FRIEDHELM PADBERG

Schriftliche Subtraktion – Änderungen erforderlich!

3 – 4

In Deutschland ist bei der schriftlichen Subtraktion seit dem Ende der fünfziger Jahre das Ergänzungsverfahren – also die Plus-Sprechweise – vorgeschrieben, als Übertragstechnik ist nur die Erweiterungs- bzw. Auffülltechnik erlaubt. Ein Blick über unsere Grenzen zeigt, daß sonst dagegen das Abziehverfahren – also die Minus-Sprechweise – kombiniert mit der Borgetechnik weltweit am stärksten verbreitet ist. Ein gründlicher Vergleich der verschiedenen Subtraktionsverfahren auf empirischer, unterrichtspraktischer und theoretischer Grundlage soll daher im folgenden aufzeigen, ob und wieweit diese Entscheidung in Deutschland aus den fünfziger Jahren heute im Taschenrechner- und Computerzeitalter noch berechtigt und haltbar ist.

1. Schriftliche Rechenverfahren – noch zeitgemäß?

Vor einer Entscheidung für ein bestimmtes Subtraktionsverfahren muß zunächst geklärt werden, ob die schriftlichen Rechenverfahren heute im Taschenrechner- und Computerzeitalter überhaupt noch ein notwendiger und sinnvoller Unterrichtsgegenstand sind oder nur ein überflüssiges Relikt aus vergangenen Zeiten.
Zweifelsohne sind die Taschenrechner/Computer bei fast allen Rechnungen
- schneller,
- bequemer,
- sicherer
- weit verbreitet im Alltag.

Folgende Gründe sprechen jedoch für eine – wenn auch *modifizierte* – Behandlung der schriftlichen Rechenverfahren:
- Eine einseitige *Abhängigkeit* von der *Verfügbarkeit* von Taschenrechnern/Computern ist äußerst problematisch.
- Irrtümer und Flüchtigkeitsfehler kommen bei der Benutzung von Taschenrechnern bzw. Computern häufiger vor. Wir sollten daher *in der Lage sein*, zumindest die *elementaren Rechnungen kritisch zu kontrollieren*. Eine sonst sinnvolle Arbeitsteilung, bei der nur *einige wenige* die Rechnungen kontrollieren (können), darf es in diesem elementaren Bereich *noch nicht* geben.
- Das sorgfältige Erarbeiten der schriftlichen Rechenverfahren trägt zu einem vertieften *Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems* bei.
- Die *breite Einsetzbarkeit* der schriftlichen Rechenverfahren bei beliebigen Zahlen und auch in nichtdezimalen Stellenwertsystemen ist faszinierend.
- Am Beispiel der schriftlichen Rechenverfahren können wir gut exemplarisch verdeutlichen, wie durch *algorithmische Verfahren* komplexe Rechnungen *stark vereinfacht* werden können. Diese Zielsetzung ist gerade im Computerzeitalter von besonderer Bedeutung.
- Die schriftlichen Rechenverfahren sind ein Teil unserer *Kultur*.

Bei einer *Modifizierung* der Behandlung schriftlicher Rechenverfahren sollten folgende Gesichtspunkte beachtet werden:
- Ein verstärktes Bemühen um Einsicht in die schriftlichen Rechenverfahren mit der Konsequenz, daß *ggf. andere, leichtere Verfahren* als die heutigen Normalverfahren im Unterricht behandelt werden.

- Eine stärkere Betonung der *Kontroll- und Überschlagsrechnung*, um so Fehler bei der Benutzung der elektronischen Hilfsmittel leichter aufdecken zu können.
- Eine *Reduzierung* der Komponenten bei der Behandlung der schriftlichen Rechenverfahren, die nur zur *Erhöhung der Schnelligkeit* beitragen (z.B. eine Verringerung des entsprechenden Drills oder der Bestrebungen um eine Minimierung der Verfahrensabläufe).
- Ein Verzicht auf die Behandlung *komplizierterer Fälle,* die deutlich über die Zielsetzung eines *grundsätzlichen Verständnisses* der schriftlichen Rechenverfahren hinausgehen (Subtraktion mehrerer Subtrahenden in *einer* Rechnung, Division durch kompliziertere Divisoren).

2. Eine Subtraktionsaufgabe – mögliche Schülersprüche

$$\begin{array}{r} 536 \\ \underline{-247} \\ 289 \end{array}$$

(1) $16-7=9$	(2) $16-7=9$	(3) $7+\underline{9}=16$	(4) $7+\underline{9}=16$
$12-4=8$	$13-5=8$	$4+\underline{8}=12$	$5+\underline{8}=13$
$4-2=2$	$5-3=2$	$2+\underline{2}=4$	$3+\underline{2}=5$

Hierbei können zusätzlich noch hinter den Formulierungen von (4) zwei völlig verschiedene Konzepte stecken (Erweiterungstechnik, Auffülltechnik).

