Problembereiche bei der Behandlung von Dezimalbrüchen – eine empirische Untersuchung an Gymnasialschülern

von Friedhelm Padberg

Über die Schwierigkeiten von Schülern und Lehrern mit den *gemeinen Brüchen* hört man häufig Klagen und dies nicht nur bei der systematischen Behandlung in der sechsten Klasse, sondern ebenso auch in höheren Klassen. Durch empirische Untersuchungen (vgl. [14]) kennen wir mittlerweile recht gut die typischen Schülerschwierigkeiten in diesem Bereich. Dagegen hört man nur *sehr selten* Klagen über Probleme mit den *Dezimalbrüchen*. Hieraus allerdings zu folgern, daß die Behandlung der Dezimalbrüche – etwa wegen ihrer Nähe zu den vertrauten natürlichen Zahlen – problemlos und leicht ist, ist jedoch völlig verfehlt wie die vorliegende, von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) unterstützte Untersuchung belegt. Im Gegenteil, der Umfang der Schülerschwierigkeiten in diesem Bereich *übertrifft* in wesentlichen Bereichen deutlich noch die – bekanntlich schon großen – Schwierigkeiten mit den gemeinen Brüchen.

1. Die vorliegende Untersuchung – einige Anmerkungen und Bemerkungen

Es gibt *verschiedene methodische Möglichkeiten*, Schülerfehler empirisch zu erheben. So unterscheidet beispielsweise Radatz [21]:
- die Analyse von Schülerfehlern aus schriftlich vorliegenden Aufgabenlösungen (Hausaufgaben, Klassenarbeiten, Übungen);
- »lautes Denken« durch den Schüler bei der Aufgabenbearbeitung;
- diagnostische Gespräche bzw. Interviews;
- Einsatz von diagnostischen Aufgabensätzen bzw. Tests.

Wir setzen in unserer Untersuchung einen selbstentwickelten *diagnostischen Test* ein, da nur diese Methode gestattet, die Schwierigkeiten bei Dezimalbrüchen mit vertretbarem Aufwand bei einer hinreichend großen Anzahl von Schülern systematisch zu untersuchen. Nur so ist sichergestellt, daß die gefundenen Ergebnisse für *viele Klassen und Lehrer* von *praktischer* Bedeutung sind. Eine Ergänzung der gefundenen Daten durch diagnostische Interviews ist vorgesehen.

Unseren diagnostischen Test entwickelten wir auf der Grundlage einer gründlichen Kenntnis vorliegender angloamerikanischer, französischer und – einiger weniger – deutschsprachiger Fehleruntersuchungen über Dezimalbrüche und erprobten ihn in einer *Voruntersuchung* an rund 100 Schülern verschiedener Gymnasien und Realschulen. Mit seiner Hilfe wollen wir fehlerhafte Vorstellungen und Verständnisschwierigkeiten von Schülern beim Dezimalbruchbegriff sowie systematische (vgl. 2.), aber auch typische Fehler bei den vier Rechenoperationen mit Dezimalbrüchen identifizieren, analysieren und – soweit möglich – Ursachen für diese fehlerhaften Vorstellungen bzw. Fehler bestimmen. Hierbei ist die Feststellung und Bekämpfung gerade systematischer Fehlvorstellungen und Fehler besonders wichtig und sinnvoll, da sich diese Fehler gut gezielt bekämpfen und so relativ rasch große Erfolge erzielen lassen.

Unsere *Hauptuntersuchung* im November 1987 umfaßte 34 vollständige Klassen des 7. Schuljahres mit knapp 900 Schülern und 30 verschiedenen Lehrern an 11 Gymnasien in Westfalen. Aus arbeitstechnischen Gründen basiert diese Arbeit auf der Auswertung von jeweils 50 % der Testbogen jeder Klasse. Wir wählten als Untersuchungszeitpunkt bewußt den Anfang des *7. Schuljahres*, um so zur systematischen Behandlung der Dezimalbrüche in der 6. Klasse einen Abstand von einigen Monaten zu haben und um so aussagekräftigere *Langzeiteffekte* zu messen. Der Test dauerte jeweils *eine Schulstunde*. Um die *Einheitlichkeit* in der Testdurchführung zu gewährleisten, war neben dem Fachlehrer jeweils ein- und dieselbe Mitarbeiterin in allen Klassen persönlich anwesend. Um ein *Abschreiben* zu verhindern, bildeten wir aus der Gesamtheit der Testaufgaben *zwei verschiedene Testversionen* (Version A, Version B), die jeweils von benachbarten Schülern bearbeitet wurden. Der Test wurde von den Klassen *unvorbereitet* geschrieben, da unsere Vorgespräche mit den Schulleitern bewußt *keine* Hinweise auf die Dezimalbruchrechnung enthielten und wir sämtliche Klassen an einer Schule jeweils an *einem* Vormittag testeten. Die Benutzung von *Taschenrechnern* wurde nicht erlaubt. Sämtliche Rechnungen einschließlich Nebenrechnungen notierten die Schüler auf den entsprechend angelegten Testbogen. Die methodische Vorgehensweise der Lehrer stellten wir durch einen *Lehrerfragebogen* fest. Gravierende Unterschiede waren nicht erkennbar. Ein wichtiger Bezugspunkt für die methodische Vorgehensweise ist zweifelsohne das *Schulbuch*. In gut der Hälfte der Klassen wurde das Schulbuch »Mathematik Gymnasium« *(Kuypers/Lauter)*, Schwann Verlag, in knapp jeder 3. Klasse das Schulbuch »Mathematik« *(Hahn/Dzewas)*, Westermann-Verlag, benutzt. Drei Klassen setzten das Schulbuch *Lambacher/Schweizer*, Klettverlag, zwei Klassen »Mathematik heute«, Schroedel Schulbuchverlag, ein. Auch bei den Schulbüchern lassen sich in diesem Bereich *keine* gravierenden Unterschiede konstatieren.

