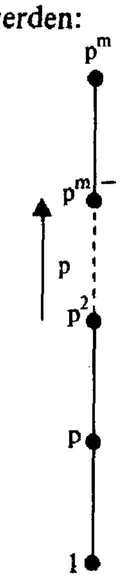
Friedhelm PADBERG, Münster

Teilergraphen und Teilbarkeitsuntersuchungen

In der Menge der natürlichen Zahlen definiert man bekanntlich: a ist Teiler von b genau dann, wenn ein q existiert, so daß $q \cdot a = b$. Die durch die zweistellige Aussageform „a ist Teiler von b" gegebene Teilbarkeitsrelation läßt sich in jeder endlichen Teilmenge der natürlichen Zahlen, wie jede Relation, durch ein *Pfeildiagramm* veranschaulichen. Dieses Pfeildiagramm kann man in diesem Fall — wie auch bei allen anderen identitiven Ordnungsrelationen — wesentlich vereinfachen und somit übersichtlicher gestalten: Wegen der Reflexivität und Transitivität können wir nämlich ohne Informationsverlust auf alle Ring- und Überbrückungspfeile, wegen der Identitivität der Teilbarkeitsrelation zusätzlich auf alle Pfeilspitzen im Pfeildiagramm verzichten, wenn wir alle Punkte so anordnen, daß die Pfeile senkrecht oder schräg nach oben zeigen. Das so vereinfachte Pfeildiagramm bezüglich der Teilbarkeitsrelation bezeichnen wir kurz als *Teilergraphen*. Teilergraphen sind also spezielle Hasse-Diagramme.

Für die *Teilergraphen von „Teilermengen"* $T(a) = \{x \in \mathbf{N} \mid x \mid a\}$ — und auf diese können wir uns bei Teilbarkeitsuntersuchungen im wesentlichen beschränken — soll im folgenden zunächst eine einfache und im Unterricht praktikable *Typisierung* angegeben werden:

Ist *a eine Primzahlpotenz,* also $a = p^m$ mit $m \in \mathbf{N}$, so können wir alle Elemente der Teilermenge $T(p^m)$ vertikal übereinander — also in Form einer *Kette* — der Größe nach anordnen, wie die Abb. 1 zeigt; denn bei 2 beliebig herausgegriffenen Elementen a, $b \in T(p^m)$ gilt: $a \mid b$ oder $b \mid a$, und daher müssen alle Elemente von $T(p^m)$ auf einem von 1 bis p^m unverzweigt verlaufenden Kantenzug liegen. Dem Aufsteigen in der Kette entspricht ein Multiplizieren mit p, dem Absteigen ein Dividieren durch p.



Ist a als ein *Produkt zweier verschiedener Primzahlpotenzen* darstellbar, also $a = p^m q^n$ mit $m, n \in \mathbf{N}$, so können wir nicht sämtliche Elemente der Teilermenge $T(p^m q^n)$ in Form einer Kette anordnen, da beispielsweise weder $p \mid q$ noch $q \mid p$ gilt.

Abb. 1: Teilergraph von $T(p^m)$

Abb. 2 verdeutlicht das Vorgehen in diesem Fall am Beispiel des Teilergraphen von $T(p^3q^4)$. Wir ordnen die Teilermengen $T(p^3)$ und $T(q^4)$ jeweils in Form einer Kette an und lassen diese Ketten aufeinander senkrecht stehen. Weiter ordnen wir die mit q, q^2, q^3 bzw. q^4 multiplizierten Elemente von $T(p^3)$ jeweils auf Ketten parallel zur Kette von $T(p^3)$ an und ziehen Parallelen zur Kette von $T(q^4)$. Als Teilergraphen von $T(p^3q^4)$ erhalten wir so ein aus $3 \cdot 4$ Quadraten zusammengesetztes Rechteck, als Teilergraphen von $T(p^m q^n)$ ein aus $m \cdot n$ Quadraten zusammengesetztes Rechteck bzw. — falls $m = n$ — Quadrat.

Die Abb. 2 ist ein Teilergraph von $T(p^3q^4)$, da sie sämtliche Elemente von $T(p^3q^4)$ enthält, alle eingezeichneten Kanten notwendig sind (dem Aufsteigen nach halblinks im Teilergraphen entspricht ein Multiplizieren mit p, dem Aufsteigen nach halbrechts ein Multiplizieren mit q, wobei p und q Primzahlen sind) und da auch schon alle möglichen Kanten eingezeichnet sind (innerhalb einer Zeile ist nämlich jede rechts benachbarte Zahl das $\frac{q}{p}$-fache ihrer Vorgängerin und $\frac{q}{p} \notin \mathbf{N}$).

