Aktuelle Fragen und Themen der Didaktik

Zur Behandlung von Stellenwertsystemen im Unterricht

von F. Padberg

I. Grundlagen

Will man Zahlwörter fixieren, so schreibt man sie üblicherweise mit Ziffern, etwa in unserem gebräuchlichen Dezimalsystem mit Hilfe der zehn Zeichen 0, 1, 2, ..., 9. Dabei kommt in dem einzelnen Zahlwort, das durch Hintereinanderreihung dieser Ziffern gebildet wird, jeder Ziffer neben einem festen Zahlwert ein je nach Stellung unterschiedlicher Stellenwert zu. So stehen in unserem vertrauten Dezimalsystem an der letzten Stelle die Einer, davor die Zehner, die Hunderter usw. Der Stellenwert kann hier also beschrieben werden durch Potenzen der Zahl Zehn; daher nennen wir Zehn auch die Basis unseres Stellenwertsystems.
Die Wahl gerade der Zahl zehn als Basis ist keineswegs - wie man vielleicht annehmen könnte - die einzig mögliche oder gar die optimale; vielmehr hängt diese Wahl eng mit der Anzahl unserer Finger zusammen, die man schon früher beim Rechnen zu Hilfe nahm. Man hätte grundsätzlich auch jede andere natürliche Zahl $b > 1$ als Basis wählen können. In diesem Fall müßte man allerdings den Umfang des Ziffernalphabets ändern: Man würde dazu die Ziffern 0, 1, ... , $b-1$ benötigen, wobei man im Falle $b < 10$ sich mit einer Teilmenge unserer dekadischen Ziffern begnügen könnte, im Falle $b > 10$ müßte man das Ziffernalphabet des Dezimalsystems um weitere Zeichen ergänzen.
Durch die Vorgabe der Ziffern und die Festlegung der einzelnen Stellenwerte wird ein Stellenwertsystem fest bestimmt. Jeder Zahl wird so ein bestimmtes Zahlwort zugeordnet, und auch umgekehrt kann man zu jedem Zahlwort die zugehörige Zahl bestimmen. Durch Übergang von einem Stellenwertsystem zu einem anderen werden also keine neuen Zahlen geschaffen, sondern dieselben Zahlen erhalten nur neue Namen.

Behandelte man früher im Unterricht das Zehnersystem als einziges Stellenwertsystem und setzte dieses nur gegen Nicht-Stellenwertsysteme, wie das römische Ziffernsystem, ab, so beschäftigt man sich heute daneben auch mit Stellenwertsystemen mit anderen Basen. Folgende Gründe sind hierfür im wesentlichen maßgebend:

1) Erst ein Vergleich von Stellenwertsystemen mit anderen Basen ermöglicht einen tieferen Einblick in das Prinzip eines Stellenwertsystemes. Andernfalls assoziiert man allzu leicht Stellenwert mit Zehnerpotenz und erkennt nicht, daß unser vertrautes Zehnersystem nur ein Stellenwertsystem unter vielen möglichen ist.

2) Die mehrfache Erweiterung des betrachteten Abschnitts der natürlichen Zahlen im Laufe der Grundschuljahre geht bei der vorhergehenden Behandlung von Stellenwertsystemen mit Basen $b < 10$ vermutlich leichter vonstatten, da die Schüler in diesem Fall entsprechende Erweiterungen schon vorher im vertrauten Zahlenraum mehrfach kennengelernt haben (besonders häufig bei der Basis $b = 2$).

3) Man verquickt leicht unsere schriftlichen Rechenverfahren mit dem Zehnersystem. Dabei gelten sie analog auch in Stellenwertsystemen mit beliebigen Basen $b > 1$. Diese Tatsache kann man benutzen, um durch genaue Besinnung auf die den schriftlichen Rechenoperationen zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten zu einem vertieften Verständnis dieser Operationen zu führen. Möglicherweise gelingt es so, die schriftlichen Rechenverfahren von ihrem üblichen leeren Schematismus etwas zu befreien.

