 = 0,88. Der KT-Fehler erfolgt besonders häufig bei einfachen Multiplikationsaufgaben, die im

Kopf gerechnet werden, speziell wenn zusätzlich die Zahl vor dem Komma jeweils eine Null ist. Ist diese Zahl dagegen von Null verschieden, so wird der KT-Fehler deutlich seltener gemacht. So rechnen rund 10% der Schüler 15,2 · 3,24 = 45,48 (Realschule; [17]) bzw. 3,2 · 2,4 = 6,8 (Gymnasium; [22]). Einige Schüler formulieren sogar die Multiplikationsregel im Sinne dieser fehlerhaften KT-Vorstellung. Es überrascht nicht, daß der KT-Fehler bei der Multiplikation von Dezimalbrüchen mit natürlichen Zahlen (Beispiele: 8 · 2,3 = 16,24 oder 4 · 2,3 = 8,12) relativ am seltensten auftritt.

Der in amerikanischen Untersuchungen häufiger genannte KK-Fehler, daß Schüler nämlich Dezimalbrüche wie natürliche Zahlen behandeln und auch im Ergebnis kein Komma setzen (Beispiel: 0,2 · 0,4 = 8), spielt in unseren Untersuchungen nur eine äußerst geringe Rolle. Dies beruht vermutlich auf den Unterschieden in der Schreibweise (so schreiben die Amerikaner z. B. 0,2 kurz .2).

Bei der Multiplikation mit 0,1; 0,01 bzw. 0,001 konnten wir eine größere Anzahl von Fehlern mit Hilfe der Strategie »Die Anzahl der Nachkommastellen in einem Produkt richtet sich nach dem Faktor mit den meisten Dezimalen« erklären. Daß hier ein fehlerhafter Transfer von der Addition/Subtraktion als Ursache wahrscheinlich ist, belegt u. a. die Beobachtung von Vance [27], daß Schüler vor der Ausführung der Multiplikation von z. B. 5,2 · 3,23 zunächst die Faktoren durch das Anhängen von Nullen auf gleich viele Dezimalen erweitern (5,2 · 3,23 = 5,20 · 3,23 = 1679,60) und dann im Ergebnis diese gleiche Anzahl von Dezimalen abstreichen.

Nach diesen Untersuchungen setzen Schüler bei der Multiplikation folgende weitere fehlerhafte Kommasetzungsstrategien ein:

- Bei den Faktoren werden nur die von Null verschiedenen Nachkommastellen berücksichtigt (Beispiel: 2,03 · 2,205 = 447,615).
- Die Kommasetzungsregel wird auf die Ziffern links vom Komma angewandt (Beispiel: 9,2 · 3,34 = 307,28).
- Die geforderte Anzahl der Nachkommastellen im Ergebnis wird dadurch erreicht, daß man die Ziffernfolge des Ergebnisses direkt hinter das Komma schreibt und ggf. noch Nullen anhängt (Beispiel: 0,5 · 0,003 = 0,1500).

Fehlerhafte Ergebnisse wie 6 · 0,008 = 6,008 oder 0,02 · 0,004 = 0,024 beruhen auf Additionen. Eine genauere Analyse legt allerdings den Verdacht nahe, daß die Benutzung der (oft leichteren) Addition zumindest bei einigen Schülern als »Fluchtreaktion« interpretiert werden muß und nicht als eine irrtümliche Verwechslung.

Gezielt geachtet werden muß auch auf fehlerhaften Transfer vom Rechnen in $\mathbb{N}$, wie die erwähnte Nullanhängungsregel bei der Multiplikation mit Zehnerpotenzen schon belegt. So übertragen 40% (!) der von Neumann getesteten Realschüler die in $\mathbb{N}$ richtige Aussage, daß eine Multiplikation – bis auf die Multiplikation mit 1 – stets vergrößernd wirkt, fehlerhaft auf den Bereich der Dezimalbrüche.