Ist a schließlich als ein *Produkt dreier verschiedener Primzahlpotenzen* darstellbar, also $a = p^m q^n r^s$ mit $m, n, s \in \mathbf{N}$, so benötigen wir für eine übersichtliche Darstellung des Teilergraphen von $T(p^m q^n r^s)$ schon 3 Dimensionen, wie die Abb. 3 des Teilergraphen von $T(pqr^2)$ verdeutlicht.

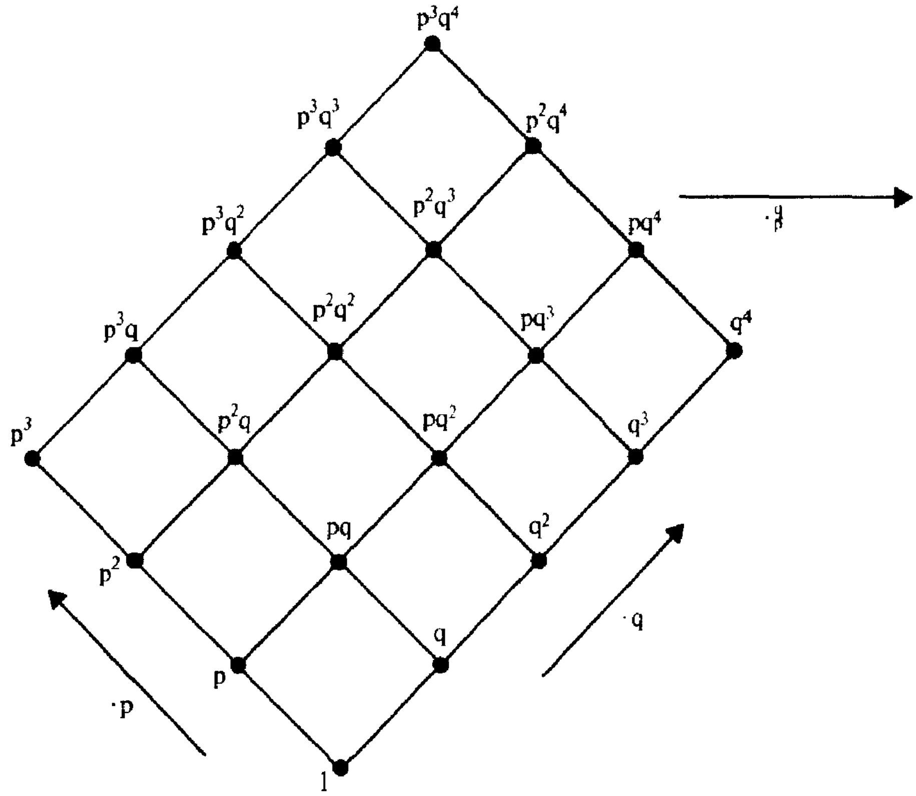


Abb. 2: Teilergraph von $T(p^3q^4)$

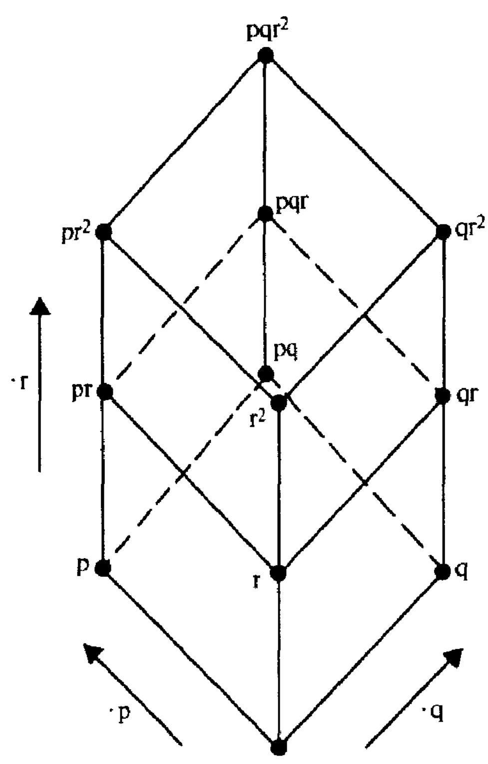


Abb. 3: Teilergraph von $T(pqr^2)$

In der Horizontalen ordnen wir die Elemente von T(pq), im allgemeinen Fall von $T(p^m q^n)$, an — wie oben gezeigt —, in der Vertikalen die Elemente von $T(r^2)$ bzw. von $T(r^s)$ sowie auf gleichgerichteten Parallelen hierzu die Mengen, die aus $T(r^2)$ durch Multiplikation mit jeweils einem Element von T(pq) bzw. aus $T(r^s)$ durch Multiplikation mit jeweils einem Element von $T(p^m q^n)$ entstehen. Der Teilergraph setzt sich — wie Abb. 3 zeigt — aus $m \cdot n \cdot s$ Würfeln zusammen und hat die Form eines Quaders, im Sonderfall $m = n = s$ die Form eines Würfels.

Jede halblinks benachbarte Zahl ist das p-fache, jede halbrechts benachbarte Zahl das q-fache und jede oben benachbarte Zahl ist das r-fache einer gegebenen Zahl des Teilergraphen. Analog wie beim vorhergehenden Teilergraphen macht man sich klar, daß in Abb. 3 bzw. in einer entsprechenden Abb. des Teilergraphen von $T(p^m q^n r^s)$ sämtliche eingezeichneten Kanten notwendig und keine weiteren Kanten möglich sind, daß also eine derartige Abbildung ein Teilergraph von $T(p^m q^n r^s)$ ist.

Unser Verfahren versagt bei der Konstruktion von Teilergraphen mit *mehr als drei* verschiedenen Primfaktoren. Diese Tatsache stört jedoch bei der praktischen Anwendung im Unterricht nicht, da so beispielsweise die Teilergraphen aller Teilermengen T(a) mit ungeradem $a < 1000$ konstruiert werden können (; denn $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155$). Für gerade $a < 1000$ versagt dieses Verfahren insgesamt 14-mal, das erste Mal allerdings erst bei der Zahl $a = 210$.