4) Das Dualsystem bzw. Stellenwertsysteme mit höheren Zweierpotenzen finden im Bereich der Computertechnik eine wichtige Anwendung.

5) Die Beschäftigung mit Stellenwertsystemen mit verschiedenen Basen ermöglicht im weiteren Verlauf des Unterrichts eine tiefergehende Fragestellung bei der Behandlung der Teilbarkeitsregeln sowie bei der Einführung der Systembrüche.

Diese und ähnliche Überlegungen haben vermutlich die Kultusministerkonferenz veranlaßt, in ihren Empfehlungen und Richtlinen (vom 3.10. 68) die Behandlung von Stellenwertsystemen mit verschiedenen Basen für alle Schulformen verbindlich vorzuschreiben. In diesem Beschluß wird die Basisschreibweise mit Hilfe von Potenzen empfohlen. Der Aufbau der Stellenwertsysteme soll behandelt sowie ein Vergleich durchgeführt werden. Im Dualsystem soll an Beispielen gerechnet werden. Ferner soll die vertiefte Behandlung der Stellenwertsysteme Auswirkungen auf andere Themenkreise haben. (vergl. 5.) ; hierauf soll allerdings in diesem Aufsatz nicht näher eingegangen werden).

Im folgenden soll ein Vergleich der Behandlung dieses mathematischen Stoffgebietes ("Stellenwertsysteme") in verschiedenen Klassenstufen durchgeführt werden, um gegebenfalls inhaltliche und methodische Unterschiede zu erarbeiten. Das Hauptgewicht liegt hierbei auf der Behandlung in der Grundschule und in der Förderstufe.

II. Grundschule

In der Grundschule sind bei der Behandlung von Stellenwertsystemen mit verschiedenen Basen zwei unterschiedliche Wege denkbar: Man fängt sofort im 1. Schuljahr mit verschiedenen Basen an und stellt erst später das Zehnersystem in den Vordergrund, oder - und diesen Weg beschreitet die Mehrzahl der neueren Grundschulwerke - man beginnt mit dem Zehnersystem und führt erst später - zweckmäßigerweise vor Einführung der schriftlichen Rechenverfahren - andere Stellenwertsysteme ein. Für den ersten Weg plädiert beispielsweise Dienes mit der These, daß es den Schülern wahrscheinlich schwerer fällt, einen einmal gebildeten Begriff zu verallgemeinern als sofort den allgemeineren Begriff zu bilden. Für den zweiten Weg kann man anführen, daß Dienes These bislang nur eine Hypothese ist und daß man die Stellenwertsysteme mit anderen Basen nicht um ihrer selbst willen einführt, sondern um mit ihrer Hilfe zu einem vertieften Verständnis des Zehnersystems zu gelangen. Unabdingbares Ziel bleibt, daß die Schüler die Rechenoperationen im Zehnersystem sicher beherrschen.

Am Beispiel des Grundschulwerks von Neunzig-Sorger soll dieser zweite Weg im folgenden skizziert werden. Im 3. Schuljahr werden dort unmittelbar vor der Erweiterung des (bisher behandelten) Abschnittes der natürlichen Zahlen (von 100 bis 1.000) sowie vor der Einführung der schriftlichen Rechenverfahren Stellenwertsysteme mit den Basen 2, 3, 4 und 5 eingeführt. Zwei Lernziele werden hierbei angesteuert:

Einmal sollen die Schüler lernen, die Anzahl der Elemente einer konkret vorgegebenen Menge zu bestimmen und sie mit Hilfe von verschiedenen Bündelungen, d. h. faktisch in Stellenwertsystemen mit verschiedenen Basen, darzustellen. Die Schüler sollen erkennen, daß die Zehnerbündelung nur eine mögliche Bündelung neben anderen ist. Die Ergebnisse dieser Bündelungsverfahren werden in einem Stellenwertschema festgehalten, eine abgekürzte Schreibweise ohne Stellenwertschema wird nicht eingeführt. Es werden die Begriffe Stellenwertsystem und Basis an dieser Stelle noch nicht verwandt, man spricht vielmehr von 5-Gruppierung, 4-Gruppierung bzw. 5-Regel usw. Ein Beispiel verdeutliche das Vorgehen:

Otto hat Kastanien gesammelt:

Um ihre Anzahl zu bestimmen, macht er es so: Jeweils 4 Kastanien legt er auf einen Teller. 4 Teller leert er jeweils in eine Schachtel.

4 Teller in eine Schachtel 4 Kastanien auf 1 Teller

Schachteln	Teller	Kastanien
1	2	2

Man benutzt als Bündelnamen also noch nicht die Potenzen der Basis, sondern anschauliche Bezeichnungen des täglichen Lebens. Die Dreier- und Viererbündelung wird bevorzugt, da man Mengen mit 3 und 4 Elementen noch simultan erfassen kann.

Zum anderen sollen die Schüler umgekehrt bei Vorgabe eines Zahlworts (in Form eines Stellenwertschemas) und bei Angabe der Basis (formuliert etwa als 5-Gruppierung bzw. 5-Regel) lernen, eine Menge konkreter Gegenstände, etwa Streichhölzer, mit dieser Anzahl zu legen. So wird auf diese Art die Übersetzung eines Zahlwortes aus einem anderen Stellenwertsystem in das Zehnersystem konkret durchgeführt.

Diese "Übersetzungen" (in beide Richtungen) erfolgen im tätigen Umgang mit geeignetem Lernmaterial. Man benutzt bewußt verschiedene Materialien, um im Sinne des Dienesschen Prinzips der Variation der Veranschaulichung die begriffliche Struktur von der jeweiligen Darstellung zu lösen. So arbeitet man neben Kastanien, mit Kindern der Klasse mit farbigen Plättchen oder mit den Mehrsystemblöcken von Dienes.

Im 4. Schuljahr wird dieser Stoff zu Beginn zunächst wiederholt. Man stellt jetzt die Stellenwerttafel stärker als im 3. Schuljahr heraus und notiert die Zahlwörter z.T. sogar ohne Stellenwerttafel. Nach der Einführung der Potenzen mit Hilfe der Mehrsystemblöcke verwendet man im folgenden, neben den anschaulichen Bezeichnungen Würfel, Stange, Platte usw. bei Benutzung der Mehrsystemblöcke bzw. schwarz, rot, blau usw. bei Benutzung der farbigen Plättchen, parallel auch die Potenzen der betreffenden Basis als Bündelnamen. Eine etwas stärkere Formalisierung ist insgesamt zwar erkennbar; jedoch steht das konkrete Arbeiten mit dem Lernmaterial nach wie vor - entsprechend der Altersstufe der Schüler - im Vordergrund. So benutzt man beispielsweise die Potenzschreibweise nicht bzw. nur in ganz geringem Umfang dazu, ein Zahlwort aus einem anderen Stellenwertsystem direkt - ohne Zuhilfenahme von Lernmaterial - ins Zehnersystem zu übersetzen.

Diente das 3. Schuljahr vorwiegend der Erarbeitung der Zahldarstellung in verschiedenen Stellenwertsystemen, so wendet sich im 4. Schuljahr in diesem Zusammenhang das Hauptinteresse den zugehörigen Rechenoperationen zu. In enger Anlehnung an die schon im 3. Schuljahr eingeführten schriftlichen Additions- und Subtraktionsverfahren im Zehnersystem werden diese Verfahren jetzt im Fünfer-, Vierer-, Dreier- und Zweiersystem erarbeitet. Die Rechenoperationen werden in Stellenwerttafeln mit Hilfe der Mehrsystemblöcke bzw. mittels farbiger Plättchen konkret durchgespielt. Die Lösung fixiert man in Stellenwerttafeln. Ein <u>Beispiel</u> verdeutliche das Vorgehen. (Die <u>Addition im Vierersystem</u> werde mit Hilfe farbiger Plättchen durchgeführt, die wir hier durch in Klammern gesetzte Buchstaben andeuten. 4 schwarze Plättchen (s) sind hierbei jeweils durch ein rotes (r), 4 rote durch ein blaues (b), 4 blaue Plättchen durch ein grünes (g) zu ersetzen).