Der von uns entwickelte *diagnostische Test* besteht aus Aufgaben zum Dezimalbruchbegriff sowie zu den vier Rechenoperationen. Hierbei enthalten *beide* Testversionen Aufgaben zu verschiedenen Aspekten des Dezimalbruchbegriffs, die *Testversion A* zusätzlich Aufgaben zur Addition und Multiplikation, die *Testversion B* zur Subtraktion und Division.

Verschiedene Aspekte des *Dezimalbruchbegriffs* testen wir durch folgende Aufgabentypen ab:

- Kenntnis der *Schreib- und Sprechweise* und des *Stellenwertsystemaufbaus* bei Dezimalbrüchen (Version A: 11 Teilaufgaben, Version B: 10 Teilaufgaben)
  Beispiele für Aufgabentypen:
  ○ Schreibe als Dezimalbruch: 5 Hundertstel!
  ○ Kreuze die *Zehntel* in 7,654 an!
  0 000
  ○ 8,65 bedeutet 8 Einer, 6 ________, 5 ________.

- *Anschauliche Vorstellungen* und *Größenvorstellungen* von Dezimalbrüchen (Version A und B jeweils 10 Teilaufgaben)
  Beispiele für Aufgabentypen:
  ○ Welche Zahl wird durch einen gegebenen Pfeil am Zahlenstrahl markiert?
  ○ Markiere eine gegebene Zahl durch einen Pfeil am Zahlenstrahl!
  ○ Färbe 0,45 von einem gegebenen Quadrat dunkel!
  ○ Wie schwer ist ungefähr ein 14jähriger Schüler? (Ankreuzen aus 4 Antwortmöglichkeiten)

- Umwandlung von *Größen* (Version A: 10 Teilaufgaben, Version B: 6 Teilaufgaben)
  Beispiele für Aufgabentypen:
  ○ Schreibe in DM (als Dezimalbruch) auf: 8 Pf = ___ DM!
  ○ Schreibe in g auf: 0,45 kg = _____ g!

- *Erweitern/Kürzen* und *Einbettung* von Dezimalbrüchen (Version A: 6 Teilaufgaben, Version B: 7 Teilaufgaben)
  Beispiele für Aufgabentypen:
  - 4 Zehntel ist dasselbe wie □ Hundertstel.
  - Schreibe mit 2 Stellen nach dem Komma: 7 = 7, □□!
  - Kreuze die richtige Aussage an (0,3 < 0,30; 0,3 = 0,30; 0,3 > 0,30)!
- Kenntnis der *Anordnung* (Version A: 8 Teilaufgaben, Version B: 7 Teilaufgaben)
  Beispiele für Aufgabentypen:
  - Umrande die *kleinste* Zahl (von 5 gegebenen Zahlen)!
  - Umrande die *größte* Zahl (von 5 gegebenen Zahlen)!
  - Nenne eine Zahl *zwischen* 8,3 und 8,4!
  - Umrande die Zahl, die am *nächsten* bei 0,18 liegt (von 3 gegebenen Zahlen)!
- *Umformung* von Dezimalbrüchen in *gemeine Brüche* (Version A: 5 Teilaufgaben, Version B: 6 Teilaufgaben)
  Beispiele von Aufgabentypen:
  - Schreibe als gemeinen Bruch 0,29; 2,7!
- *Umformung* von gemeinen Brüchen in *Dezimalbrüche* (Version A: 10 Teilaufgaben, Version B: 11 Teilaufgaben)
  Beispiele von Aufgabentypen:
  - Schreibe als Dezimalbruch $\frac{5}{1000}$; $\frac{287}{100}$; $4\frac{3}{10}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$!

Die Testaufgaben zur *Addition* (Version A: 15 Teilaufgaben) lassen sich grob nach folgenden Gesichtspunkten typisieren:
- Aufgaben mit gleicher bzw. verschiedener Anzahl von Dezimalen
- Aufgaben ohne bzw. mit Übertrag/Übertrag von den Zehnteln zu den Einern
- Nullen bzw. keine Nullen bei den Dezimalen
- Kombination von natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen
- Effekte durch Übergang zu Größen?
- Regelkenntnis

Die Testaufgaben zur *Subtraktion* (Version B: 19 Teilaufgaben) kann man u. a. nach folgenden Gesichtspunkten klassifizieren:
- Aufgaben mit gleicher Anzahl von Dezimalen
- Aufgaben mit verschiedener Anzahl von Dezimalen
  - Der Minuend hat mehr Stellen als der Subtrahend.
  - Der Minuend hat weniger Stellen als der Subtrahend.
- Aufgaben ohne bzw. mit einem oder mehreren Überträgen/Übertrag von den Zehnteln zu den Einern
- Nullen bzw. keine Nullen bei den Dezimalen
- Kombination von natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen
- Effekte durch Übergang zu Größen?
- Effekte durch Benutzung des quasikardinalen Aspektes (Griesel [5])?
- Regelkenntnis

Die Testaufgaben zur *Multiplikation* von Dezimalbrüchen (Version A: 22 Teilaufgaben) kann man u. a. unter folgenden Aspekt typisieren:
- Multiplikation mit Zehnerpotenzen
- Multiplikation mit anderen natürlichen Zahlen
- Multiplikation von Dezimalbrüchen mit 0,1; 0,01; 0,001
- Multiplikation von Dezimalbrüchen mit Dezimalbrüchen (allgemeiner Fall)
- Nullen bzw. keine Nullen bei den Dezimalen
- Ergänzung von Nullen beim Ergebnis notwendig

– Übertrag von den Zehnteln zu den Einern
– Effekte durch Benutzung des quasikardinalen Aspektes?
– Regelkenntnis
– Regelbegründung