3. Mögliche Normierungen

Ein gut durchdachtes Normalverfahren bietet eine Reihe von Vorteilen und sollte daher im Unterricht als Endziel in der Regel angestrebt werden. Möglichen Nachteilen kann man durch geeignete Maßnahmen gegensteuern (für Details vgl. Padberg [1992]).

3.1 Abzieh- oder Ergänzungsverfahren

Bei der mündlichen Subtraktion liegt bei einigen Aufgaben das Ergänzen (Beispiel: 41 – 38), bei anderen das Abziehen (Beispiel: 41 – 3) nahe. Auch bei Sachsituationen ist zum Teil das Wegnehmen oder Abziehen, zum Teil das Ergänzen naheliegend.

Für das Abziehverfahren (beziehungsweise gegen das Ergänzungsverfahren) sprechen folgende Argumente:

- Das Abziehen wird vielfach als die *natürlichere* Sinngebung der Subtraktion aufgefaßt, das Ergänzen wirkt dagegen eher etwas gekünstelt.
- Durch Verwechslungen mit der schriftlichen *Addition* unterlaufen den Schülern beim Ergänzungsverfahren leichter Fehler.
- Schreib- und Sprechweise klaffen beim Ergänzungsverfahren – im Gegensatz zum Abziehverfahren – auseinander (Die Differenz steht in der Schreibweise *unten*, beim Sprechen in der *Mitte)*.
- Lebensnahe *Sachaufgaben* beruhen meistens auf dem Wegnehmen, also *Abziehen*.

Für das Ergänzungsverfahren (beziehungsweise gegen das Abziehverfahren) werden oft folgende Argumente genannt:

- Beim Ergänzungsverfahren wird *nur das Einsundeins* und *nicht* – wie beim Abziehverfahren – zusätzlich das weniger geläufige und daher fehleranfälligere *Einsminuseins* benötigt.
- Das *Vorwärtszählen* beherrschen wir generell besser als das *Rückwärtszählen*.

- Die Subtraktion *mehrerer* Subtrahenden ist beim Ergänzungsverfahren *leichter* zu handhaben und daher *weniger fehleranfällig* als beim Abziehverfahren.
- Im Gegensatz zum Abziehverfahren wird beim Ergänzungsverfahren der *Zusammenhang* zwischen Addition und Subtraktion unmittelbar deutlich.
- Die Herausgabe von *Wechselgeld* bei der den Schülern gut vertrauten Einkaufssituation erfolgt im Sinne des Ergänzens (sofern nicht – wie heute meist üblich – die Registrierkasse den Wechselbetrag direkt angibt!).

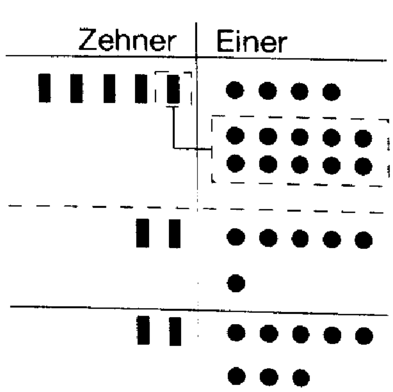
Zu diesen *letzteren* Argumenten kann man *relativierend* anmerken:
- Bei der – schwierigeren – schriftlichen Division wird problemlos das Einsdurcheins benutzt und *nicht* auf das Einmaleins zurückgegriffen.
- Die Phase der Zählstrategien beim Subtrahieren haben die Schüler in der dritten Klasse *schon längst* hinter sich gelassen.
- Die Subtraktion *mehrerer* Subtrahenden läßt sich problemlos über die Addition dieser Subtrahenden lösen. Ferner geht dieser Aufgabentyp über die von uns vertretene Zielsetzung eines *grundsätzlichen* Verständnisses (ohne kompliziertere Sonderfälle) deutlich hinaus (vgl. 1).
- Häufigere Verwechslungen mit der schriftlichen Addition verursachen zusätzliche Fehler.
- Die Herausgabe von Wechselgeld in dieser Form lernen Schüler heute sehr selten – wenn überhaupt noch – kennen. Ferner ist das Ergänzungsverfahren nur in wenigen Spezialfällen (zum Beispiel Minuend 100 oder ähnlich) realitätsnah.

Dennoch hat sich die Kultusministerkonferenz (KMK) 1958 auf das Ergänzungsverfahren (kombiniert mit zwei Übertragstechniken; vgl. 3.2) verständigt und es einheitlich vorgeschrieben. Hauptgrundlage für diese Entscheidung war nach unserer Einschätzung eine empirische Untersuchung von Johnson (1938). Wir gehen auf diese Untersuchung im 5. Abschnitt noch genauer – und kritisch – ein.