Addition im Vierersystem: 1132 + 121 = ?

	(g)	(b)	(r)	(s)
1. Zahl:	(g)	(b)	(r) (r) (r)	(s) (s)
2. Zahl:		(b)	(r) (r)	(s)
Summe	(g)	(b) (b)	(r) (r) (r) (r) (r)	(s) (s) (s)
Summe nach dem Ersetzen	(g)	(b) (b) (b)	(r)	(s) (s) (s)

schriftl. Lösung

4^3	4^2	4	1
1	1	3	2
	1_1	2	1
1	3	1	3

Die Summen werden also, von rechts nach links, spaltenweise gebildet. Ist in einer Spalte die Summe ursprünglich so groß wie die Basis oder größer, wird anschließend von rechts nach links nach der Ersetzungsregel neu gebündelt.
Die Subtraktion wird entsprechend mittels der Ergänzungsmethode behandelt.

Mit der Behandlung der Multiplikation und Division in anderen Stellenwertsystemen endet dieser Grundschullehrgang über Stellenwertsysteme. Der besonders einfache Fall der Multiplikation mit bzw. der Division durch die Basis wird zunächst behandelt. Die Operationen werden tätig mit Mehrsystemblöcken bzw. farbigen Plättchen an "b für eins" - Maschinen (b sei die Basis des betreffenden Stellenwertsystems) bzw. an "eins für b" - Maschinen (s.u.) durchgeführt, in Stellenwerttafeln mit Potenzen der Basis b als Bündelnamen fixiert, und schließlich werden die allgemeingültigen Ergebnisse in einem Merksatz festgehalten. Bei den übrigen Multiplikations- und Divisionsaufgaben beschränkt man sich auf einstellige Multiplikationen und Divisionen. Man läßt die Schüler tätig die einzelnen Schritte, die bei der anschließenden Behandlung dieser schriftlichen Rechenverfahren im Zehnersystem bedeutsam sind, an "n für 1" - bzw. "1 für n" - Maschinen (n sei der Multiplikator bzw. Divisor) einüben. Nur in recht geringem Umfang werden diese Rechenoperationen in anderen Stellenwertsystemen rein schriftlich ohne Lernmaterial durchgeführt. Ein Beispiel verdeutliche abschließend das Vorgehen:

Division im Vierersystem: 3123 : 3 = ?

Eingabetafel

(g)	(b)	(r)	(s)
(g)	(b)	(r)	(s)
(g)		(r)	(s)
(g)			(s)

es bleiben

"1 für 3" -Maschine

Ergebnistafel

(g)	(b)	(r)	(s)
(g)			

(g)	(b)	(r)	(s)
	(b)	(r)	(s)
		(r)	(s)
			(s)

Das blaue Plättchen wird nach der Ersetzungsregel in 4 rote Plättchen umgetauscht.