Arbeitet man mit so *normierten* Teilergraphen — also bei Teilermengen $T(p^m)$ mit Ketten, bei Teilermengen $T(p^m q^n)$ mit aus Quadraten zusammengesetzten Rechtecken bzw. Quadraten und bei Teilermengen $T(p^m q^n r^s)$ mit aus Würfeln zusammengesetzten Quadern bzw. Würfeln —, so eignen sich die Teilergraphen als gutes Hilfsmittel bei der Durchführung von Teilbarkeitsuntersuchungen in der Menge der natürlichen Zahlen, wie im folgenden an 4 Beispielen verdeutlicht werden soll. Hierbei werden insbesondere auch die didaktischen Möglichkeiten der Teilergraphen als Mittel einer elementar — anschaulichen Beweisführung sichtbar.

1. Beispiel: Bestimmung der Elemente verschiedener Teilermengen, der gemeinsamen Teiler, des ggT und kgV.

Wegen der Transitivität und der Reflexivität der Teilbarkeitsrelation sind sämtliche Elemente eines Teilergraphen, die von einer gegebenen Zahl aus entlang eines gerichteten Kantenzuges (auch evtl der Länge 0) erreichbar sind, Vielfache, sind alle Elemente, die über einen Kantenzug in *ausschließlich* entgegengesetzter Richtung erreichbar sind, Teiler dieser Zahl. Daher können wir dem Teilergraphen von T(648) — Abb. 4 —, also einem Teilergraphen vom Typ $T(p^n q^m)$, beispielsweise entnehmen:

a) Die (vollständigen) *Teilermengen von 20 verschiedenen Zahlen,* etwa von 324, 216, 54 und 36. Die Teilermengen von beispielsweise 54 und 36 bestehen nämlich aus genau den Elementen, die im Teilergraphen von 54 bzw. 36 aus auf ausschließlich abwärts gerichteten Kantenzügen erreichbar sind (vgl. Abb. 4).

b) Die *gemeinsamen Teiler* je zweier (oder mehrerer) beliebiger Elemente des Teilergraphen, so etwa die gemeinsamen Teiler von 54 und 36. In dem Bereich, in dem sich die beiden Graphen von T(36) und T(54) überdecken, können wir nämlich die gemeinsamen Teiler von 54 und 36 ablesen, so u. a. 18, 9 und 6.

c) Wir können den *ggT* je zweier (oder mehrerer) beliebiger Elemente des Teilergraphen bequem ablesen. So ist 18 als höchstes gemeinsames Element der größte gemeinsame Teiler von 54 und 36, da in der Menge der natürlichen Zahlen aus $a \mid b$ und $a \neq b$ folgt: $a < b$.