3.2 Verschiedene Übertragstechniken

3.2.1 Borgetechnik (Entbündeln)

Die Technik des Übertrags im Sinne der *Borgetechnik* verdeutlicht das folgende Beispiel:

Aufgabe	enaktive/ikonische Realisation	Kurzschreibweise
$\begin{array}{r} 54 \\ -\ 26 \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{r} 5^{1}4 \\ -\ 2\ 6 \\ \hline 2\ 8 \end{array}$ bzw. $\begin{array}{r} 5'4 \\ -\ 26 \\ \hline 28 \end{array}$

Bei dieser Technik wird also im Minuend eine Einheit des *nächsthöheren* Stellenwertes *entbündelt* (man *„borgt"* sich dort eine Einheit und hält dies durch die Notation einer kleinen 1 fest), um so die Subtraktion durchführbar zu machen. Steht an dieser Stelle des Minuenden jedoch eine Null, muß man den *davor* stehenden Stellenwert entbündeln.

Die Borgetechnik – die Bezeichnung ist nicht ganz zutreffend, jedoch gebräuchlich (vgl. Padberg (1992) – wird in der Regel mit dem *Abziehverfahren* kombiniert. Bei unserer folgenden Bewertung dieser Technik legen wir daher diese Kombination zugrunde.
Die Borgetechnik bietet folgende *Vorteile*:

- Die *Begründung* des Verfahrens ist für die Schüler leicht verständlich und auch naheliegend. Das Entbündeln hängt eng mit dem – von der schriftlichen Addition gewohnten – Umbündeln zusammen.
- Der *Ableitungsweg* basiert auf *einer* prägnanten Kernidee; zusätzliche Tricks sind *nicht erforderlich*.
- *Das Abziehverfahren bietet bei Anwendungen* Vorteile (vgl. 3.1).
- Die Borgetechnik läßt sich enaktiv und ikonisch gut *veranschaulichen*.
- Nach geeigneten Vorarbeiten können Schüler die Borgetechnik *selbständig entdecken* (vgl. 5).
- Die Borgetechnik läßt sich durch *halbschriftliches Rechnen* gut vorbereiten.
- Umformungen werden *ausschließlich* im Minuenden vorgenommen. Der Zahlwert bleibt jedoch auch dort *unverändert*.
- Das Abziehverfahren bietet Vorteile bei der *Sprechweise* (vgl. 3.1).

Gegen die Borgetechnik werden meist die folgenden beiden Argumente vorgebracht:

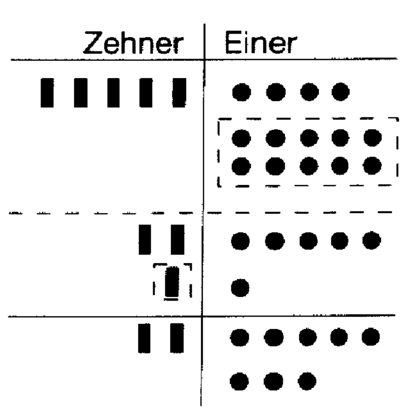
- Subtraktionsaufgaben mit *mehreren Subtrahenden* erfordern bei der Lösung in *einer* Rechnung häufiger mehrfache Entbündelungen.
- Die Lösung von Aufgaben mit *mehreren* (Zwischen-)*nullen* ist relativ kompliziert – und daher fehleranfällig – und muß als Sonderfall ausdrücklich behandelt werden.

Diese beiden Argumente werden stark *relativiert* durch folgende Sachverhalte:

- Der erste Aufgabentyp kann offensichtlich stets problemlos durch eine Zerlegung in zwei Teilaufgaben (zunächst Addition der Subtrahenden, dann Subtraktion dieser Summe vom Minuenden) gelöst werden und geht nach unserer Einschätzung über die Zielsetzung eines *grundsätzlichen* Verständnisses der Subtraktion hinaus (vgl. 1).
- Neuere empirische Untersuchungen in Deutschland (vgl. 5) belegen *nicht* die größere Fehleranfälligkeit bei Aufgaben mit Nullen. Die Grundidee bleibt auch bei diesem Aufgabentyp unverändert das Entbündeln.