(g)	(b)	(r)	(s)
(g)			

Nach dem Ersetzen:

(g)	(b)	(r)	(s)
		(r) (r)	(s)
		(r) (r)	(s)
		(r) (r)	(s)

"1 für 3" -Maschine

(g)	(b)	(r)	(s)
(g)		(r) (r)	

Wir erhalten: 3123 : 3 = 1021 (Vierersystem)

III. Förderstufe

Vergleicht man rein formal den Umfang der Behandlung des Themas Stellenwertsysteme in neueren Werken der Grundschule und der Förderstufe, so stellt man eine weitgehende Übereinstimmung fest. Hier wie dort steht die Übersetzung von Zahlwörtern des Zehnersystems in anderen Systemen im Vordergrund des Interesses. Auf den ersten Blick scheint in der Förderstufe nur die Abhebung der Stellenwertsysteme von Nicht-Stellenwertsystemen, wie etwa dem römischen Ziffernsystem, hinzuzukommen.
Geht man jedoch ins Detail und betrachtet die Art der Behandlung dieses Stoffes, so stellt man weitgehende Unterschiede fest. Die Behandlung der Stellenwertsysteme in der Grundschule ist - wie gezeigt - gekennzeichnet durch den tätigen Umgang mit geeigneten Lernmaterialien. Das konkrete Tun, das Arbeiten beispielsweise an Mehrsystemblöcken steht im Vordergrund. Das Formalisieren der so gewonnenen Ergebnisse tritt noch in den Hintergrund.

Dagegen verliert in der Förderstufe das konkrete Arbeiten mit Lernmaterialien an Bedeutung. Haupthilfsmittel sind jetzt - neben den erklärenden Worten des Lehrers - die Zeichnungen, Diagramme und der Text des Schülerbuches. So stößt man in den Büchern der Förderstufe rasch zum Begriff des Stellenwertsystemes vor. Bündelnamen sind direkt die (meist ausgerechneten) Potenzen der Basis. (Beispiel: Einer, Fünfer, Fünfundzwanziger usw.; die Potenzen 5, 5^2, 5^3 werden in einem Teil der Lehrgänge erst bei der systematischen Behandlung der Multiplikation eingeführt). Mit dem Zehnersystem als Metasprache werden Übersetzungen von Zahlwörtern aus anderen Systemen in das Zehnersystem über die Potenzschreibweise direkt und rasch vorgenommen. (Beispiel: Vierersystem: "3213" : $3 \;\; 4^3 + 2 \;\; 4^2 + 1 \;\; 4 + 3 \;\; 1 = 3 \;\; 64 + 2 \;\; 16 + 1 \;\; 4 + 3 =$ 231 Zehnersystem). Übersetzungen aus dem Zehnersystem in andere Systeme erfolgen meistens unsystematisch . Man probiert aus, welche höchste Potenz der Basis in der zu übersetzenden Zahl steckt und wieoft sie darin enthalten ist usw. und bündelt so nach Potenzen der Basis um. Die teils vorhergehende, teils anschließende Behandlung der römischen Zahlschrift ermöglicht durch Vergleich ein tieferes Verständnis der charakteristischen Merkmale von Stellenwertsystemen.

Hierzu trägt auch die Bestimmung von Vorgängern und Nachfolgern sowie das Zählen in anderen Stellenwertsystemen und die Fixierung der entsprechenden Zahlwörter in ihrer natürlichen Reihenfolge bei.

Ähnlich deutlich sind auch die Unterschiede bei der Behandlung von Rechenoperationen in Stellenwertsystemen mit anderen Basen, wie die nachstehende Einführung der Addition im Fünfersystem im Schulbuch: "Mathematische Impulse" exemplarisch zeigt:

<u>Beispiel:</u>

Nach einer unmittelbar vorhergehenden analogen Behandlung der Addition im Zehnersystem heißt es dort:

<u>Im Fünfersystem addieren wir wie im Zehnersystem:</u>

$$
\begin{array}{lll}
 & 1203_{(5)} & = 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 3 \\
+ & 314_{(5)} & = \phantom{1 \cdot 5^3 +{}} 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 4 \\
\hline
 & & 1 \cdot 5^3 \leftarrow (5 \cdot 5^2) \;\; 1 \cdot 5^1 \leftarrow (7) \\
\hline
 & 2022_{(5)} & = 2 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 2
\end{array}
$$

Im Werk von Winter-Ziegler wird das schriftliche Addierverfahren durch ein Flussdiagramm durchsichtig gemacht. So erkennt man deutlich die Unabhängigkeit des Addierverfahrens von unserem speziellen Zehnersystem. Vereinzelt führt man auch das zugehörige "Kleine Einsundeins" expliziert ein.