Die Ergebnisse vieler Fehlerstrategien weichen offensichtlich stark vom richtigen Ergebnis ab. Da Überschlagsrechnungen diese Fehler leicht aufdecken können, sollten sie gerade bei der Multiplikation gezielt eingesetzt werden. Das Runden ist in diesem Zusammenhang wichtig. Es ist aber auch unerläßlich, um bei praktischen Fragestellungen, die Multiplikationen erfordern, unsinnige Scheingenauigkeiten zu vermeiden.

## 9 Division

Bei der Division von Dezimalbrüchen spielen – neben den Fehlern im Zusammenhang mit der Kommasetzung – auch die Fehler eine Rolle, die schon bei der schriftlichen Division natürlicher Zahlen gehäuft auftreten. Es handelt sich hierbei um folgende Fehler ([20]):

- Endnullfehler,
- Zwischennullfehler,
- gleichzeitiges Herunterholen mehrerer Ziffern,
- mehrmalige Division in derselben Stellenwertspalte, obwohl die Teildifferenz kleiner ist als der Divisor,
- Subtraktionsfehler,
- Multiplikationsfehler.

Ferner machen sich die schon in $\mathbb{N}$ beobachteten Schwierigkeitsfaktoren, wie Größe des Divisors, Größe der Quotientenziffern, Anzahl der Verwandlungen pro Aufgabe, Anzahl der Zehnerüberschreitungen beim Bestimmen der Teildifferenzen, Relation der Anzahl der Dividendenstellen zur Anzahl der Quotientenstellen, Nullen im Dividend, Divisor oder Quotient bemerkbar. Zusätzlich spielt hier u. a. die Frage eine Rolle, ob der Dividend und der Divisor gleich- oder unterschiedlich viele Dezimalen besitzen, und damit auch die Frage, ob der Dividend ggf. erweitert werden muß.

Wieweit der Divisionskalkül wirklich verstanden worden ist, läßt sich gut an Aufgaben wie 5 : 0,1 oder 5 : 0,001 abklären, bei denen keine Divisionsfehler aus dem Bereich des Kalküls in $\mathbb{N}$ das Bild überlagern. Große Unsicherheiten gegenüber diesem Aufgabentyp – und dies sogar bei Gymnasialschülern! – sind an der hohen Quote von Auslassungen (zwischen rund 30% und 40%!) deutlich zu erkennen. Die häufigsten Fehler, nämlich 5 : 0,1 = 0,5 bzw. 5 : 0,001 = 0,005, können im Sinne der schon bei der Multiplikation mit 0,1 bzw. 0,001 beobachteten Schülerstrategie gedeutet werden, daß sich die Anzahl der Nachkommastellen nach der Zahl mit den meisten Dezimalen richtet. Auch die Division durch Zehnerpotenzen offenbart grundlegende Defizite. So rechnet z. B. rund ein Drittel der untersuchten Gymnasialschüler die Aufgabe 5 : 100 falsch. Häufigste Fehler sind 20 bzw. 0,005. Während Ergebnisse wie 0,005 durch einen falschen Transfer von ℕ erklärt werden können (Hunderter stehen in ℕ an der drittletzten Stelle), sind Ergebnisse wie 20 eher das Resultat einer Ausweichreaktion: Die Berechnung von 5 : 100 ist den betreffenden Schülern unklar, also rechnen sie die vertraute Aufgabe 100 : 5. Diese Fluchtreaktion beschreiten bei diesem Aufgabentyp mehr als 10% der Schüler systematisch!