3.2.2 Erweiterungstechnik

Der Erweiterungstechnik liegt das Gesetz von der *Konstanz der Differenz* zugrunde. Hiernach bleibt die Differenz zweier Zahlen *unverändert*, wenn wir zum Minuenden und Subtrahenden *dieselbe* Zahl addieren beziehungsweise hiervon subtrahieren. Das folgende *Beispiel* verdeutlicht das Prinzip dieser Technik:

Aufgabe	enaktive/ikonische Realisation	Kurzschreibweise
54 − 26		*a) zunächst* $5\overset{10}{4}$ $-\underset{1}{2}6$ 28 *b) Endform* 54 $-\underset{1}{2}6$ 28

Ist in einer Stellenwertspalte ein *Übertrag* erforderlich, so werden hier Minuend und Subtrahend um den *gleichen* Betrag vergrößert oder – wie man nicht ganz korrekt sagt – „*erweitert*". Der „Trick" hierbei: Während zur betreffenden Ziffer des Minuenden 10 Einheiten (im Beispiel 10 Einer) addiert werden, wird dieser Betrag im Subtrahenden gebündelt dem nächsthöheren Stellenwert als *eine* (nächsthöhere!) Einheit (im Beispiel als 1 Zehner) zugeschlagen. Hierdurch bleibt die *Differenz* unverändert (nicht hingegen der Minuend und der Subtrahend!), und wir können jetzt mit der Differenzbildung in *dieser* Stellenwertspalte beginnen.

Die Erweiterungstechnik kann sowohl mit dem Abzieh- wie dem Ergänzungsverfahren kombiniert werden. Während sie *früher* in den USA mit dem Abziehverfahren kombiniert wurde (vgl. 5), wird sie in Deutschland mit dem Ergänzungsverfahren kombiniert. *Diese* Kombination legen wir daher der folgenden Bewertung zugrunde.

Die Erweiterungstechnik weist folgende *Vorteile* auf:

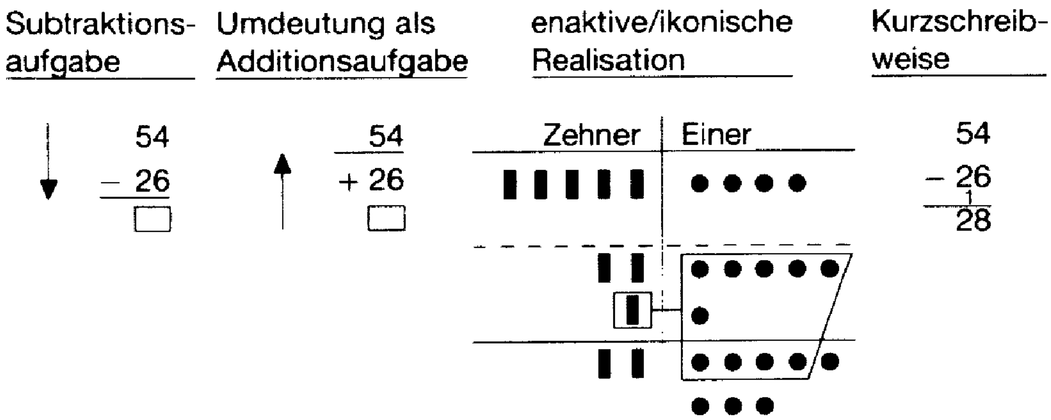
- Diese Technik kann gut enaktiv und ikonisch *veranschaulicht* werden.
- Aufgaben mit *Nullen* im Minuend bilden keinen Sonderfall (dennoch machen nach Gerster (1982) Schüler bei diesem Aufgabentyp viele Fehler).
- Aufgaben mit *mehreren Subtrahenden* lassen sich ohne größere Probleme lösen.

Die Erweiterungstechnik besitzt folgende *Nachteile:*

- Ein *wirkliches Verständnis* dieses Verfahrens kann im Unterricht kaum erreicht werden (vgl. auch 5). Das anspruchsvolle Gesetz von der Konstanz der Differenz wird benötigt. Seinen Einsatz bei der Erweiterungstechnik *wirklich* zu verstehen, ist für Schüler der dritten Klasse ausgesprochen schwierig.
- Die Ableitung basiert – aus der Sicht der Schüler – auf *zwei „Tricks"*, nämlich zum einem auf dem Übergang zu einer *neuen* Aufgabe durch das Gesetz von der Konstanz der Differenz, zum anderen auf der *sehr speziellen* Anwendung dieses Gesetzes (es wird *nicht* im Minuend und Subtrahend jeweils zum Beispiel die Zahl 10 addiert – dann bliebe die Aufgabe unverändert *unlösbar* –, sondern es müssen zum Beispiel im Minuenden bei den Einern 10 Einer und im Subtrahenden bei den Zehnern 1 Zehner addiert werden). Der Ableitungsweg ist so nur *wenig prägnant.*
- Eine *selbständige Entdeckung* des Ableitungsweges durch die Schüler ist kaum möglich (vgl. 5).
- Das Ergänzungsverfahren ist bei vielen *Sachaufgaben* nachteilhaft.
- Die Erweiterungstechnik läßt sich durch *halbschriftliches Rechnen* nur schwer vorbereiten.
- Durch die – unter Umständen mehrfache! – *Abänderung* der gegebenen Zahlen wird die ursprüngliche Aufgabenstellung *stark verändert.* Unter diesem Gesichtspunkt bereitet der Einsatz der Erweiterungstechnik bei der Lösung von Sachaufgaben deutliche Probleme, da die *Sachgebundenheit* der Daten – allerdings nur beim Lösen der Aufgabe – *ignoriert* wird.
- Die *Endform* der Kurzschreibweise läßt die entscheidende Idee des „Erweiterns" überhaupt *nicht mehr* sichtbar werden. Daher besteht die Gefahr einer *gedankenlosen* Mechanisierung.
- Die Sprechweise beim Ergänzungsverfahren ist problematisch (vgl. 3.1).