Bei den Testaufgaben zur *Division* (Version B: 31 Teilaufgaben) sprechen wir u. a. folgende Gesichtspunkte an:
– Division von natürlichen Zahlen bzw. Dezimalbrüchen durch Zehnerpotenzen
– Division von natürlichen Zahlen durch 0,1; 0,01; 0,001
– Division von Dezimalbrüchen durch natürliche Zahlen (keine Zehnerpotenzen)
  ○ Endnullen anzuhängen nicht erforderlich
  ○ Endnullen anzuhängen erforderlich
– Division von natürlichen Zahlen durch Dezimalbrüche (allgemeiner Fall)
– Division von Dezimalbrüchen durch Dezimalbrüche
  ○ Gleiche Anzahl von Dezimalen
  ○ Der Dividend besitzt mehr Dezimalen.
  ○ Der Divisor besitzt mehr Dezimalen.
– Nullen bzw. keine Nullen bei den Dezimalen
– Übertrag von den Einern zu den Zehnteln
– Effekte durch den Aspekt des Messens?
– Regelkenntnis
– Regelbegründung

Wir halten in unserem Test die *rechnerischen Anforderungen* insbesondere bei den Multiplikations- und Divisionsaufgaben bewußt gering, um auf diese Art um so deutlicher die für die *Dezimalbruchrechnung* spezifischen Probleme abklären zu können. Die meisten Aufgaben unseres Tests sind so konstruiert, daß Schüler bei der Benutzung von falschen Rechenstrategien *nicht zufällig das »richtige« Ergebnis* erhalten – jedenfalls im Rahmen der von uns erwarteten bzw. vermuteten Fehlerstrategien. Das Problem der unterschiedlichen *Bearbeitungsdauer* lösen wir durch Zusatzaufgaben. Zur Vermeidung von überflüssigen Flüchtigkeitsfehlern insbesondere durch die irrtümliche Verwechslung von Rechenoperationen fassen wir meist zwischen drei und sechs Aufgaben *je Rechenoperation* oder *je Aspekt zum Dezimalbruchbegriff* zu einem *»Block«* zusammen und grenzen diesen Block sehr deutlich vom nächsten Block ab. Zur Vermeidung von Einschleifeffekten und Ermüdungserscheinungen durch zu starke Monotonie bei der Aufgabenstellung wechseln wir innerhalb einer Rechenoperation *jeweils den Aufgabentyp* ab und bilden *keine größeren Blöcke.*

2. Schülerfehler – einige Bemerkungen

Aufgrund unserer Fehleranalysen im Bereich der gemeinen Brüche, der Dezimalbrüche wie auch der natürlichen Zahlen stimmen wir mit Radatz [21] darin überein, daß Schülerfehler im Mathematikunterricht *nur selten* rein zufällig oder durch flüchtiges Verwechseln entstehen, sondern daß sie *fast immer* auf einer bestimmten Lösungsstrategie bzw. Regelstruktur basieren, die man nachvollziehen und begründen kann, die für die Schüler selbst sinnvoll ist und die Schüler oft in Aufgabenklassen systematisch und konsequent anwenden. Im Unterschied zu anderen Fächern bemühen sich die Schüler im Mathematikunterricht, bei jeder Aufgabe eine »Lösung« zu gewinnen. Viele Schüler fassen Mathematik hierbei als ein Regelspiel auf, bei dem man eine Lösungsregel kennen, ggf. auch entwickeln und dann anwenden muß. Dabei auftretende Widersprüche bestimmter Lösungen zur Aufgabenstellung oder zu den Erfahrungen in der Realität werden – darauf weist Raddatz [21] zu Recht hin – von vielen Schülern nicht empfunden.

Flüchtigkeitsfehler treten nach Reitberger [22] bei bestimmten Prozessen der Informationsaufnahme und -verarbeitung auf. Läuft die *Informationsaufnahme* u. a. so ab, daß zunächst aufgrund der Erfahrung ein *antizipierendes Schema* gebildet wird, und daß dann dieses Schema die Wahrnehmung *selektiv* aktiviert (Neisser [13] nach Reitberger [22]), so kann man hierdurch Einstellungs- und Ähnlichkeitsfehler erklären. Wird ein falsches antizipiertes Schema nicht geprüft, so liegt ein *Einstellungsfehler* vor. Ähneln sich das antizipierte Schema und der wahre Sachverhalt in Formmerkmalen, so spricht man von einem *Ähnlichkeitsfehler*. Bei der *Informationsverarbeitung* können nach Reitberger [22] Flüchtigkeitsfehler beim Erinnern kurzfristig gespeicherter episodischer Informationen auftreten, und zwar *Auslassungsfehler*, wenn der Erinnerungsprozeß unterbrochen wird, und *Ähnlichkeitsfehler*, wenn zwei ähnliche Informationen vorliegen und diese miteinander verwechselt werden. Auch Reitberger schätzt den *Anteil derartiger Flüchtigkeitsfehler* mit weniger als 10 Prozent als nur recht *gering* ein.

Schüler verwenden also bei der Lösung von Aufgaben fast immer eine bestimmte Lösungsstrategie bzw. Regelstruktur. Besonders interessant sind *die* Strategien, die von Schülern *systematisch* bei allen – oder zumindest bei vielen – Aufgaben eines Aufgabentyps verwandt werden, da hier eine Bekämpfung oder Vorbeugung besonders große Effekte verspricht. Entsprechende Fehler bezeichnet man als *systematische Fehler*. Genauer nennen wir – in Übereinstimmung mit den in der entsprechenden Literatur üblichen Konventionen – einen Fehler bei einem bestimmten Schüler und Aufgabentyp *systematisch*, wenn er von diesem Schüler bei *mindestens der Hälfte* der entsprechenden Aufgaben gemacht wird. (Bei *weniger als vier* Aufgaben bezeichnen wir einen Fehler als systematisch, wenn er bei *drei* gegebenen Aufgaben bei mindestens zwei, bei *zwei* gegebenen Aufgaben bei beiden Aufgaben vorkommt.)

