Friedhelm PADBERG, Bielefeld

Dezimalbrüche - problemlos und leicht?

Die Bruchrechnung mit den sogenannten *gemeinen Brüchen* bereitet bekanntlich vielen Schülern große Schwierigkeiten. Dies belegt beispielsweise die von mir 1986 publizierte empirische Untersuchung an über 1000 Schülern von Realschulen in Ostwestfalen (vergl. [2]). Dagegen hört man kaum Klagen über fehlende Unterrichtserfolge bei der Behandlung der *Dezimalbrüche*. Kann man hieraus schließen, daß die Behandlung von Dezimalbrüchen problemlos und leicht ist?

Eine Antwort auf diese Frage liefern die Ergebnisse einer gerade von mir abgeschlossenen, von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützten empirischen Untersuchung an knapp 900 Gymnasialschülern aus 34 Klassen des siebten Schuljahres von 11 verschiedenen Gymnasien in Westfalen (vergl. [3], [4]). Ergänzend verweise ich gelegentlich auch auf Ergebnisse zweier von mir angeregter Untersuchungen über Fehler bei Dezimalbrüchen, die in 17 Klassen an 8 verschiedenen Realschulen in Ostwestfalen durchgeführt wurden ([1], [6]).

1. Problematische Sprechweise

Einen nicht unerheblichen Anteil an den Fehlern bei der Benutzung von Dezimalbrüchen hat die im *täglichen Leben* weit verbreitete Benennung von z. B. 3,45 als drei Komma *fünfundvierzig*. Diese Sprechweise muß im *Mathematikunterricht* unbedingt *vermieden* werden, da sie eine Fülle typischer *Fehler* bzw. *Schwierigkeiten* verursacht. (vergl. [4])

2. Größenvergleich

Schüler (auch an Gymnasien) wenden bei der Ordnung von Dezimalbrüchen gehäuft folgende *Fehlerstrategien* an:

(1) *Kein-Komma-Strategie* (kurz: KK-Strategie).
Die Schüler lassen bei den Dezimalbrüchen das Komma fort und fassen den gesamten Dezimalbruch als eine natürliche Zahl auf. Die Ordnung dieser natürlichen Zahlen übertragen sie auf die Dezimalbrüche.

(2) *Komma-trennt-Strategie* (kurz: KT-Strategie)
Das Komma trennt den Dezimalbruch in zwei natürliche Zahlen, die getrennt verglichen werden.

(3) *Je-mehr-Dezimalen-desto-kleiner-Strategie* (kurz: MK-Strategie).
Nach dieser Strategie ist *die* Zahl die *kleinere*, die *mehr* Dezimalen bzw. umgekehrt die Zahl die *größere*, die *weniger* Dezimalen hat. *Ursache* dieses Fehlers ist die falsche Deutung des folgenden Sachverhaltes: Bei Dezimalbrüchen hat jede *weiter rechts* stehende Ziffer einen *kleineren* Wert, nämlich $\frac{1}{10}$ des Stellenwertes der vorhergehenden Ziffer. Hieraus wird fehlerhaft geschlossen: Je mehr Ziffern rechts vom Komma, desto kleiner ist der Wert des *ganzen* Dezimalbruchs.

3. Addition

Nach unseren Untersuchungen an Gymnasialschülern (vergl. [4] und Realschülern ([1]) *massieren* sich die Fehler bei der Addition von Dezimalbrüchen auf nur *eine* Fehlerstrategie, nämlich auf die *Komma-trennt*-Strategie (KT-Strategie): So rechnen 18 % der *Gymnasialschüler* $3,48 + 4,2 = 7,50$ oder fast genau so viele $2,75 + 3,8 = 5,83$. Beachtliche 13 % machen den KT-Fehler bei diesem Aufgabentyp *systematisch* und rund 6 % formulieren sogar die *Additionsregel* im Sinne dieser KT-Strategie. Bei den *Realschülern* rechnen gar 31 % fehlerhaft $2,7 + 3,11 = 5,18$ und immerhin noch 16 % $6,31 + 7,802 = 13,833$.

Einige der getesteten Schüler werden zu diesem KT-Fehler nur durch *Flüchtigkeit* verführt, insbesondere bei Aufgaben, die man *schnell im Kopf* rechnen kann. Andere dagegen sehen einen Dezimalbruch offensichtlich nicht als *eine* Zahl, sondern als ein Gebilde an, das aus *zwei* natürlichen Zahlen besteht, die man getrennt manipulieren muß. In dieselbe Richtung führt auch die häufig erfolgreiche Strategie „Verknüpfe Gleichartiges". Diese Strategie ist bei der Addition von Dezimalbrüchen richtig, wenn man stellengerecht Zehner, Einer, Zehntel, Hundertstel usw. addiert. Sie ist hingegen *nicht* stets richtig, wenn man die natürlichen Zahlen vor dem Komma und die Dezimalen nach dem Komma jeweils als gleichartigen Gesamtblock betrachtet und addiert.