3.2.3 Auffülltechnik

Der *Grundgedanke* der Auffülltechnik ist das *„Auffüllen"* des Subtrahenden zum Minuenden. Genauer: *Ausgangspunkt* ist der *Subtrahend,* zu dem eine – durch die Rechnung zu bestimmende – Zahl *hinzugefügt* werden muß, um den *Minuenden* als *Zielbetrag* zu erreichen. Die Subtraktionsaufgabe wird also praktisch als Additionsaufgabe mit einem fehlenden Summanden aufgefaßt, wobei die Summe oben steht. Das folgende *Beispiel* verdeutlicht den Grundgedanken dieser Technik:



Bei dieser Technik wird also der *Minuend überhaupt nicht* verändert. Ist in einer Spalte ein *Übertrag* erforderlich, so wird der *Subtrahend* zunächst auf die *nächsthöhere* Einheit aufgefüllt (im Beispiel um 4 E auf 10 E = 1 Z) und diese Einheit in der nächsthöheren Stellenwertspalte notiert (bzw. bei der Kurzschreibweise durch eine kleine 1 dort kenntlich gemacht). Dann füllen wir den Subtrahend *weiter* auf bis zum *Zielbetrag* (im Beispiel um 4 E auf 4 E). Diese explizite Zweiteilung beim Auffüllen wird in dieser ausführlichen Form nur zu Beginn realisiert. Die Auffülltechnik kann offensichtlich *nur mit dem Ergänzungsverfahren* kombiniert werden.

Die Auffülltechnik weist folgende *Vorteile* auf:
- Die *Grundidee* der Auffülltechnik ist *naheliegend*, nämlich das schrittweise Auffüllen vom Subtrahend zum Minuend. Die früher übliche Form der Geldherausgabe beim Einkauf bietet in Sonderfällen eine brauchbare Grundvorstellung für diese Einführung.
- Die Auffülltechnik läßt sich durch *halbschriftliches Rechnen* gut vorbereiten.
- *Minuend wie Subtrahend* bleiben bei dieser Technik *unverändert*. Hiermit ergeben sich keine Probleme bei der Behandlung von Sachaufgaben.
- Aufgaben mit (Zwischen) *nullen* im Minuend sind äußerst *leicht* zu lösen.
- Subtraktionsaufgaben mit *mehreren Subtrahenden* lassen sich ohne größere Probleme lösen. Es muß allerdings beachtet werden, daß statt des vertrauten Auffüllens beispielsweise zur 10 oder 100 in der Regel mindestens zur 20 oder 200 (oder zu noch weiter entfernten Vielfachen von 10 bzw. 100) aufgefüllt werden muß.

Die Auffülltechnik weist gewisse *Nachteile* in folgenden Bereichen auf:
- Für ein gründliches Verständnis der Auffülltechnik ist der erforderliche *Trick* (zunächst Auffüllen zur nächsthöheren Einheit, dann Umwechseln, danach erst ein weiteres Auffüllen bis zur Zielzahl) etwas hinderlich.
- Das Ergänzungsverfahren ist bei vielen Sachaufgaben nachteilhaft.
- Die *Veranschaulichung* durch Bild oder Material ist problematisch. So müssen etwa bei dem einleitend genannten Beispiel die 10 Einer als 1 Zehner zu den Zehnern hinzugefügt werden, während gleichzeitig ein Teil dieser 10 Einer, nämlich 4 Elemente, unverändert bei der Differenzbildung berücksichtigt werden müssen.
- Die *endgültige Sprechweise* läßt oft den Auffüllvorgang nicht mehr sichtbar werden.
- Die Sprechweise beim Ergänzungsverfahren ist problematisch (vgl. 3.1).

4. Normierung der schriftlichen Subtraktion in Deutschland und dem Ausland

Die folgende Tabelle zeigt die fünf möglichen Kombinationen aus den drei Übertragstechniken und dem Abzieh- bzw. Ergänzungsverfahren an:

	Borgen	Erweitern	Auffüllen
Abziehen	①	②	–
Ergänzen	③	④	⑤

Gegenwärtig sind in *Deutschland* nach den KMK-Beschlüssen von 1958 (und 1976) nur die Kombinationen ④ und ⑤ im Unterricht erlaubt. Vor 1958 war dagegen besonders im norddeutschen Bereich das Verfahren ① weit verbreitet. Nach 1958 dominierte zunächst in den Schulbüchern das u.a. von Breidenbach propagierte Verfahren ⑤. Etwa seit der Einführung der neuen Mathematik verlor ⑤ in den Schulbüchern stark an Bedeutung zugunsten des – u.a. von Oehl bevorzugten – Verfahrens ④, das gegenwärtig das dominierende Verfahren in den deutschen Schulbüchern ist.