Die Vorstellung allerdings, daß Schüler einen so definierten systematischen Fehler *stets* solange beibehalten, bis gezielt dagegen vorgegangen wird, läßt sich nach Untersuchungen von Van Lehn [25] im Bereich der schriftlichen Subtraktion natürlicher Zahlen so *nicht* aufrechterhalten. Van Lehn konnte nämlich beobachten, daß viele »systematische Fehler« ohne Interventionen innerhalb sehr kurzer Zeit wieder verschwinden, und daß ferner Schüler bei aufeinanderfolgenden Tests bei ein und demselben Aufgabentyp ohne zwischenzeitliche Interventionen *verschiedene* »systematische Fehler« machen. Van Lehn erklärt diese Phänomene durch seine *Reparaturtheorie* (repair theory). Hiernach beruhen die »systematischen Fehler« auf fehlerhaften Lösungsstrategien, die sich viele Schüler *erst zu Beginn* des jeweiligen Tests »zusammenbasteln« (»Reparatur«) und dann konsistent *während des Tests* durchhalten. Sobald der Test vorbei ist und diese Lösungsstrategien ihren Zweck erfüllt haben, verschwinden sie wieder aus dem Gedächtnis der Schüler, da es keinen Grund mehr gibt, sie zu behalten. Durch diese Reparaturtheorie läßt sich offensichtlich das *Wechseln* von einem »systematischen Fehler« zu einem anderen bei zwei Tests ebenso erklären wie das (rasche) *Verschwinden* oder auch das erstmalige *Auftauchen* von »systematischen Fehlern« bei einem zweiten Test. Verwenden nämlich Schüler bei einem ersten Test konsistent *eine* fehlerhafte Problemlösungsstrategie bei den Aufgaben eines Aufgabentyps, so wird dies als systematischer Fehler gedeutet. Verwenden sie bei einem nachfolgenden zweiten Test in demselben Bereich konsistent eine *andere* Fehlerstrategie, so wird dies als ein *Wechsel* des systematischen Fehlers in diesem Bereich registriert. Verwenden sie dagegen bei dem zweiten Test in demselben Bereich zwei oder mehr Fehlerstrategien, so vermittelt dies den Eindruck, als ob der »systematische Fehler« in diesem Bereich wieder verschwunden ist. Nach Van Lehn ist es daher sinnvoll, bei einer Fehleranalyse zwischen *Flüchtigkeitsfehlern, systematischen Fehlern* und *»Reparaturen«* zu unterscheiden. Für die Beurteilung, wie weit die nach unserer Definition systematischen Fehler wirklich systematische Fehler und nicht nur konsistente Reparaturen sind, wären allerdings weitere Tests bei derselben Population nötig, wobei sich jedoch eine Fülle von nur schwer lösbaren Problemen ergeben würde (Abstand des zweiten Tests vom ersten? Identische

Testwiederholungen oder Parallelversion? Umfang der Beeinflussung durch den ersten Test und z. B. dadurch ausgelöste Lernprozesse? Zwischenzeitliche Lernprozesse? u. a.) Hinweise von Resnick u. a. [23] deuten ferner darauf hin, daß bei der Dezimalbruchrechnung durchaus eine höhere Konsistenz und auch Persistenz bei den Fehlerstrategien vorherrscht als z. B. bei der von Van Lehn untersuchten schriftlichen Subtraktion in ℕ und daß daher ein großer oder größerer Teil der nach unserer Definition systematischen Fehler wirklich auch systematisch über einen gewissen Zeitraum hin beibehalten wird.

In unserer Testauswertung gehen wir auf alle Fehler ein, die nicht nur von einzelnen, sondern von mehreren Schülern (i. a. ab etwa ein bis zwei Prozent der Population) gemacht werden. Hierbei nennen wir einen Fehler einen *typischen Fehler,* wenn er aufgrund unserer Untersuchung häufig gemacht wird, also unabhängig davon, ob systematisch oder nicht. Typische Fehler können also auf systematischen Fehlern basieren, aber auch auf gängigen Reparaturen. *Systematische Fehler* haben wir weiter vorne definiert. Abweichend von Reitberger bezeichnen wir bei der Auswertung häufiger auch Fehler als *Flüchtigkeitsfehler,* wenn sie nur vereinzelt bei *einigen* Aufgaben eines Typs auftreten, während die *anderen* Aufgaben dieses Typs beispielsweise richtig gelöst werden, unabhängig davon, ob wir den Fehlern eine Strategie zuordnen können oder nicht. Wir sehen also an diesen Stellen Flüchtigkeitsfehler und systematische Fehler als Gegensatzpaar an.

3. Unterrichtserfolg bei gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen – ein globaler Vergleich

Der folgende globale Vergleich des Unterrichtserfolges bei der Behandlung der gemeinen Brüche (Padberg [14]) und der Dezimalbrüche zeigt schon deutlich, daß es absolut *nicht* zutrifft, daß nur die Behandlung der gemeinen Brüche äußerst schwierig, dagegen die Behandlung der Dezimalbrüche problemlos und leicht ist. Da wir ferner die Daten für die *gemeinen Brüche* an *Realschulen,* für die *Dezimalbrüche* an *Gymnasien* erhoben haben, kann man sogar vermuten, daß die wirkliche Situation beim Vergleich von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen *eher noch ungünstiger für die Dezimalbrüche* aussieht.

