Teilergraphen

Von Friedhelm Padberg in Beckum

Bei der Untersuchung der Teilbarkeit der natürlichen Zahlen in den Klassen 5 bzw. 6 bietet sich die Behandlung von Teilergraphen an, um so zu einem tieferen Verständnis für den Aufbau und die Struktur der natürlichen Zahlen zu gelangen. So findet man die Behandlung von Teilergraphen schon vereinzelt in neuen Mathematikbüchern, besonders ausführlich im Unterrichtswerk von Winter/Ziegler (*Neue Mathematik*, 5. Schuljahr, Schroedel Hannover 1969). Da jedoch in diesem Band die Primzahlen erst am Ende des Teilbarkeitskapitels behandelt werden, stehen sie dort bei der Untersuchung von Teilbarkeitsgraphen natürlicher Zahlen nicht zur Verfügung. Dabei kann man mit Hilfe der Primfaktorzerlegung zu einer übersichtlichen Typisierung der Teilergraphen natürlicher Zahlen gelangen und so zugleich ein einfaches Konstruktionsverfahren gewinnen.

I. Von besonders einfacher Struktur sind die **Teilergraphen der Primzahlpotenzen** ($a = p^m$, p Primzahl, $m \geqq 1$).

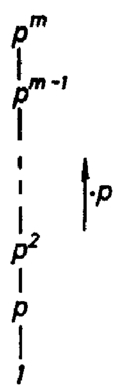

Fig. 1. Teilergraph von Primzahlpotenzen p^m ($m \geqq 1$)

Als Graph erhält man eine Teilerkette von $m + 1$ Zahlen, in der die Teiler von p^m ihrer Größe nach vertikal übereinander angeordnet sind (Fig. 1). Wegen „$p^m | p^n$ genau dann, wenn $p^m \leqq p^n$" stimmt in diesem Fall die durch die Teilerrelation induzierte Ordnung — als reflexive, identitive und transitive Relation ist die Teilerrelation eine Ordnungsrelation — mit der Ordnung der Zahlen nach ihrer Größe überein. Eine beliebige Zahl der Teilerkette teilt ihren „oberen Nachbarn" bzw. ist Vielfaches ihres „unteren Nachbarn". Hierbei nennen wir eine Zahl b des Teilergraphen unteren Nachbarn von a, falls zwar gilt $b|a$, es aber kein c ($c \neq a$, $c \neq b$) im Teilergraphen gibt, so daß $b|c$ und $c|a$. Analog definieren wir den Begriff „oberen Nachbarn". Dem Aufsteigen korrespondiert also ein Multiplizieren mit p, dem Absteigen ein Dividieren durch p. Wegen der Transitivität der Teilbarkeitsrelation sind jeweils alle Zahlen der Kette unterhalb einer festen Zahl b Teiler, alle Zahlen oberhalb Vielfache von b. Der Teilergraph gestattet nicht nur, alle Teiler von p^m abzulesen, sondern ebenso alle Teiler (und einige Vielfache) jeder Zahl p^n ($n < m$) der Kette.

II. Waren die Teilergraphen der Primzahlpotenzen eindimensionale Gebilde, so benötigt man für die *Teilergraphen* der Zahlen von der Form $a = p^m q^n$ (p, q Primzahlen $p \neq q$, $m \geqq 1$, $n \geqq 1$) zwei Dimensionen.

Fig. 2 ist ein Teilergraph von $p^m q^n$; denn erstens enthält sie sämtliche Teiler von $p^m q^n$, die bekanntlich die Form $p^r \cdot q^s$ ($0 \leqq r \leqq m$, $0 \leqq s \leqq n$) haben, und zweitens sind alle eingezeichneten Teilerrelationen richtig. Jede (linke) obere Nachbarzahl einer gegebenen Zahl ist das p-fache, jede rechte (obere) Nachbarzahl das q-fache der gegebenen Zahl. Die Zahlen einer Zeile sind — von links nach rechts — jeweils $\frac{q}{p}$ mal so groß wie die vorhergehende Zahl, zwischen ihnen kann folglich keine „Ist-Teiler-von"-Relation bestehen. Der Graph hat die Form eines Rechtecks, im Sonderfall $m = n$ die Form eines Quadrates.

Teilergraphen dieses Typs besitzen folgende charakteristische Eigenschaften:

1. Die (linke) obere Nachbarzahl einer beliebigen Zahl des Teilergraphen ist p-mal, die rechte (obere) Nachbarzahl q-mal so groß wie die gegebene Zahl. In einer Zeile ist die (rechts) folgende Zahl $\frac{q}{p}$-mal so groß wie die vorhergehende Zahl. Im Fall $q > p$ wachsen, im Fall $q < p$ fallen die Zahlen innerhalb einer Zeile von links nach rechts.