Ganz anders stellt sich die Situation dar, wenn wir einen Blick über die deutschen Grenzen werfen. So ist das *Verfahren ① weltweit am stärksten verbreitet*, so zum Beispiel

- in den wichtigen Gastarbeiterherkunftsländern Türkei, Italien, Portugal, Spanien und Teilen des früheren Jugoslawiens,
- in den USA und England, wo das Verfahren ① *heute* weit verbreitet ist, oder auch
- in China, Japan und Indonesien u.a.

5. Empirische Befunde

Wir wollen im folgenden auf drei empirische Untersuchungen genauer eingehen – und zwar auf die Untersuchungen von Johnson (1938), Brownell (1949) und Mosel-Göbel (1988). Während bei den Untersuchungen von Mosel-Göbel bei *allen* und bei Brownell bei der *Hälfte* der untersuchten Klassen eine das *Verständnis betonende Einführung* der Subtraktion erfolgte, war die Vorgehensweise bei Johnson *generell* und bei Brownell bei der *anderen Hälfte* der Klassen *drillorientiert* – also für den deutschen Grundschulunterricht *atypisch*.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Anzahl der untersuchten Schüler, über die Schuljahre (in denen sich die untersuchten Schüler befanden), über die Anzahl der untersuchten Klassen, über die Frage, ob im Zusammenhang mit der Untersuchung vorher ein genau kontrollierter Unterricht stattfand und über die Anzahl der durchgeführten Interviews:

	Schüler	Schuljahr	Klassen	Unterricht	Interviews
Johnson (1938)	1054	3.–8.	?	nein	–
Brownell (1949)	1400	3.	41	3 Wochen	2500
Mosel-Göbel (1988)	124	3.	4	ja	124

Die Verteilung der Schüler auf die verschiedenen Methoden kann man der folgenden Tabelle entnehmen:

	①	②	③	④	⑤	⑤'
Johnson	526	342	–	–	186	–
Brownell (ca.)	700	700	–	–	–	–
Mosel-Göbel (ca.)	30	–	–	30	30	30

Hierbei handelt es sich bei ⑤' um eine Modifikation der Auffülltechnik mit Hilfe des Kilometerzählermodells (vgl. Padberg (1992)).
Die Untersuchungen erbrachten folgende Ergebnisse:

(1) Verständnis des Kalküls

Bei Johnson fehlen – infolge der rein mechanischen Vorgehensweise – entsprechende Hinweise, nach Brownell ist die Borgetechnik ① der Erweiterungstechnik ② *überlegen*, nach Mosel-Göbel ist die Borgetechnik ① der Erweiterungstechnik ④ und der Auffülltechnik ⑤ *haushoch überlegen*. So erreichen die Stufe des *begründenden Verständnisses* bei der Borgetechnik fast 80% der Schüler, während der entsprechende Anteil bei der Erweiterungs- und Auffülltechnik nur um die 10% liegt (vgl. Mosel-Göbel (1988)). Mosel-Göbel äußert in diesem Zusammenhang die Vermutung, daß eine ausführliche Sprechweise – wie sie bei der Borgetechnik praktiziert wird – „einem Ausbau und einer Festigung des begründenden Verständnisses entgegenkommt, wohingegen eine zu früh normierte Sprechweise das im Ansatz vorhandene begründende Verständnis möglicherweise verkümmern läßt" (Mosel-Göbel (1988), S. 558).

(2) Selbständige Entdeckung der Übertragstechnik durch die Schüler

Nach Mosel-Göbel (1988) weisen die Verfahren ①, ④ und ⑤ bezüglich einer *selbständigen Entdeckung der Übertragstechnik durch die Schüler* – nach vorangegangenen Vorübungen mit Hilfe des jeweils eingeführten Materials – sehr deutliche Unterschiede auf. Während *jeder dritte* Schüler die Borgetechnik selbständig entdeckte, gelang dies bei der Auffülltechnik nur noch *jedem sechsten* Schüler und gelang dies bei der Erweiterungstechnik *keinem einzigen* Schüler mehr (Mosel-Göbel (1988), S. 556). Der Tendenz nach vergleichbare Ergebnisse mit Mosel-Göbel bezüglich der Borgetechnik und der Erweiterungstechnik finden wir auch bei Brownell (1949).