Die hohen Fehlerquoten bei einfachen Divisionsaufgaben vom Typ Dezimalbruch durch natürliche Zahl wie z. B. 8,24 : 4 oder 18,27 : 9 überraschen auf den ersten Blick. Ursache hierfür ist jedoch die häufig benutzte KT-Strategie. So rechnet fast jeder vierte (!) Schüler 8,24 : 4 = 2,6 oder 18,27 : 9 = 2,3. Bei Untersuchungen mit Realschülern rechnen sogar über 40% der untersuchten Schüler beispielsweise 0,56 : 7 = 0,8 ([26]). Der KT-Fehler wird hier allerdings meist aus Flüchtigkeit gemacht, systematisch unterläuft er bei geeigneten Aufgaben rund 7% der Gymnasialschüler. Klammern wir die KT-fehlerträchtigen Aufgaben aus, so werden Aufgaben, bei denen keine Endnullen bei der Rechnung angehängt werden müssen (Beispiel: 7,2 : 6), deutlich häufiger richtig gelöst als Aufgaben, bei denen dies erforderlich ist (Beispiel: 7,5 : 2). Besonders fehlerträchtig sind ferner Aufgaben, bei denen der Dividend kleiner als 1 ist und eine oder mehrere Nullen nach dem Komma besitzt (Beispiel: 0,084 : 12). Häufigster Fehler ist hier das Ergebnis 0,07. Die Schüler sehen vermutlich 84 als »Block« und setzen daher die 7 auf die zweite Stelle nach dem Komma. Auf die Frage nach der Regel für die Division eines Dezimalbruchs durch 100 geben nur wenige Schüler eine richtige Antwort. Die häufigste fehlerhafte Antwort ist, daß das Komma nach rechts verschoben wird.

Bei der Division von Dezimalbrüchen durch Dezimalbrüche fallen den Schülern Aufgaben mit der gleichen Anzahl von Dezimalen i. a. leichter als Aufgaben mit einer unterschiedlichen Anzahl. Besonders fehlerträchtig ist der Aufgabentyp, bei dem der Divisor mehr Stellen aufweist als der Dividend (Beispiel: 0,5 : 0,25). Das erforderliche Anhängen von Endnullen beim Dividenden bereitet hier Probleme. Aber auch Aufgaben, bei denen eine oder mehrere Nullen nach dem Komma vorkommen, sind i. a. fehlerträchtiger als Aufgaben ohne Nullen. Bieten Aufgaben wie 0,44 : 0,11 die Möglichkeit zur Anwendung der KT-Strategie, so wird dies reichlich genutzt. So rechnet fast jeder 5. Gymnasiast 0,44 : 0,11 = 0,4. Bei diesem Aufgabentyp wird auch bei geeigneten Aufgaben die KK-Strategie angewandt. Lösungen wie 0,36 : 0,9 = 4 oder 0,028 : 0,4 = 7 kommen häufiger vor. Besteht Unklarheit über die Anzahl der Dezimalen beim Ergebnis, so richten sich viele Schüler nach der Anzahl der Dezimalen des Dividenden oder Divisors. Dieser Fehler kommt bei einer gleichen Anzahl von Dezimalen – möglicherweise auch infolge eines Transfers von der Addition und Subtraktion – besonders häufig vor. So rechnen 15% der untersuchten Schüler 5,6 : 0,7 = 0,8. Ist die Anzahl der Dezimalen bei Dividend und Divisor unterschiedlich, so läßt sich bei diesem Aufgabentyp keine klare Tendenz bei den Schülern zur rein formalen Übernahme der Anzahl der Dezimalen vom Dividend oder Divisor bzw. von der Zahl mit den meisten oder wenigsten Dezimalen erkennen. Läßt sich die Division »im Kopf« durchführen (wie bei 0,44 : 0,11; 5,6 : 0,7; 0,028 : 0,4; 0,36 : 0,9; 3,3 : 0,11 oder 0,6 : 0,02), so kann man die häufigste Schülerstrategie einheitlich auch so beschreiben: Man dividiert die beiden betreffenden Zahlen »im Kopf« und schreibt dann vor dieses Ergebnis »0,. . .«, also z. B. 6 : 2 = 3, daher 0,6 : 0,02 = 0,3. Einige Schüler formulieren diese Strategie sogar als Regel aus: »Ich rechne im Kopf ohne Komma und schreibe dann 0,. . .«.