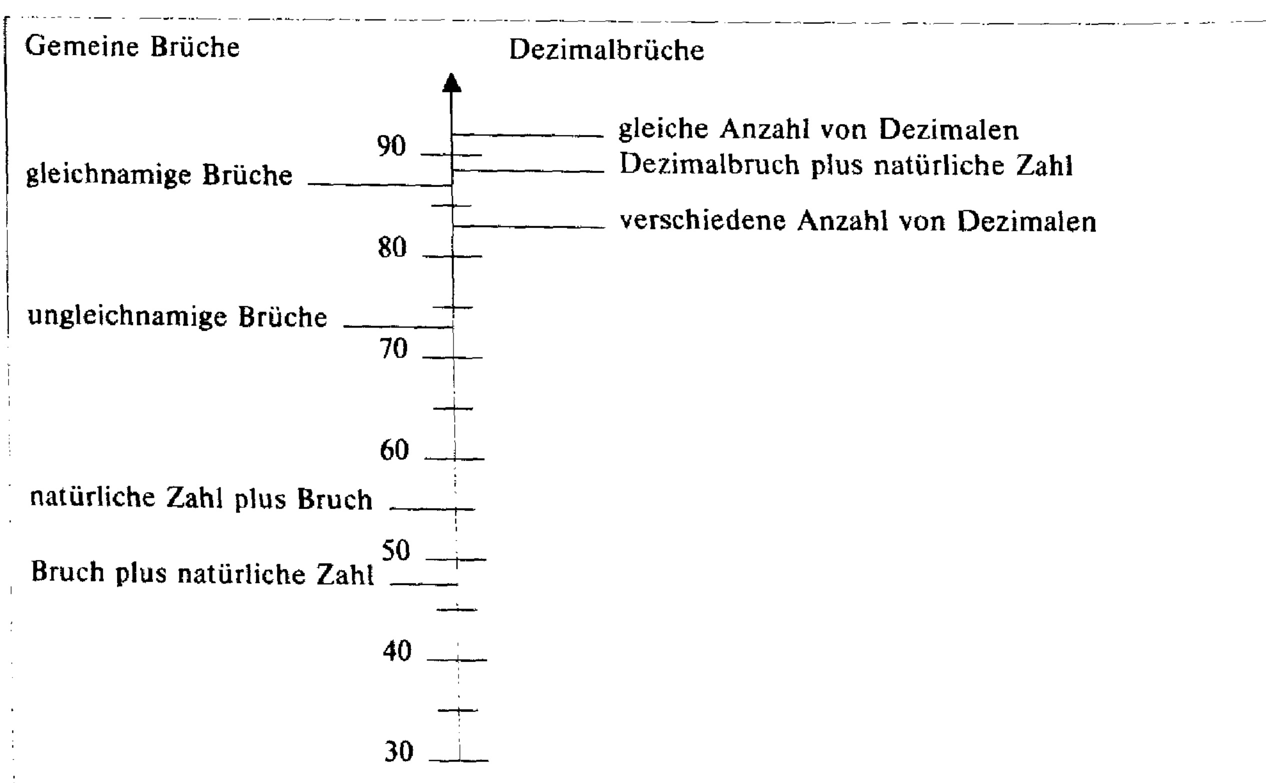

Abb. 1: Prozentsatz richtig gelöster Aufgaben je Typ (Durchschnitt) bei der *Addition*

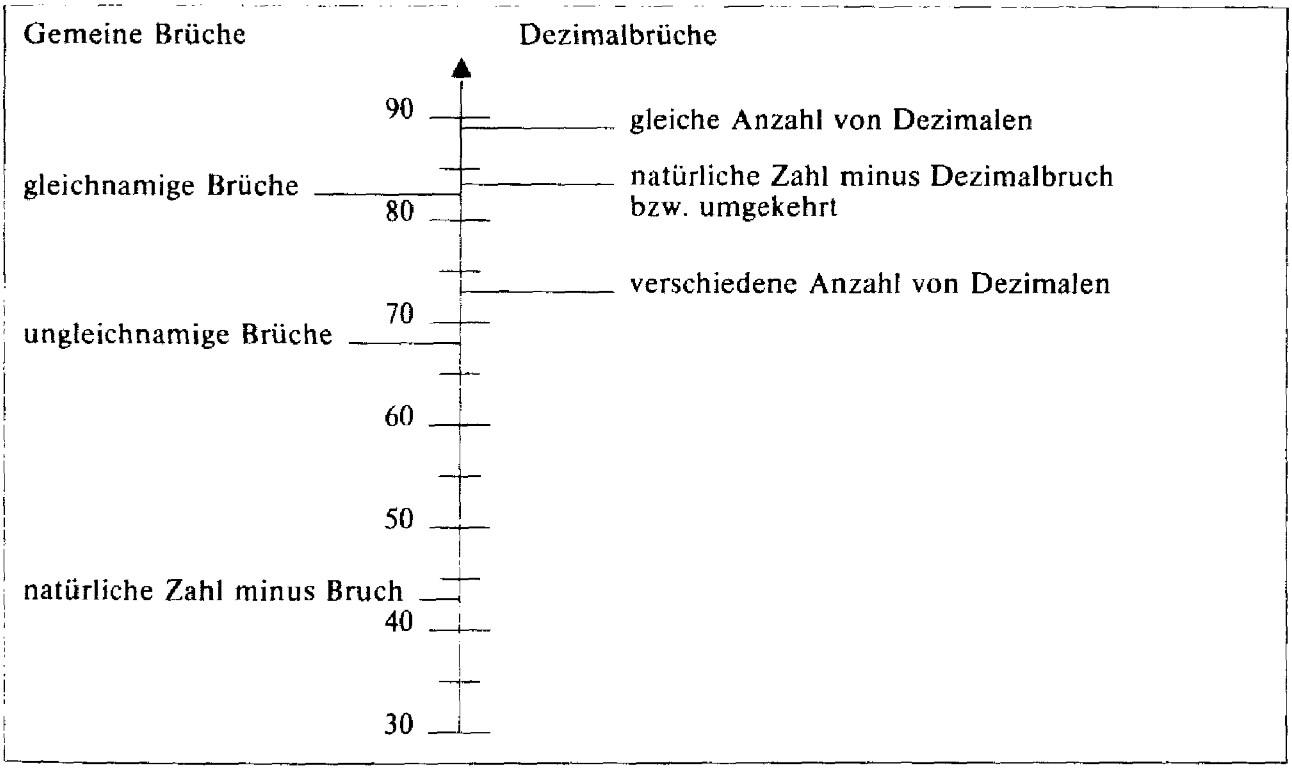

Abb. 2: Prozentsatz richtig gelöster Aufgaben je Typ (Durchschnitt) bei der *Subtraktion*