(3) Transfer der Übertragstechnik auf noch nicht unterrichtete Aufgabentypen

Brownell testete in seiner Untersuchung auch die für einen guten Mathematikunterricht wichtige Frage des Grades der Übertragung des Gelernten auf neuartige Aufgaben (selbständige Übertragung des Prinzips des Übertrags von zweistelligen Zahlen auf dreistellige Zahlen). Hier war die Borgetechnik *deutlich besser* als die Erweiterungstechnik.

(4) Schwierigkeiten bei einem – am Verständnis orientierten – Unterricht

Nach Brownell kann man die Borgetechnik als Lehrer *leicht* so unterrichten, daß die Schüler dieses Verfahren *wirklich* verstehen, während dies bei der Erweiterungstechnik *große Schwierigkeiten* bereitet.

(5) Fehlerhäufigkeit

Bei der Beurteilung der Fehlerhäufigkeit muß man aufgrund der empirischen Befunde unterscheiden zwischen einer *mechanischen* Subtraktionseinführung und einer Einführung der Subtraktion unter Betonung des *Verständnisses*. So ist nach übereinstimmenden Befunden von Brownell und Johnson die Fehlerquote bei einer *mechanischen* Subtraktionseinführung bei der Borgetechnik höher als bei der Erweiterungstechnik (Johnson erhält in seiner Untersuchung 18% mehr Fehler bei der Borgetechnik), während nach Johnson bei dieser Einführungsart zwischen Erweiterungstechnik und Auffülltechnik *kein* signifikanter Unterschied bezüglich der Fehlerhäufigkeit besteht. Für den in Deutschland üblichen Mathematikunterricht sind allerdings *diese* Befunde – insbesondere auch im Taschenrechnerzeitalter, wo man die Subtraktionsaufgaben per Taschenrechner rein mechanisch mit noch viel höheren Erfolgsquoten richtig lösen kann – nur von völlig untergeordneter Bedeutung. Wichtiger sind hier vielmehr die Erfolgsquoten bei einer das *Verständnis* betonenden Einführung.
Bei dieser Einführungsart gibt es nach Mosel-Göbel *keine* wesentlichen Unterschiede in den Erfolgsquoten zwischen der Borge-, Erweiterungs- und Auffülltechnik, während bei Brownell teils die Borgetechnik, teils die Erweiterungstechnik günstiger abschneidet und teils kein Unterschied zwischen beiden Techniken zu beobachten ist. Interessant in diesem Zusammenhang sind auch die Befunde von Mosel-Göbel bezüglich der Subtraktionsaufgaben mit *Nullen* im Minuend: So ist der Unterschied in der Fehlerhäufigkeit bei den drei untersuchten Aufgaben

$$\begin{array}{r} 703 \\ -\underline{209} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 807 \\ -\underline{598} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 600 \\ -\underline{186} \end{array}$$

zwischen der Borgetechnik und Erweiterungstechnik nur *minimal*, während bei zweien von diesen drei Aufgaben die Fehlerquote bei der Auffülltechnik deutlich höher liegt. Mosel-Göbel hebt bezüglich der Subtraktionsaufgaben allgemein schließlich noch hervor, daß Schüler mit begründendem Algorithmusverständnis die niedrigste Fehleranfälligkeit zeigen und daß sich die Borgetechnik durch einen hohen Anteil von Schülern mit diesem begründenden Verständnis auszeichnet.

(6) Lösungsdauer

Vor der Einführung von Taschenrechnern bildete auch die *durchschnittliche Lösungsdauer* je Aufgabe ein nicht unwichtiges Kriterium bei der Auswahl der Übertragstechnik. Heute dagegen bewirkt zweifelsohne bei vielen Aufgaben der Taschenrechner die schnellste Lösung, und daher ist die Lösungsdauer von sehr untergeordneter Bedeutung. Nicht ganz überraschend ergeben sich auch bei der Lösungsdauer Unterschiede, je nachdem, ob die Übertragstechniken nun weitgehend mechanisch oder unter Betonung von Verständnis eingeführt werden. Bei weitgehend *mechanischer* Einführung benötigen die Schüler nach Johnson bei der Lösung von Subtraktionsaufgaben nach der Borgetechnik wesentlich mehr Zeit – nämlich um 67% mehr – als bei der Auffülltechnik. Dagegen sind die Unterschiede in der Lösungsdauer zwischen Borgetechnik und Erweiterungstechnik mit 15% wesentlich geringer. Ganz anders stellt sich die Situation dar, wenn die Subtraktion unter der Betonung von *Verständnis* eingeführt wird: Dann ist die Lösungsdauer nach Brownell *teils* bei der Borgetechnik *teils* bei der Erweiterungstechnik *kürzer*.