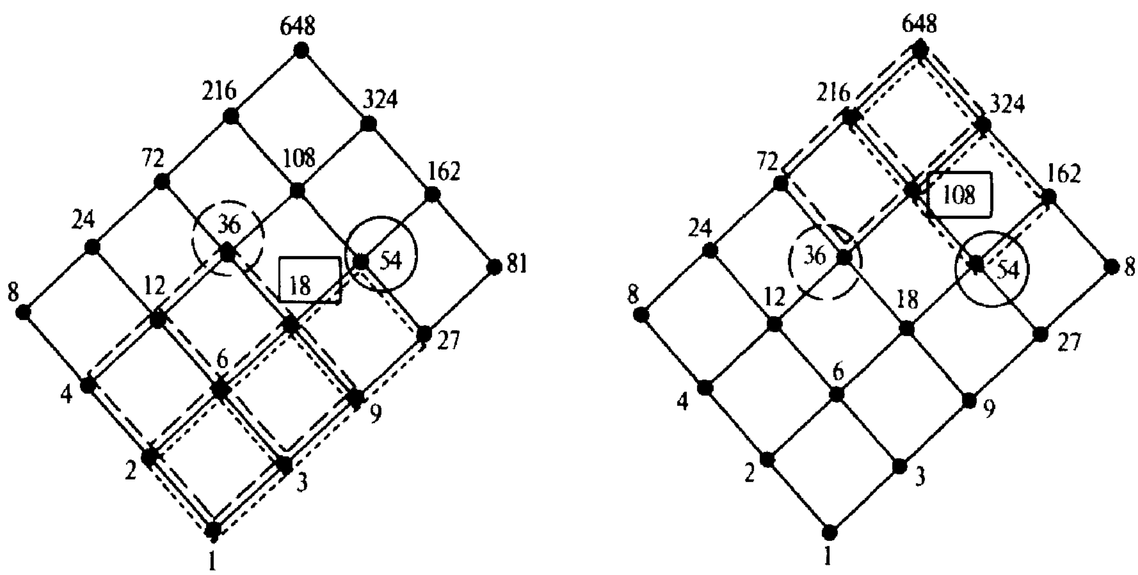


Abb. 4 Teilergraphen von T(648) und ggT- bzw. kgV-Bestimmung

d) Wir können weiterhin *einige gemeinsame Vielfache und das kgV* je zweier (oder mehrerer) beliebiger Elemente des Teilergraphen leicht bestimmen. So sind in der Abb. 4 alle Vielfachen von 36 und 54, die Elemente des Teilergraphen sind, durch verschiedene Schraffierung kenntlich gemacht. 108 ist als niedrigstes gemeinsames Element das kleinste gemeinsame Vielfache (, da — zusätzlich zu den beim ggT genannten Gründen — im kgV(36, 54) alle Primzahlen als Faktoren vorkommen müssen, die in der Primfaktorzerlegung von a oder b vorkommen.)

2. Beispiel: Anschauliche Ableitung des Satzes: $ggT(a, b) \cdot kgV(a, b) = a \cdot b$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$, einschließlich des Sonderfalles: $kgV(a,b) = a \cdot b$ für teilerfremde $a, b \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten hierzu als Beispiel wiederum den Teilergraphen von T(648) (Abb. 5):

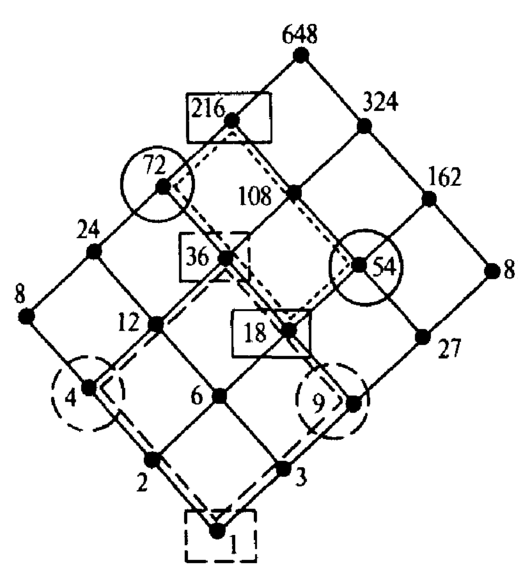


Abb. 5: Teilergraph von T(648) und Ableitung von $ggT(a, b) \cdot kgV(a, b) = a \cdot b$