Dagegen greift man bei der Behandlung der Multiplikation allgemein auf das zugehörige Kleine Einmaleins zurück. Es ist allerdings zu bemerken, daß selbst von den neueren Schulbüchern für die Förderstufe nur ein Teil das Multiplizieren und noch weniger das Dividieren in anderen Stellenwertsystemen einführen. Die deutlichen Unterschiede in der Art der Behandlung gegenüber der Grundschule soll abschließend die Einführung der schriftlichen Multiplikation im Fünfersystem am Beispiel des Buches B 5 verdeutlichen. Charakteristisch ist hierbei die weitgehende Formalisierung des Vorgehens.

Vorbemerkung: Beim Multiplizieren mehrstelliger Zahlen in anderen Stellenwertsystemen benötigt man ebenso wie schon beim bekannten Multiplizieren im Zehnersystem das Distributivgesetz und das jeweilige Kleine Einmaleins.

Beispiel: Fünfersystem:

$$324 \cdot 3 = (300+20+4) \cdot 3 = 300 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 1400 + 110 + 22$$
$$= 2032$$

schriftliche Kurzform:	sprich:	schreibe:
$\underline{324 \cdot 3}$	$3 \cdot 4 = 22$ (zwei-zwei)	2
2032	$3 \cdot 2 = 11;13$ (eins-drei)	3
	$3 \cdot 3 = 14;20$ (zwei-null)	20

IV. Gymnasialoberstufe (Arbeitsgemeinschaft)

In der Gymnasialoberstufe wird das Thema Stellenwertsysteme nicht mehr verbindlich von allen Schüler bearbeitet; eine Beschäftigung mit dieser Fragestellung ist nur etwa im Rahmen einer zahlentheoretischen Arbeitsgemeinschaft möglich. Betrachtet man die hierfür zur Verfügung stehenden Bücher, beispielsweise das Buch von Burau "Elementare Zahlentheorie", so nehmen die Stellenwertsysteme in ihnen naturgemäß nur einen beschränkten Raum ein. Deutliche Unterschiede gegenüber der früheren Art der Behandlung sind erkennbar. Im Mittelpunkt des Interesses stehen jetzt die Fragen nach der Existenz und Eindeutigkeit der Darstellung natürlicher Zahlen in b - adischen Stellenwertsystemen, also die Fragen, ob man durch ein gegebenes Stellenwertsystem mit fester Basis $b > 1$ immer jede natürliche Zahl darstellen kann und ob diese Darstellung eindeutig ist. Diese Aussagen werden als Sätze formuliert und bewiesen. Die anschließende Behandlung der Rechenoperationen in b - adischen Stellenwertsystemen erfolgt recht knapp durch Rückgriff auf die bekannte Behandlung im Zehnersystem sowie durch Exemplifizierung an einigen Aufgaben.

Literaturhinweise:

W. Burau: Elementare Zahlentheorie, Stuttgart o.J.

Z.P. Dienes: Moderne Mathematik in der Grundschule, Frbg, 3, 1969

Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen. Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 3. 10. 1968.