6. Zusammenfassung

Der KMK-Beschluß von 1958 (und 1976) schreibt die Schreib- und Sprechweise bei der schriftlichen Subtraktion detailliert vor und läßt so nur die Auffülltechnik und die Erweiterungstechnik (kombiniert mit dem Ergänzungsverfahren) zu (vgl. Padberg (1992)). Hintergrund hierfür ist offensichtlich die schon vorgestellte empirische Untersuchung von *Johnson*, die zu dem Schluß kommt, daß die *Auffülltechnik* am günstigsten ist und daher als erste Wahl genommen werden sollte, da sie bezüglich Schnelligkeit und Fehleranzahl am besten abschneidet. Wesentlich langsamer, jedoch in der Fehlerquote vergleichbar mit der Auffülltechnik ist hiernach die *Erweiterungstechnik* (jedoch – abweichend von den gegenwärtigen Verhältnissen in Deutschland – kombiniert mit dem *Abziehverfahren!*), während die *Borgetechnik* nach dieser Untersuchung am ungünstigsten abschneidet (vgl. Padberg (1992)). Da die Auffülltechnik – also die erste Wahl nach Johnson – nur mit dem *Ergänzungsverfahren* kombinierbar ist, war es folgerichtig im Sinne dieser Untersuchung, das *Ergänzungsverfahren* vorzuschreiben. Entsprechend dieser (wahrscheinlichen) Intention der KMK dominierte auch in den ersten Jahren nach dem KMK-Beschluß die *Auffülltechnik* (vgl. 4)

An diesem KMK-Beschluß ist jedoch mindestens in zweierlei Hinsicht Kritik zu üben:

(1) Der von Johnson untersuchte Unterricht (weitgehend *mechanische* Subtraktionseinführung) entspricht *nicht* der in Deutschland üblichen Praxis. Daher ist es sehr fragwürdig, diese Ergebnisse einfach auf Deutschland zu übertragen.

(2) Die sehr gründliche Untersuchung von *Brownell*, die sehr viel aspektreicher und gründlicher ist als die Johnson-Untersuchung und die in den für Deutschland relevanten Teilen (Einführung der schriftlichen Subtraktion unter der Betonung von Verständnis) zu *ganz anderen* Ergebnissen kommt als Johnson (vgl. 5) lag zum Zeitpunkt des KMK-Beschlusses schon seit mehreren Jahren vor.

Um abschließend zu einem fundierten Urteil bezüglich der auszuwählenden Subtraktionsmethode zu gelangen, fassen wir in der folgenden Tabelle knapp und übersichtlich alle in dieser Arbeit genannten Daten zusammen:

	Borgetechnik	Erweiterungstechnik	Auffülltechnik
Verständnis	+	–	0
Prägnanz	+	–	+
Veranschaulichung	+	+	–
selbständige Entdeckung	+	–	0
Transfer	+	–	?
Anwendungen (Typ Wegnehmen)	+	–	–
Halbschriftliche Vorarbeiten	+	0	+
Fehlerhäufigkeit (Verständnis)	+	+	+
Fehlerhäufigkeit (Nullen)	+	+	0
Fehlerhäufigkeit (mechanisch)	0	+	+
Lösungsdauer (Verständnis)	+	+	?
Lösungsdauer (mechanisch)	–	0	+

Aus der tabellarischen Übersicht ergibt sich meines Erachtens als eindeutige Konsequenz, daß der aus den Jahren 1958 und 1976 herrührende *KMK-Beschluß schleunigst zugunsten der Borgetechnik revidiert werden sollte* – insbesondere wenn man noch bedenkt, daß im Taschenrechner- und Computerzeitalter Punkte wie das *wirkliche Verständnis* eines Rechenverfahrens durch die Schüler, die Frage der *selbständigen Entdeckung* der zentralen Übertragstechnik (dies ist gerade auch im Falle des Vergessens dieser Technik im Verlauf der Schulzeit etwa durch intensive Taschenrechnerbenutzung wichtig!) oder die Frage des *Transfers* des bekannten Verfahrens auf neue, noch nicht behandelte Aufgabentypen von allergrößter Wichtigkeit sind, während Fragen der Minimierung des Verfahrensablaufs – und damit auch der Minimierung der *Lösungsdauer* pro Aufgabe – völlig unerheblich geworden sind.

Literaturhinweise

Brownell, W. A. / Moser, H. E.: Meaningful vs. mechanical learning: A study in grad III subtraction. Duke University Press, Durham 1949

Gerster, H.-D.: Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie. Freiburg 1982

Johnson, J. Th.: The relative merits of three methods of subtraction. New York 1938

Mosel-Göbel, D.: Algorithmusverständnis am Beispiel ausgewählter Verfahren der schriftlichen Subtraktion. Eine Fallstudienanalyse bei Grundschülern. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 12/1988, S. 554–559

Padberg, F.: Didaktik der Arithmetik, Mannheim 1992

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. F. Padberg, Fakultät für Mathematik, Universität, Postfach 10 01 31, 33501 Bielefeld