Erwartungsgemäß ist die Erfolgsquote bei der *Addition* von Dezimalbrüchen insgesamt höher als bei der Addition von gemeinen Brüchen. Vergleicht man allerdings die Addition von Dezimalbrüchen mit einer *unterschiedlichen* Anzahl von Dezimalen mit der Addition *gleichnamiger* Brüche – ein Vergleich, der unter verschiedenen Gesichtspunkten durchaus nicht abwegig ist (z. B. Rechenaufwand, ausschließliche Verarbeitung der Zähler) –, so liegt die Erfolgsquote für *gemeine Brüche* sogar in diesem Bereich *knapp höher* als die für Dezimalbrüche. Die Addition und Subtraktion von *Dezimalbrüchen und natürlichen Zahlen* bereitet dagegen wegen des engen Zusammenhanges in der Zahlschreibweise – im deutlichen Gegensatz zu den entsprechenden Rechnungen bei gemeinen Brüchen! – kaum Schwierigkeiten. Die *Subtraktion* von Bruchzahlen ist generell etwas fehleranfälliger als die Addition. Hierbei ist der Abfall in der Erfolgsquote bei der Subtraktion von *Dezimalbrüchen* insgesamt *deutlich höher* als bei der Subtraktion von gemeinen Brüchen. Dies bewirkt, daß *zwar* bei einer Parallelisierung von *gleichnamigen* Brüchen mit Dezimalbrüchen mit *gleicher* Anzahl von Dezimalen und von *ungleichnamigen* Brüchen mit Dezimalbrüchen mit *verschiedener* Anzahl von Dezimalen die Dezimalbrüche immer noch vorne liegen, allerdings schon deutlich knapper als bei der Addition, daß *dagegen* bei einem Vergleich von *gleichnamigen* Brüchen mit Dezimalbrüchen mit *verschiedener* Anzahl von Dezimalen jetzt schon die *gemeinen* Brüche einen *deutlichen Vorsprung* vor den Dezimalbrüchen besitzen.

Schon im Bereich der *natürlichen Zahlen* ist die *Multiplikation* und insbesondere die *Division* deutlich schwieriger und fehleranfälliger als die Addition und Subtraktion. Entsprechend drastisch ist auch bei den *Dezimalbrüchen* der Abfall in der Quote richtiger Lösungen bei diesen beiden Rechenoperationen. Dagegen ist bei der Multiplikation von *gemeinen Brüchen* die entsprechende Regel sehr einprägsam, ist bei der Multiplikation *und* Division von *gemeinen Brüchen* der Rechenaufwand im Normalfall deutlich geringer als bei der Addition und Subtraktion. Infolgedessen liegen die Erfolgsquoten bei der *Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen sehr weit unter* den entsprechenden Werten für die *gemeinen Brüche,* wobei die Quoten bei der *Division* von Dezimalbrüchen nochmals deutlich unter den schon niedrigen Werten für die Multiplikation liegen (s. hierzu die Abbildungen 3 und 4 auf S. 46).

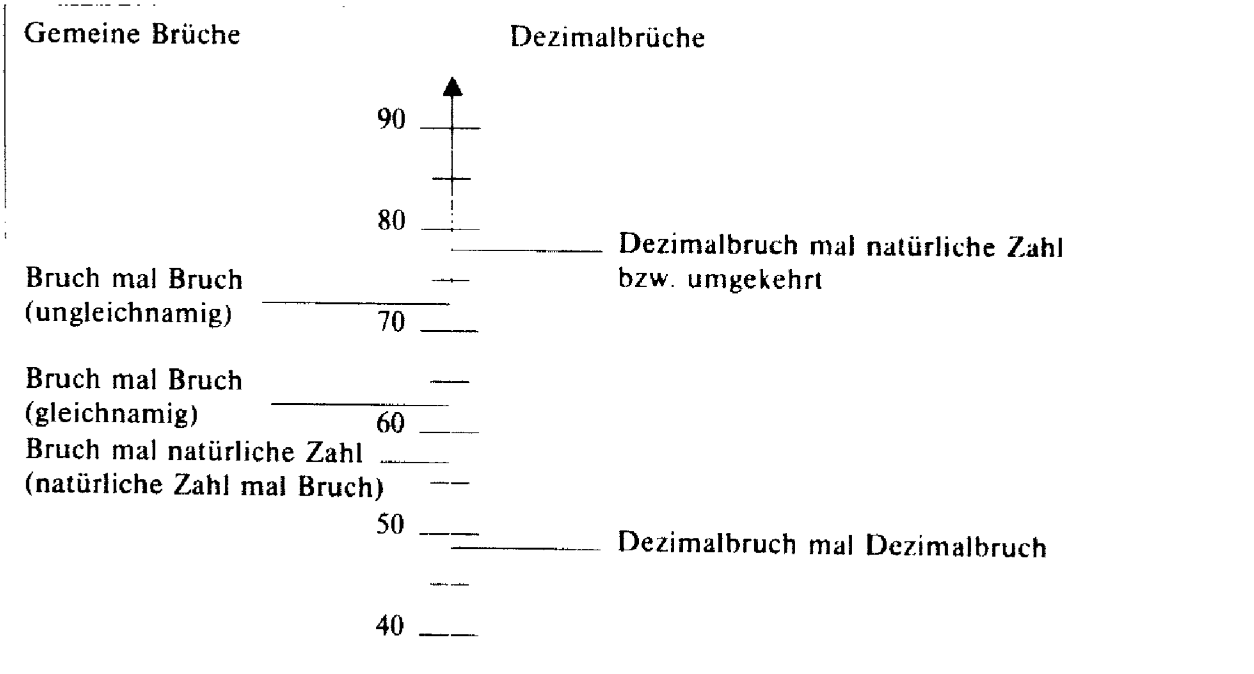

Abb. 3: Prozentsatz richtig gelöster Aufgaben je Typ (Durchschnitt) bei der *Multiplikation*