Im Sonderfall $a \mid b$ können wir ihm direkt entnehmen: b liegt zumindest genau so hoch wie a, daher: $ggT(a, b) = a$, $kgV(a, b) = b$ und deshalb $ggT(a, b) \cdot kgV(a, b) = a \cdot b$.

Die Verhältnisse im Fall $a \nmid b$ verdeutlichen wir uns an den Beispielen $a = 9$, $b = 4$ ($ggT(9,4) = 1$, $kgV(9,4) = 36$) bzw. $a = 54$, $b = 72$ ($ggT(54,72) = 18$, $kgV(54,72) = 216$). Wir erkennen:

Im Fall $a \nmid b$ bilden $kgV(a, b)$, $ggT(a, b)$, a und b im Teilergraphen von $Tp^m q^n$) die 4 Eckpunkte eines Rechtecks bzw. Quadrats der Form (vgl. Abb. 6), wobei man aus a durch Division durch p^r den $ggT(a, b)$, aus b durch Multiplikation mit p^r ($1 \leq r \leq m$) das $kgV(a, b)$ erhält.

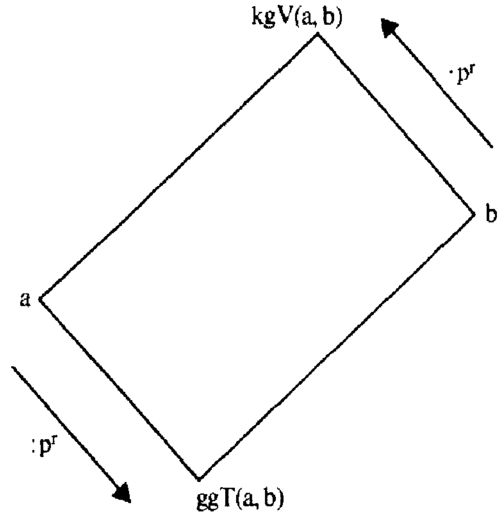


Abb. 6: Ableitung von $ggT(a, b) \cdot kgV(a, b) = a \cdot b$

Daher gilt: $ggT(a, b) \cdot kgV(a, b) = (a : p^r) \cdot (b \cdot p^r) = a \cdot b.$

Unsere Aussage umfaßt auch den Sonderfall, daß a und b teilerfremd sind. In diesem Fall liegen nämlich a und b auf der halblinken und halbrechten „Außenkante" des Teilergraphen (; denn alle übrigen Zahlen besitzen sowohl p wie q in ihrer Primfaktorzerlegung, sind also nicht teilerfremd.) Wegen $ggT(a, b) = 1$ muß in diesem Fall also $p^r = a$ sein, daher gilt: $kgV(a, b) = a \cdot b$.

Durch Verallgemeinerung dieses Ansatzes können wir so auch die Aussage $ggT(a, b) \cdot kgV(a, b) = a \cdot b$ für beliebige a, b aus Teilermengen mit 3 verschiedenen Primfaktoren anschaulich ableiten.

Im Zusammenhang mit der Ableitung obigen Satzes lassen sich auch unmittelbar folgende einfache Aussagen über den ggT und das kgV zeigen: $ggT(a, b) = ggT(b, a)$, $kgV(a, b) = kgV(b, a)$, $ggT(1, b) = 1$, $kgV(1, b) = b$ und $ggT(a, a) = kgV(a, a) = a$ für alle natürlichen Zahlen a, b.