Das Hauptfehlermuster bei der Addition gemeiner Brüche, nämlich $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ entspricht offensichtlich weitgehendst dieser KT-Strategie bei der Addition von Dezimalbrüchen.

4. Subtraktion

Auch bei der Subtraktion ist der *Komma-trennt-Fehler* bei entsprechenden Aufgaben jeweils der *wichtigste* Einzelfehler. So rechnen 7% bzw. 8% der Gymnasiasten $0,87 - 0,3 = 0,84$ bzw. $5,07 - 1,3 = 4,04$ (oder 4,4) oder 14% bzw. 10% der Realschüler $0,85 - 0,5 = 0,8$ bzw. $8,743 - 5,31 = 3,712$ (vgl. auch [7], [5]). Der Komma-trennt-Fehler unterläuft den untersuchten Schülern bei der Addition wesentlich *öfter* als bei der Subtraktion. Dies hängt damit zusammen, daß die KT-Strategie bei der Addition *viel häufiger* angewandt werden kann - nämlich bei praktisch *allen* Additionsaufgaben - und dort auch häufiger zum Erfolg führt, während sie bei der Subtraktion nur in *Sonderfällen* naheliegt und selbst bei Dezimalbrüchen mit gleicher Anzahl von Dezimalen wegen der häufig erforderlichen Überträge nur *relativ selten* zum Erfolg führt.

5. Multiplikation

Während KT-Fehler bei der Multiplikation mit *Zehnerpotenzen* nur *relativ selten* auftreten, sind sie im *Normalfall* der *häufigste* Multiplikationsfehler (vgl. auch [7]). So rechnen 55 % bzw. 44% der getesteten Realschüler $0,4 \cdot 0,2 = 0,8$ bzw. $0,8 \cdot 0,11 = 0,88$ ([1])oder rund 30 % der Gymnasiasten $0,2 \cdot 0,3 = 0,6$ bzw. $0,8 \cdot 0,11 = 0,88$. Der KT-Fehler erfolgt *besonders häufig* bei einfachen Multiplikationsaufgaben, die *im Kopf* gerechnet werden, speziell wenn zusätzlich die Zahl *vor* dem Komma jeweils eine *Null* ist. Ist diese Zahl dagegen von Null verschieden, so wird der KT-Fehler deutlich *seltener* gemacht. So rechnen rund 10 % der Schüler $15,2 \cdot 3,24 = 45,48$ (Realschule; [1]) bzw. $3,2 \cdot 2,4 = 6,8$ (Gymnasium; [4]) Einige Schüler formulieren sogar die *Multiplikationsregel* im Sinne dieser fehlerhaften KT-Vorstellung.

6. Division

An Aufgaben wie $5 : 0,1$ oder $5 : 0,001$, bei denen keine Divisionsfehler aus dem Bereich des Kalküls in $\mathbb{N}$ das Bild überlagern, läßt sich gut abklären, wieweit der Divisionskalkül *verstanden* worden ist. Große *Unsicherheiten* gegenüber diesem Aufgabentyp – und dies sogar bei Gymnasialschülern! – sind an der hohen Quote von Auslassungen (zwischen rund 30 % und 40 %!) deutlich zu erkennen. Die häufigsten Fehler, nämlich $5 : 0,1 = 0,5$ bzw. $5 : 0,001 = 0,005$, können im Sinne der schon bei der Multiplikation mit 0,1 bzw 0,001 beobachteten Schülerstrategie gedeutet werden, daß sich die Anzahl der Nachkommastellen nach der Zahl mit den *meisten* Dezimalen richtet. Auch die Division durch *Zehnerpotenzen* offenbart *grundlegende Defizite*.
Die hohen Fehlerquoten bei einfachen Divisionsaufgaben vom Typ *Dezimalbruch durch natürliche Zahl* wie z.B. $8,24 : 4$ oder $18,27 : 9$ überraschen auf den ersten Blick. Ursache hierfür ist jedoch die häufig benutzte KT-Strategie. So rechnet fast jeder vierte(!) Schüler $8,24 : 4 = 2,6$ oder $18,27 : 9 = 2,3$. Bei Untersuchungen mit Realschülern rechnen sogar über 40 % der untersuchten Schüler beispielsweise $0,56 : 7 = 0,8$ ([6]). Der KT-Fehler wird hier allerdings meist aus Flüchtigkeit gemacht, *systematisch* unterläuft er bei geeigneten Aufgaben rund 7 % der Gymnasialschüler.