2. Die Zahlen sind durch die Teilerrelation geordnet. Die Ordnung weicht von der vertrauten Ordnung durch die Kleiner-Relation deutlich ab, im Gegensatz zu Fall 1.

3. Der Teilergraph enthält nicht nur sämtliche Teiler von $p^m \cdot q^n$, sondern ebenso sämtliche Teiler jeder beliebigen Zahl des Teilergraphen; denn es gilt — wenn wir die Menge aller Teiler von a bzw. b mit $T(a)$ bzw. $T(b)$ bezeichnen — der Satz: „$a|b$ genau dann, wenn $T(a) \subseteq T(b)$"

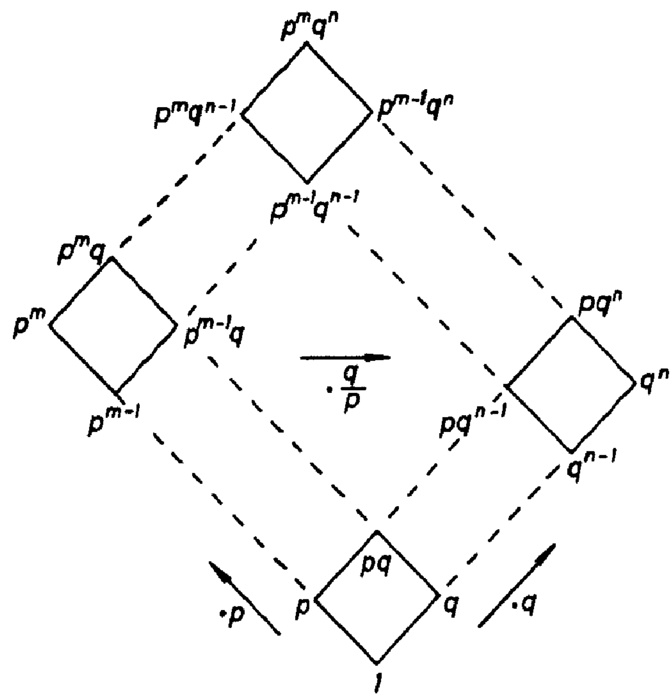

Fig. 2. Teilergraph von Zahlen der Form $a = p^m q^n$
(p, q Primzahlen, $p \neq q$, $m \geqq 1$, $n \geqq 1$)

Beweis: 1. $a|b$, $c \in T(a)$, $c|a$; wegen der Transitivität der Teilerrelation gilt folglich: $c|b$, d.h. $c \in T(b)$, folglich: $T(a) \subseteq T(b)$; 2. $T(a) \subseteq T(b)$, $a \in T(a)$, folglich: $a \in T(b)$, daher $a|b$.

4. Wegen der Transitivität der Teilbarkeitsrelation sind alle Zahlen, die von einer gegebenen Zahl b aus (ausschließlich) in der Richtung, die der Relation „ist-Teiler-von" entspricht, längs des Teilergraphen erreichbar sind, Vielfache der gegebenen Zahl; ferner sind alle Zahlen, die von einer gegebenen Zahl aus (ausschließlich) in der entgegengesetzten Richtung, die der Relation „ist-Vielfaches-von" entspricht, erreichbar sind, Teiler der gegebenen Zahl. Wegen der Reflexivität der Teilerrelation gehört die gegebene Zahl b sowohl zu ihrer Teiler- wie zu ihrer Vielfachmenge. Infolgedessen kann man direkt am Graphen die gemeinsamen Teiler und — soweit eingezeichnet —Vielfachen von zwei oder mehreren beliebigen Zahlen des Teilergraphen ablesen, indem man den — nicht leeren! — Durchschnitt der Teiler- bzw. Vielfachenmengen bildet. Aus den so ermittelten gemeinsamen Teilern bzw. Vielfachen kann man unmittelbar den größten gemeinsamen Teiler bzw. das kleinste gemeinsame Vielfache ablesen.

5. Das Produkt der Zahlen an den Ecken des (rechteckigen) Graphen ergibt stets die Zahl $a = p^m \cdot q^n$. Ist a speziell eine Quadratzahl, folglich $m = 2k$, $n = 2l$, $k \geqq 1$, $l \geqq 1$, so gilt außerdem:

5.1. Das Produkt der Zahlen der gegenüberliegenden Seitenmitten ergibt stets a.
(Nämlich $p^m q^{\frac{n}{2}} \cdot q^{\frac{m}{2}} = a$ bzw. $p^{\frac{m}{2}} \cdot p^{\frac{m}{2}}\, q^n = a$).

5.2. Die Zahl im Schnittpunkt der Verbindungslinien der gegenüberliegenden Seitenmitten hat den Wert $p^{\frac{m}{2}} \cdot q^{\frac{n}{2}} = \sqrt{a}$.