## 10 Schlußbemerkungen

Die vorgestellte Untersuchung belegt eindeutig, daß das Rechnen mit Dezimalbrüchen keineswegs problemlos und leicht ist. Eine zu starke, undifferenzierte Betonung der Analogien zum Rechnen in ℕ kann leicht Fehler verursachen. Zur Bekämpfung und auch schon Vermeidung vieler Schwierigkeiten und für ein vertieftes Verständnis der Dezimalbrüche ist die Kenntnis von gemeinen Brüchen und ihres Zusammenhangs mit den Dezimalbrüchen grundlegend. Ein weitgehender oder gar völliger Verzicht auf die Behandlung von gemeinen Brüchen ist daher keineswegs sinnvoll.

Bei der Einführung der Bruchzahlen bietet nach unserer Überzeugung ein Beginn mit gemeinen Brüchen insbesondere wegen der besseren Veranschaulichungsmöglichkeiten (kleine Nenner!) und der besseren Möglichkeiten zum handelnden Erarbeiten überzeugende Vorteile. Zur Verdeutlichung überlege man sich, was sich ein Schüler ohne eine vorhergehende Erarbeitung gemeiner Brüche bespielsweise unter 0,235 anschaulich vorstellen soll. Bei der Kleinerrelation und bei den Rechenoperationen bietet eine Parallelbehandlung den Vorteil, daß so den Schülern klar wird, daß gemeine Brüche und Dezimalbrüche nur zwei verschiedene Schreibweisen für dieselben mathematischen Objekte sind. Bei der in der BR Deutschland weit verbreiteten getrennten Nacheinanderbehandlung besteht nämlich die große Gefahr, daß die Schüler die gemeinen Brüche und die Dezimalbrüche für zwei verschiedene Arten von Zahlen halten. Ein Beginn jeweils mit gemeinen Brüchen ermöglicht eine einheitliche Begründung der Rechenregeln für Dezimalbrüche durch Rückgriff auf die entsprechenden Rechenregeln für gemeine Brüche. Während bei der Addition und Subtraktion auch ein Beginn mit Dezimalbrüchen für uns gut vorstellbar ist, ist bei der Multiplikation und Division nach unserer Einschätzung ein Beginn mit gemeinen Brüchen gerade auch unter dem Gesichtspunkt einer Vermeidung typischer Schülerfehler unbedingt notwendig. Allerdings sollte man generell bei der Bruchrechnung kompliziertere oder aufwendige Rechnungen mit gemeinen Brüchen vermeiden. Das Ziel ist nämlich eine anschaulich fundierte Einführung der Bruchzahlen sowie eine einsichtig begründete und gut verstandene Beherrschung der Rechenoperationen mit einfachen gemeinen Brüchen, um so fundierte Grundlagen für eine Behandlung der im täglichen Leben fast ausschließlich eingesetzten Dezimalbrüche zur Verfügung zu haben und um so auch gut gerüstet zu sein für die verschiedenen (schul)mathematischen Gebiete, in denen die Kenntnis gemeiner Brüche erforderlich ist.

Die Bruchrechnung in Form der gemeinen Brüche und Dezimalbrüche konzentriert sich in der BR Deutschland gegenwärtig fast ausschließlich auf das sechste Schuljahr. Es ist allerdings zu überlegen, ob nach ersten anschaulichen Vorarbeiten in der Grundschule nicht schon generell in der fünften Klasse einfache Teile der Bruchrechnung auf anschaulicher Grundlage behandelt werden sollten, bevor eine systematische Behandlung in der sechsten Klasse erfolgt. Für den Bereich der Hauptschule ist eine weitere Entzerrung, etwa auf die Klassen 5 bis 7, überlegenswert. Ein Blick in das Ausland zeigt, daß dort die Bruchrechnung vielfach auf mehrere Jahre verteilt wird. Dies trifft etwa für Frankreich, Großbritannien und die USA zu. Wesentliche Teile des Stoffes werden dort darüber hinaus in zwei Durchgängen behandelt: in der (i. a. bis zur Klasse 6 dauernden) Primarstufe und noch einmal in der Sekundarstufe (vgl. [25]).