Bei der Division von *Dezimalbrüchen durch Dezimalbrüche* fallen den Schülern Aufgaben mit der *gleichen* Anzahl von Dezimalen i.a. leichter als Aufgaben mit einer unterschiedlichen Anzahl. Besonders fehlerträchtig ist der Aufgabentyp, bei dem der Divisor mehr Stellen aufweist als der Dividend (Beispiel: $0,5 : 0,25$). Das erforderliche Anhängen von Endnullen beim Dividenden bereitet hier Probleme. Aber auch Aufgaben, bei denen eine oder mehrere *Nullen* nach dem Komma vorkommen, sind i.a. fehlerträchtiger als Aufgaben ohne Nullen. Bieten Aufgaben wie $0,44 : 0,11$ die Möglichkeit zur Anwendung der KT-Strategie, so wird dies reichlich genutzt. So rechnet fast jeder 5. Gymnasiast $0,44 : 0,11 = 0,4$. Bei *diesem* Aufgabentyp wird auch bei geeigneten Aufgaben die KK-Strategie angewandt. Lösungen wie $0,36 : 0,9 = 4$ oder $0,028 : 0,4 = 7$ kommen häufiger vor. Besteht Unklarheit über die Anzahl der Dezimalen beim Ergebnis, so richten sich viele Schüler nach der Anzahl der Dezimalen des Dividenden oder Divisors. Dieser Fehler kommt bei einer *gleichen* Anzahl von Dezimalen – möglicherweise auch infolge eines Transfers von der Addition und Subtraktion – besonders häufig vor. So rechnen 15 % der untersuchten Schüler $5,6 : 0,7 = 0,8$. Ist die Anzahl der Dezimalen bei Dividend und Divisor *unterschiedlich*, so läßt sich bei diesem Aufgabentyp *keine* klare Tendenz bei den Schülern zur rein formalen Übernahme der *Anzahl* der Dezimalen vom Dividend oder Divisor bzw. von der Zahl mit den meisten oder wenigsten Dezimalen erkennen. Läßt sich die Division *„im Kopf"* durchführen (wie bei $0,44 : 0,11; 5,6 : 0,7; 0,028 : 0,4; 0,36 : 0,9; 3,3 : 0,11$ oder $0,6 : 0,02$), so kann man die *häufigste Schülerstrategie* einheitlich auch so beschreiben: Man dividiert die beiden betreffenden Zahlen „im Kopf" und schreibt dann vor dieses Ergebnis „$0,\ldots$", also z.B. $6 : 2 = 3$, daher $0,6 : 0,02 = 0,3$. Einige Schüler formulieren diese Strategie sogar als Regel aus: „Ich rechne im Kopf ohne Komma und schreibe dann $0,\ldots$".

7. Schlußbemerkungen

Die vorgestellte Untersuchung belegt eindeutig, daß das Rechnen mit Dezimalbrüchen *keineswegs* problemlos und leicht ist. Der Unterrichtserfolg ist nämlich bei den Dezimalbrüchen *nicht* generell höher als bei den – als schwierig eingestuften – gemeinen Brüchen. Vielmehr liegen die Leistungen *nur* bei der Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen höher, und zwar etwa auf der Höhe für *gleichnamige* Brüche, während sie bei der Multiplikation und Division *unter* den entsprechenden Werten für die gemeinen Brüche liegen.

Eine zu starke, undifferenzierte Betonung der Analogien zum Rechnen in $\mathbb{N}$ kann leicht Fehler verursachen. Zur Bekämpfung und auch schon Vermeidung vieler Schwierigkeiten und für ein vertieftes Verständnis der Dezimalbrüche ist die Kenntnis von gemeinen Brüchen und ihres Zusammenhangs mit den Dezimalbrüchen grundlegend. Ein weitgehender oder gar völliger Verzicht auf die Behandlung von gemeinen Brüchen ist daher keineswegs sinnvoll.

Literatur

[1] **Neumann, R.**: Dezimalbrüche (Begriff, Addition, Multiplikation) – Einführungswege und typische Schülerschwierigkeiten. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe I. Universität Bielefeld 1988

[2] **Padberg, F.**: Über typische Schülerschwierigkeiten in der Bruchrechnung – Bestandsaufnahme und Konsequenzen. Der Mathematikunterricht, 3/1986, S. 58 – 77

[3] **Padberg, F.**: Problembreiche bei den Dezimalbrüchen. Typische bzw. systematische Fehler und Fehlvorstellungen – Ursachen – Gegenmaßnahmen. DFG–Projekt, 1989

[4] **Padberg, F.**: Didaktik der Bruchrechnung – Gemeine Brüche / Dezimalbrüche, Mannheim 1989b.

[5] **Ruddock/Mason/Foxmann:** Assessing Mathematics: 2. Concepts and Skills: Decimal Place Value. Mathematics in School, Januar 1984, S. 24 – 28

[6] **Sewing, N.**: Dezimalbrüche (Begriff, Subtraktion, Division) – Einführungswege und typische Schülerschwierigkeiten. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe I. Universität Bielefeld 1988

[7] **Wearne, D./ Hiebert, J.**: Über typische Schülerfehler im Bereich der Dezimalbrüche. Der Mathematikunterricht, 3/1986, S. 78 – 88