A. Fricke: Mathematische Impulse, 5. Schulj., Stuttgart 1971

H. Griesel: Namen von Gegenständen, Mengen und Zahlen, in: Die neue Mathematik für Lehrer und Studenten 1, Hannover 1971, p 82 - 109

Griesing/Schady: Der neue Mathematikunterricht in den Klassen 1 - 6, Braunschweig, 1970

E. Hollmann: Moderne Mathematik in der Grundschule. Bericht über eine Studienwoche mit Z.P. Dienes in Rinteln/Weser, Freiburg, 1970

W. Neunzig/P. Sorger: Wir lernen Mathematik, Bd. 1-4, Freibg. 1970

Rollen et alii: Mathematik B 5, Stuttgart 1970

H. Winter/Th. Ziegler: Neue Mathematik, 5. Schulj., Hannover 1969

Einführung des Beweisverfahrens durch vollständige Induktion

von Walter Streb

Im folgenden wird an drei typischen Beispielen aus dem Unterricht gezeigt, wie den Schülern das Beweisverfahren durch vollständige Induktion nahegebracht werden kann. Die in allen drei Fällen verwendete Methode läßt isch kurz durch drei Feststellungen charakterisieren:

(1) Die erforderlichen Rechnungen werden ohne Rückgriff auf eine den Schülern problematisch erscheinende Induktionsannahme durchgeführt. Sie sind Bestandteil einer heuristisch begründbaren Voruntersuchung.

(2) Der Induktionsschluß ist von Rechenarbeit unbelastet und in einem gewissen Sinne evident.

(3) Die skizzierte Methode ist im Unterricht vielseitig verwendbar.

Beispiel 1: Man zeige

(*) $9^n - 1$ ist für jede natürliche Zahl n durch 8 teilbar.

Beweis: Man setzt [1] $T_i := 9^n - 1$ und berechnet

(a) $T_1 = 9^1 - 1 = 8,$

$$T_{n+1} - T_n = (9^{n+1} - 1) - (9^n - 1) = (9^n (9-1) = 9^n \cdot 8.$$

Man stellt für alle natürlichen Zahlen n fest:

(b) $T_{n+1} = T_n + 9^n \cdot 8$

(c) $T_{n+1} - T_n = 9^i \cdot 8$ ist durch 8 teilbar.

Die Gültigkeit von (c) ist notwendig für die Gültigkeit von (*). Man testet sozusagen Aussage (*) auf Gültigkeit, indem man die leichter beweisbare Aussage (c) betrachtet. Hiermit lassen sich die angestellten Voruntersuchungen motivieren.

Den Schülern ist bekannt:

---

[1] " : = " bedeutet Gleichheit per definitionem.

(d) Sind zwei natürliche Zahlen a und b durch 8 teilbar, so ist auch ihre Summe $a + b$ durch 8 teilbar.

(a) bis (d) gestatten nun für jede natürliche Zahl $n \geqslant 2$ folgende von Rechenarbeit unbelastete Schlußkette:

(e) T_1 ist durch 8 teilbar, also
$T_2 = T_1 + 9 \cdot 8$ ist durch 8 teilbar, also

$T_{n-1} = \ldots\ldots$ ist durch 8 teilbar, also

$T_n = T_{n-1} + 9^{n-1} \cdot 8$ ist durch 8 teilbar.

Jeder der $n-1$ erforderlichen Schlüsse kann den Schülern gut veranschaulicht werden:

Sind natürliche Zahlen a und b durch 8 teilbar, so sind auch $a:8$ und $b:8$ natürliche Zahlen. a und b können durch Rechtecke veranschaulicht werden, deren Seiten die Maßzahlen $a:8$ und 8 bzw. $b:8$ und 8 haben. $a+b$ entspricht dann ein Rechteck, dessen Seiten die Maßzahlen $a:8 + b:8$ und 8 besitzen. Somit leuchtet ein, daß mit a und b auch $a+b$ durch 8 teilbar ist.