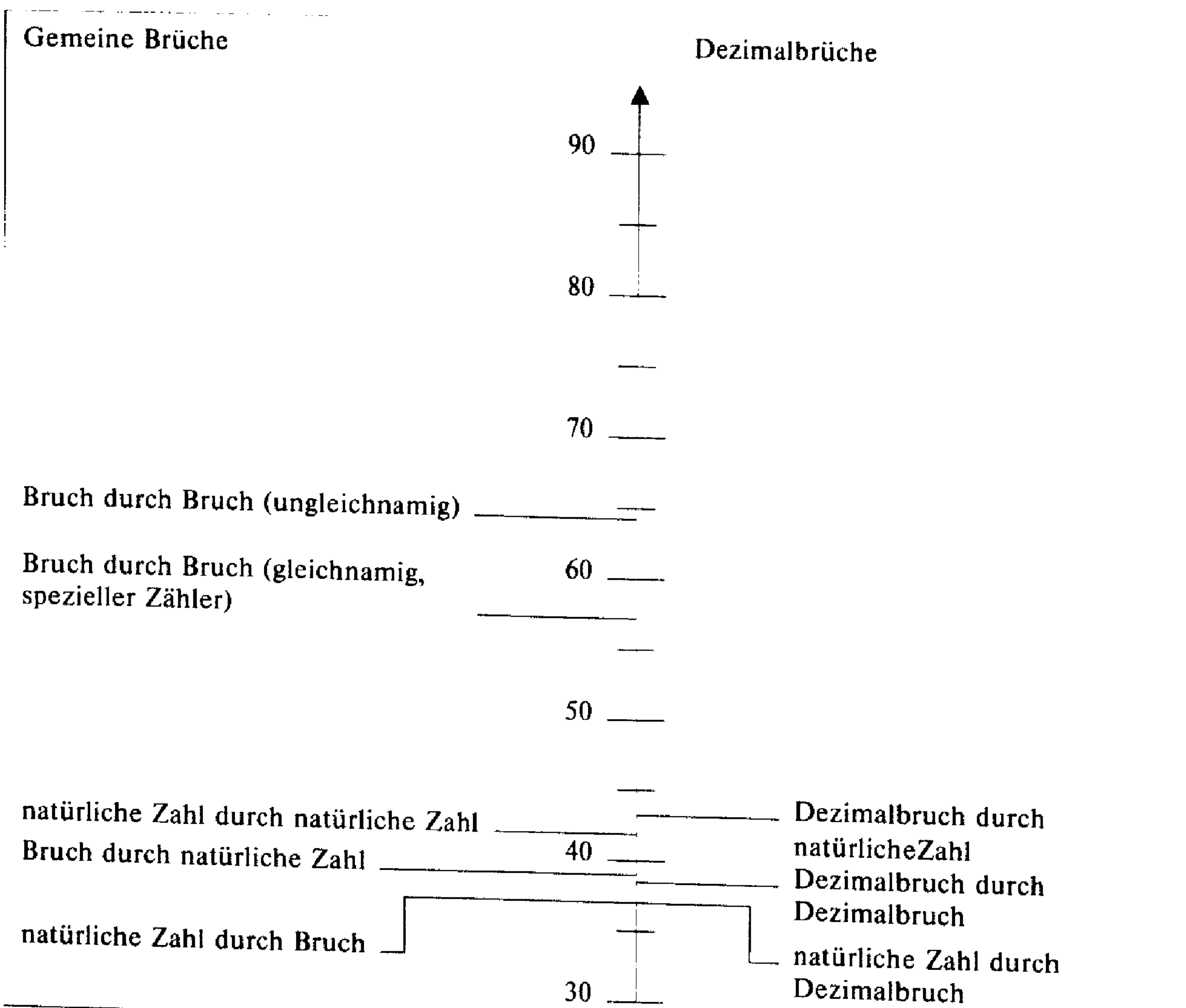

Abb. 4: Prozentsatz richtig gelöster Aufgaben je Typ (Durchschnitt) bei der *Division*

4. Verschiedene Aspekte des Dezimalbruchbegriffs

4.1 Sprech- und Schreibweise

Die im täglichen Leben weitverbreitete Sprechweise von z. B. 3,45 als drei Komma *fünfundvierzig* ist im Mathematikunterricht äußerst problematisch, da sie einer Fülle typischer Fehler Vorschub leistet, wie z. B. beim

- Größenvergleich: $0{,}4 < 0{,}19$, da $4 < 19$;
- Erweitern/Kürzen: $0{,}5 \neq 0{,}50$, da $5 \neq 50$;
- Addieren: $0{,}54 + 0{,}7 = 0{,}61$, da $54 + 7 = 61$;
- Subtrahieren: $0{,}54 - 0{,}2 = 0{,}52$, da $54 - 2 = 52$.