Es stellt sich die Frage, in welcher Reihenfolge die beiden Notationsformen behandelt werden sollen: Zunächst gemeine Brüche, dann Dezimalbrüche oder umgekehrt zunächst Dezimalbrüche, dann gemeine Brüche oder Parallelbehandlung beider Schreibweisen? Analysen amerikanischer Arithmetikschulbücher belegen, daß schon im 18. und 19. Jahrhundert (!) alle drei Versionen bei amerikanischen Schulbüchern vorkommen [14] und daß einige wenige Schulbücher nach dieser Quelle sogar völlig (?) oder weitgehend auf die Behandlung gemeiner Brüche verzichten [18].

Ein Blick in die gegenwärtigen Schulbücher in der BR Deutschland zeigt weithin dasselbe Bild: Zunächst werden die gemeinen Brüche gründlich behandelt, anschließend erfolgt in einem hiervon getrennten Abschnitt die Behandlung der Dezimalbrüche. Nur in wenigen Schulbüchern werden gemeine Brüche und Dezimalbrüche parallel behandelt. Dagegen werden in dem (Einheits)schulbuch der DDR schon seit längerem – und auch noch nach den neuesten Lehrplänen – gemeine Brüche und Dezimalbrüche jeweils parallel unterrichtet, wobei stets mit den gemeinen Brüchen begonnen wird [23]. Ein Blick in das Ausland zeigt, daß auch dort vielfach zunächst die gemeinen Brüche und erst dann die Dezimalbrüche behandelt werden, wobei dort teilweise auch eine Parallelbehandlung erfolgt bzw. hierfür plädiert wird. Dies gilt beispielsweise für die USA, Großbritannien, die UdSSR [9] oder die Niederlande. Dagegen werden bzw. wurden in der CSSR, in Frankreich und auch in Österreich zunächst die Dezimalbrüche und erst dann die gemeinen Brüche behandelt. Allerdings zeichnet sich hier zumindest in Frankreich und Österreich durch die jeweils Mitte der 80er Jahre erschienenen neuen Lehrpläne ein Wandel ab. So wird in Österreich durch eine Parallelbehandlung eine Vernetzung von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen angestrebt. Auch in Frankreich, das lange Zeit sehr stark die Dezimalbrüche betont hat und wo erst anschließend in Klasse 8 ein recht knapper, in sich geschlossener Durchgang durch die vier Grundrechenarten mit gemeinen Brüchen erfolgte, scheint durch die neuen Lehrpläne wieder eine frühere Betonung der gemeinen Brüche und eine teilweise Parallelbehandlung zu erfolgen [25].

**Literatur**


[1] W. Breidenbach: Rechnen in der Volksschule. – Hannover 1963, dort 11. Gewöhnliche Brüche, S. 221–252. 12. Dezimalzahlen, S. 258–268.

[2] G. Brousseau: Problemes De L'enseignement Des Decimaux. – Recherches en Didactique des Mathèmatiques, S. 11–58.

[3] Th. P. Carpenter u. a.: Decimals: Results and Implications from National Assessment. – Arithmetic Teacher, April 1981, S. 34–37.

[4] C. Comiti – R. Neyret: A Propos Des Problemes Rencontres Lors De L'enseignement Des Decimaux En Classe De Cours Moyen. – Grand N, Oktober 1979, S. 5–20.

[5] K. Daubert: Addieren (Subtrahieren) von Dezimalzahlen – kein Problem? – Mathematik lehren, August 1984, S. 19–20.

[6] A. Ekenstam: On children's quantitative understanding of numbers. Educational Studies in Mathematics, 1977, S. 317–332.