3. Beispiel: Ableitung einiger Teilbarkeitsregeln im dezimalen und in einem nichtdezimalen Stellenwertsystem.

Dem Teilergraphen von T(100) (vgl. Abb. 7) können wir u. a. entnehmen:

Ist eine Zahl a durch 10 teilbar, so auch durch 2 und 5, ist a durch 100 teilbar, so auch durch 2, 4, 5, 10, 20, 25 und 50. Im letzteren Fall kommt nämlich im Teilergraphen von a die Zahl 100 — und daher auch alle Elemente von T(100) — wegen der Transitivität und der Reflexivität der Teilbarkeitsrelation vor. Wegen $100 \mid a$ existiert im Teilergraphen von T(a) ein gerichteter Kantenzug von 100 nach a, also auch von jedem Element von T(100) nach a.

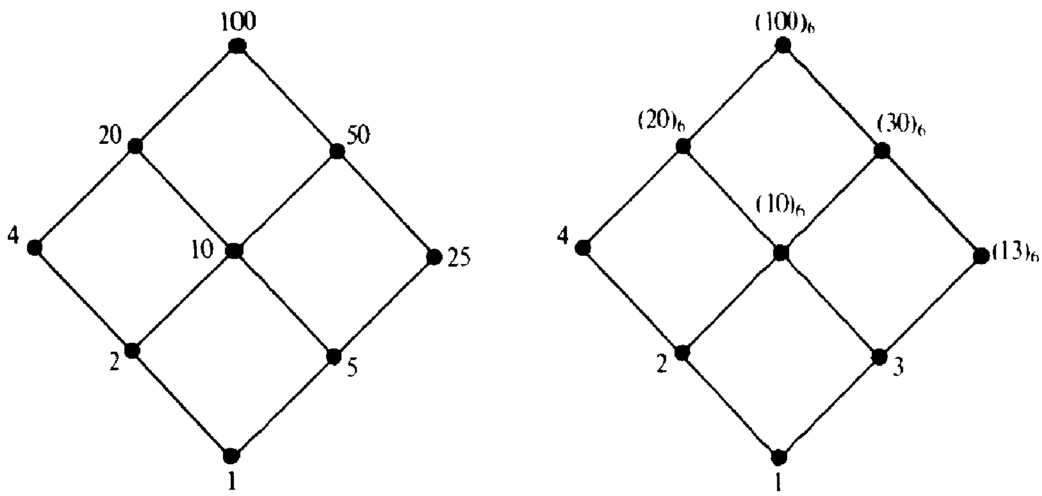


Abb. 7: Teilergraphen von T(100) bzw. von $T((100)_6)$

Analog kann man etwa auch zeigen: $9 \mid a \rightarrow 3 \mid a$; $6 \mid a \rightarrow 2 \mid a$ und $3 \mid a$.

Wollen wir entsprechend Teilbarkeitsregeln in einem nichtdezimalen Stellenwertsystem ableiten, etwa im Sechsersystem, so stellen wir den Teilergraphen von $(100)_6 = 36$ zunächst im vertrauten Dezimalsystem auf, übersetzen dann die einzelnen Zahlen jeweils ins Sechsersystem und erhalten Abb. 7.

Wir können Abb. 7 u. a. entnehmen: Ist eine Zahl a durch $(10)_6$ teilbar, so auch durch 2 und 3 oder ist a durch $(100)_6$ teilbar, so auch durch 2, 3, 4, $(10)_6$, $(13)_6$, $(20)_6$ und $(30)_6$.

4. Beispiel: Lösung von Aufgaben des Typs: Welche natürlichen Zahlen a <1000 haben in ihrer Primfaktorzerlegung ausschließlich die Primfaktoren: a) 5 oder 7, b) 5 und 7?

Der Lösungsweg geht aus der folgenden Abbildung hervor (vgl. Abb. 8):