6. Läßt man bei den Exponenten von $a = p^m q^n$ auch $n = 0$ zu, entartet das Rechteck zu einer Strecke und ergibt so Fall 1 als Spezialfall.

III. Benötigten wir für die Teilergraphen von $a = p^m \cdot q^n$ zwei Dimensionen, so für die Teilergraphen von $a = p^m \cdot q^n \cdot r^u$ (p, q, r Primzahlen, paarweise verschieden, $m \geqq 1$, $n \geqq 1$, $u \geqq 1$) drei Dimensionen. Statt des Rechtecks hat der Graph die Gestalt eines Quaders, im Sonderfall $m = n = u$ die Gestalt eines Würfels. Es genügt, den Teilergraphen von $a = p \cdot q \cdot r$ zu zeichnen, um das Verfahren zu erläutern. Die Struktur des Teilergraphen von $a = p^m \cdot q^n \cdot r$ ergibt sich dann (in Verbindung mit der Fig. 3) unmittelbar aus dem unter II Gesagten. Aus dem Teilergraphen von $a = p^m \cdot q^n \cdot r$ entsteht schließlich der Graph von $a = p^m \cdot q^n \cdot r^u$ durch entsprechende weitere Ausdehnung in die dritte Dimension. Genau wie bei $p^m \cdot q^n$ bedeutet Fortbewegen nach links hinten Multiplizieren mit p, nach rechts hinten Multiplizieren mit q. Fortbewegen in die Vertikale bedeutet hier Multiplizieren mit r. Die unter II. 2.—5. aufgeführten Eigenschaften des Teilergraphen von $p^m q^n$ gelten auch analog beim Teilergraphen von $p^m q^n r^u$. Läßt man bei den Exponenten von $p^m q^n r^u$ auch $n = 0$ und $u = 0$ zu, so ergeben sich für $u = 0$ Fall 2, für $u = 0$ und $n = 0$ Fall 1 als Sonderfälle.

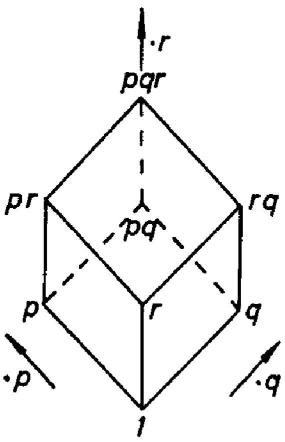

Fig. 3. Teilergraph von Zahlen der Form $a = pqr$ (p, q, r paarweise verschiedene Primzahlen)

IV. Die Menge $T(n)$ der Teiler einer natürlichen Zahl bildet für jede Zahl $n > 1$ bezüglich der inneren Verknüpfungen ggT und kgV einen distributiven Verband, sie bildet sogar einen Boole-Verband, falls in der Primfaktorzerlegung von n keine Primzahl mehrfach auftritt (F. Haberlen, *Boolesche Teilerverbände*, **PM 12**, S. 39—42, 1970). Die behandelten Teilergraphen sind ein gutes Hilfsmittel, um diese Verbandsstruktur der Teilermengen erkennen zu lassen. So kann man mit ihrer Hilfe insbesondere die Abgeschlossenheit einer gegebenen Teilermenge gegenüber den Operationen kgV und ggT und die Gültigkeit des Kommutativen Gesetzes, des Assoziativen Gesetzes, der Absorptions- und der Komplementärgesetze in einer gegebenen Teilermenge sehr übersichtlich überprüfen.

Ein Teilergraph natürlicher Zahlen mit 4 oder mehr Primfaktoren ist nach diesem Schema allerdings nicht zu konstruieren. Diese Tatsache stört jedoch bei der praktischen Anwendung (im Unterricht) nicht sonderlich, da der kleinste, so nicht zu konstruierende Teilergraph einer geraden Zahl der Graph von 210, einer ungeraden Zahl der Graph von 1155 und einer Quadratzahl gar erst der Graph von 44100 ist.

BERICHTE

Stiftung Volkswagenwerk. Aus dem Bericht 1970 entnehmen wir, daß für die Ausbildungsförderung für Mathematiker und Naturwissenschaftler im Höheren Schuldienst ab 1. Oktober 1971 neue Richtlinien gelten. Die Voraussetzungen für die Gewährung des Förderungsbetrages sind „geändert": Studenten müssen ihr Studium zwischen dem 1. 10. 68 und dem 30. 9. 71 (!) begonnen haben, Referendare müssen zwischen dem 1. 8. 68 und 31. 12. 75 ihren Vorbereitungsdienst antreten.

Bisher wurden 4315 Studenten und 2852 Referendare gefördert. Ein Erfolg beginnt sich abzuzeichnen. So der Bericht!

W