[7] J. Ginther u. a.: A survey of student achievement with fractions. – SMESG Working Paper No. 20, Stanford University, October 1976.

[8] M. Grassmann – W. Stoye: Zum Arbeiten mit Dezimalzahlen im Mathematikunterricht. – Wiss. Zeitung Humboldt Universität Berlin, 1/1983, S. 15–20.

[9] A. S. Grossmann: Decimal Notation: An Important Research Finding. – Arithmetic Teacher, Mai 1983, S. 32–33.

[10] K. Günther: Über das Verständnis der Schüler von Dezimalzahlen und auftretende Schülerfehler. – Mathem. Unterrichtspraxis 1/1987, S. 25–40.

[11] K. HASEMANN: Über die Schwierigkeiten von Hauptschülern bei der Bruchrechnung. - OSM, Reihe P, Heft 9, Universität Osnabrück 1979.
[12] K. HASEMANN: Lernschwierigkeiten in der Bruchrechnung. - In: Vollrath, H.-J. (Hg.): Zahlbereiche, Didaktische Materialien für die Hauptschule. Stuttgart 1983, S. 26-44.
[13] J. HIEBERT: Children's Knowledge Of Common And Decimal Fractions. - Educ. - Urban-Soc., August 1985, S. 427-437.
[14] E. JONES: Historical Conflict - Decimal versus vulgar fractions. - Arithmetic Teacher, 1960, S. 184-188.
[15] K. KÜHNHOLD - F. PADBERG: Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Subtraktion natürlicher Zahlen. - Der Mathematikunterricht 3/1986, S. 6-16.
[16] F. LÉONARD - C. GRISVARD: Sur deux régles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. - Bull. Assoc. Prof. Math., Februar 1981, S. 47-60.
[17] R. NEUMANN: Dezimalbrüche (Begriff, Addition, Multiplikation) - Einführungswege und typische Schülerschwierigkeiten. - Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe I. Universität Bielefeld 1988.
[18] F. PADBERG: Didaktik der Bruchrechnung. - Gemeine Brüche - Dezimalbrüche. - Mannheim 1989.
[19] F. PADBERG: Über typische Schülerschwierigkeiten in der Bruchrechnung - Bestandsaufnahme und Konsequenzen. - Der Mathematikunterricht, 3/1986, S. 58-77.
[20] F. PADBERG: Didaktik der Arithmetik. - Mannheim 1986.
[21] F. PADBERG: Elementare Zahlentheorie. - Mannheim 1988.
[22] F. PADBERG: Problembereiche bei den Dezimalbrüchen. Typische bzw. systematische Fehler und Fehlvorstellungen - Ursachen - Gegenmaßnahmen. - DFG-Projekt, 1989.
[23] G. PIETZSCH: Was ist geblieben - Was ist geworden? Die Behandlung der Zahlbereiche in der allgemeinbildenden Schule der DDR im Verlauf der vergangenen 30 Jahre. - Beiträge zum Mathematikunterricht 1988, Bad Salzdetfurth 1988, S. 41-48.
[24] G. RUDDOCK u. a.: Assessing Mathematics: 2. Concepts and Skills: Decimal Place Value. - Mathematics in School, Januar 1984, S. 24-28.
[25] K.-P. SCHRAGE: Bruchrechnung international - Eine Bestandsaufnahme in 4 Ländern. - Dissertation, Universität Münster 1988.
[26] N. SEWING: Dezimalbrüche (Begriff, Subtraktion, Division) - Einführungswege und typische Schülerschwierigkeiten. - Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe I. Universität Bielefeld 1988.
[27] J. H. VANCE: Diagnosing Pupil Performance in Decimal Multiplication. - Vector, 1984, S. 26-32.
[28] D. WEARNE - J. HIEBERT: Über typische Schülerfehler im Bereich der Dezimalbrüche. - Der Mathematikunterricht, 3/1986, S. 78-88. □