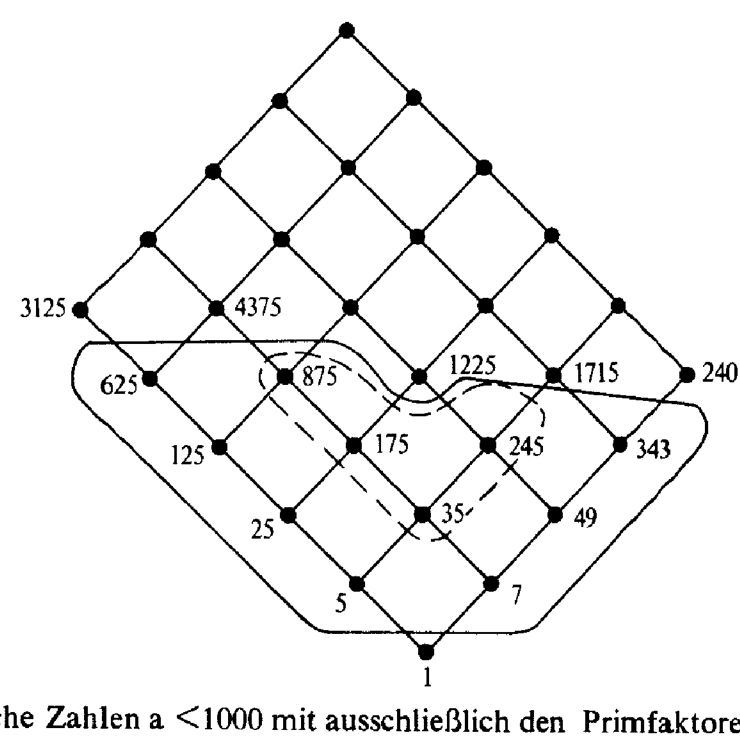


Abb. 8: Natürliche Zahlen a <1000 mit ausschließlich den Primfaktoren: a) 5 oder 7, b) 5 und 7 in der Primfaktorzerlegung.

Auf der halblinken „Außenkante" tragen wir 1 und die Vielfachen von 5, auf der halbrechten „Außenkante" 1 und die Vielfachen von 7 auf. Die Zahlen im gestrichelt umrandeten Gebiet sind die Vielfachen von 5 und 7, die Zahlen im glatt umrandeten Gebiet die Vielfachen von 5 oder 7.

Im Zusammenhang der Anwendbarkeit von Teilergraphen bei Teilbarkeitsuntersuchungen sei abschließend noch erwähnt, daß man mit Teilergraphen von Teilermengen auch gut den Zusammenhang zwischen Elementanzahl von Teilermengen und Primfaktorzerlegung aufdecken lassen kann.

Die Einsatzmöglichkeiten von Teilergraphen beschränken sich jedoch nicht nur auf Teilbarkeitsuntersuchungen, vielmehr kann man sie beispielsweise auch mit Erfolg bei *ordnungstheoretischen und verbandstheoretischen Fragestellungen* einsetzen, wie zum Schluß an dieser Stelle nur knapp skizziert werden kann.

Am Beispiel der Teilergraphen von $T(p^m)$ und $T(p^m q^n)$ kann man gut und anschaulich den Unterschied zwischen vollständiger und nicht vollständiger *Ordnung* klären und übersichtlich feststellen lassen, welche Elemente von $T(p^m q^n)$ — im konkreten Beispiel — nicht miteinander vergleichbar sind und auch alle Teilmengen bestimmen lassen, die sich vollständig ordnen lassen.

Man kann außerdem feststellen lassen, daß verschiedene Teilermengen dieselbe Ordnungsstruktur besitzen können, etwa alle verschiedenen Teilermengen $T(p^m q^n)$ mit festem m und n und kann so Vorarbeiten für den Begriff des Ordnungsisomorphismus leisten. Günstig ist auch ein Vergleich der Teilergraphen von Teilermengen mit dem Ordnungsdiagramm derselben Teilermenge bzgl. der $\leq$-Relation.

Die Teilermengen T(n) mit $n \in / \mathbb{N}$ haben bezüglich der Teilbarkeitsrelation bzw. unter den Operationen der ggT- und kgV-Bildung schließlich auch die *Struktur eines Verbandes.* Die Teilergraphen sind daher übersichtliche Modelle dieser Verbände. Führt man den Begriff „Verband" ordnungstheoretisch ein, so kann man an jedem Teilergraphen übersichtlich und anschaulich die oberen und unteren Schranken sowie das Supremum und Infimum jeder beliebigen zweielementigen Teilmenge ablesen und so bei einfachen Teilergraphen mit wenig Aufwand direkt die Verbandsstruktur verifizieren lassen. Aber auch bei algebraischer Einführung ist dies bei einfachen Teilergraphen gut möglich.

Die Teilergraphen von T(1), T(p), T(pq) und T(pqr) sind sogar schon Modelle für *Boolesche* Verbände, wie man an den zugehörigen Teilergraphen leicht feststellen kann — insbesondere geht so die Bestimmung des zu einem beliebigen Element komplementären Elements leicht vonstatten —, sie sind sogar schon Modelle für die vier (der Elementanzahl nach) kleinsten Booleschen Verbände.