Beispiel 2: Man zeige für jede natürliche Zahl n

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2.$$

Beweis: Man setzt
$S_n := 1 + 2 + \ldots + n$; und $T_n = n\,(n+1)/2$
und stellt fest

(a) $S_1 = 1$; $T_1 = 1$, also $S_1 = T_1$.

$$S_{n+1} - S_n = [\ 1 + 2 + \ldots + (n+1)\ ] - [\ 1 + 2 + \ldots + n\ ] = n + 1.$$

$$T_{n+1} - T_n = (n+1)\ [\ (n+1) + 1\ ]\ /2 - n\,(n+1)/2 = (n+1)\ (n+2-n) = n+1.$$

Man Stellt für alle natürlichen Zahlen n fest:

(b) $S_{n+1} = S_n + (n+1)$ und $T_{n+1} = T_n + (n+1)$, oder

(c) $S_{n+1} - S_n = T_{n+1} - T_n$.

Die Bemerkung zu (c) in Beispiel 1 kann wörtlich auf (c) in diesem Beispiel übertragen werden.

(a) und (b) gestatt en nun für jede natürliche Zahl $n \geqslant 2$ folgende von Rechenarbeit unbelastete Schlußkette:

$$S_1 = T_1, \text{ also}$$
$$S_2 = S_1 + 2 = T_1 + 2 = T_2, \text{ also}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{n-1} = \ldots\ldots \qquad = T_{n-1}, \text{ also}$$
$$S_n = S_{n-1} + n = T_{n-1} + n = T_n.$$

Die erforderlichen Schlüsse sind in einem gewissen Sinne evident: "Gleiches zu Gleichem addiert ergibt Gleiches".

Beispiel 3: Man zeige für jede natürliche Zahl n:

$$2\ (n+2)^2 > (n+3)^2.$$

Beweis: Man setzt:

$$S_n := 2\ (n+2)^2 \quad \text{und} \quad T_n := (n+3)^2$$

und findet (evtl. nach einigem Rechnen):

(a) $S_1 = 18 \quad 16 = T_1$,

$$S_{n+1} - S_n = 4n + 10,$$

und

$$T_{n+1} - T_n = 2n + 7.$$

Man stellt für alle natürlichen Zahlen n. fest:

(b) $S_{n+1} = S_n + (4n + 10)$ und $T_{n+1} = T_n + (2n + 7)$

(c) $\qquad 4n + 10 > 2n + 7.$

Den Schülern ist bekannt:

(d) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c und d folgt aus $a > c$ und $b > d$ stets $a + b > c + d$.

(a) bis (d) gestatten nun für jede natürliche Zahl $n \geqslant 2$ folgende von Rechenarbeit unbelastete Schlußkette:

$$S_1 > T_1$$

$$S_2 = S_1 + (4 \quad 1 \; + 10) > T_1 + (2 \quad 1 \; + 7) = T_2, \text{ also}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$S_{n-1} = \ldots\ldots \qquad > \qquad \ldots\ldots = T_{n-1}, \text{ also}$$

$$S_n = S_{n-1} + 4(n-1) + 10 > T_{n-1} + 2(n-1) + 7 = T_n.$$

Die n–1 erforderlichen Schlüsse sind wiederum in einem gewissen Sinne evident: "Größeres zu Größerem addiert ergibt Größeres".

Bemerkung zu Beispiel 1: Ersetzt man $T_n = 9^n - 1$ durch $T_n = 9^n$, so bleiben im Beweisteil alle Aussagen bis auf (a) und (e) gültig. Hiermit ist in einfacher Weise die Notwendigkeit des Induktionsbeginnes demonstriert, da 9^n für keine natürliche Zahl n durch 8 teilbar ist.

Entsprechendes sei zu den Beispielen 2 und 3 bemerkt.

FRAGE DER REDAKTION AN DIE LESER:

1) Welchen Gewinn sehen Sie für die Schule durch solche Beispiele, die den Zugang zu einer sehr fruchtbaren und sehr allgemeinen Methode eröffnen?
2) Welche Schwierigkeiten, bzw. Nachteile würden Sie ins Feld führen?
3) Für welches Alter der Schüler wären die Beispiele sinnvoll und welchen Kommentar würde ein geschickter Lehrer dazu geben?

(Keine Mathematikreform ohne Diskussion darüber!) Die Red.