Bei dieser Sprechweise wird sogar – wie Breidenbach [1] zu Recht beanstandet – den Dezimalen je nach ihrer Anzahl ein anderer »Schein-Stellenwert« gegeben. So liest man die Ziffer 3 in 0,3 Null Komma *Drei*, in 0,32 Null Komma Zweiund*dreißig* oder in 0,321 Null Komma *Dreihundert*einundzwanzig, obwohl die Ziffer 3 immer an erster Stelle nach dem Komma steht und stets den Wert drei Zehntel hat. Daher sollte man im Unterricht die ziffernweise Sprechweise benutzen und z. B. 0,321 Null Komma Drei Zwei Eins lesen. Die andere mögliche, mehr inhaltliche Sprechweise – nämlich Null Komma Dreihunderteinundzwanzig Tausendstel – ist sehr umständlich und schwerfällig. Erfreulicherweise lesen die von uns untersuchten Gymnasialschüler die Dezimalbrüche weit überwiegend in Form der ziffernweise Sprechweise, nur 5 % benutzen die problematische Sprechweise.

Bei der Einführung der Dezimalbrüche wird i. a. stark die Analogie zur Schreibweise der natürlichen Zahlen herausgestellt. Das Betonen von *Unterschieden* kommt hierbei häufiger zu kurz, wie die folgenden Punkte belegen:

1. Bei den Aufgaben »Kreuze die Zehntel (analog die Hundertstel) in 7,654 an« kreuzt mehr als jeder zehnte (!) Schüler 5 als Zehntel sowie 6 als Hundertstel an. Rund 7 % der Schüler machen diesen Fehler sogar systematisch und übertragen den Aufbau des Stellenwertsystems von $\mathbb{N}$ unreflektiert und unverändert auch auf die Dezimalen rechts vom Komma. Für diese Schüler ist nicht das Komma der Bezugspunkt, sondern – genau so wie in $\mathbb{N}$ – die letzte Stelle des Zahlwortes. Und so wie in $\mathbb{N}$ die Zehner an vorletzter und die Hunderter an drittletzter Stelle stehen, so stehen für sie die Zehntel an vorletzter, die Hundertstel an drittletzter Stelle. Diesen Schülern ist also der geänderte Bezugspunkt (Komma, nicht Endziffer) und die geänderte Blickrichtung (statt von rechts nach links von links nach rechts) offenkundig nicht klar geworden. Auch die Lösung 0,532 bei der Aufgabe »Schreibe als Dezimalbruch: 2 Einer, 3 Zehntel, 5 Hundertstel« verdeutlicht sehr gut diesen Fehler.

2. Die vorgestellten Beispiele belegen aber auch noch einen weiteren fehlerhaften Transfer von $\mathbb{N}$. So wie in $\mathbb{N}$ die Zehner an zweiter, die Hunderter an dritter Stelle stehen, so stehen für eine nicht unbedeutende Zahl von Schülern auch bei den Dezimalbrüchen die Zehntel erst an zweiter, die Hundertstel an dritter Stelle, wobei z. T. der ersten Stelle – in Analogie zu den Einern – die Bezeichnung »Eintel« zugeordnet wird. Dieser Fehler wird bei fehlerhafter (s. 1.) wie auch bei richtiger »Blickrichtung« häufiger gemacht, wie die folgenden Beispiele belegen: So schreiben jeweils rund 5 % der Schüler 2 Zehntel als 0,02, 5 Hundertstel als 0,005, 8 Tausendstel als 0,0008, notieren 2 Einer 3 Zehntel 5 Hundertstel als 0,235 oder erklären, daß 8,07 bedeutet 8 Einer 0 Eintel 7 Zehntel.

Besonders schwer tun sich die Schüler, wenn in einer Aufgabe *umgebündelt* werden muß. So notieren viele Schüler (jeweils rund 8 %) 25 Hundertstel als 0,025, 97 Tausendstel als 0,0097 oder 345 Tausendstel als 0,00345, setzen also die betreffenden Hundertstel oder Tausendstel als »Block« auf die zweite bzw. dritte Stelle nach dem Komma. Auch hier liegt vermutlich ein fehlerhafter Transfer von den natürlichen Zahlen vor: Die richtige Notation von 25 Hundertern auf der Hunderter- (und Tausenderstelle) oder von 97 Tausendern auf der Tausender- (und Zehntausenderstelle) führt bei analoger Übertragung auf Dezimalbrüche zu obigen Fehlern. Auch bei den Fehllösungen, 28 Zehntel als 0,28 oder

2 Einer 5 Zehntel 12 Hundertstel als 2,512 zu schreiben, erkennen wir dieselbe Fehlerstrategie, die hier selbst im Bereich des Gymnasiums jedem vierten (!) Schüler unterläuft (vgl. auch Hiebert/Wearne [9]). Nur ein Drittel (!) der Schüler lösen die zweite Aufgabe richtig, fast jeder fünfte Schüler ist verunsichert und löst diese Aufgabe gar nicht.

Die vorstehenden Punkte belegen sehr eindrucksvoll, daß eine zu starke – wenig reflektierte – Betonung der Analogien zu ℕ eine deutliche Fehlerquelle sein kann. Darum müssen im Unterricht *nicht nur* die Gemeinsamkeiten zwischen natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen betont, sondern *gerade auch* die Unterschiede deutlich herausgestellt werden, um fehlerhafte Übergeneralisierungen zu vermeiden. Die Benutzung von *Stellenwerttafeln* ist in diesem Zusammenhang sehr hilfreich.

Wir beenden diesen Abschnitt mit dem Hinweis auf zwei eher *seltenere* Fehler, die jedoch durchgängig bei allen geeigneten Aufgaben gemacht werden: Das Aufschreiben von 2 Zehntel als 2,0. 5 Hundertstel als 5,00 oder 8 Tausendstel als 8,000 sowie das Notieren von 5 Hundertstel als 0,500 oder 8 Tausendstel als 0,8000.

4.2 Anschauliche Vorstellungen

Für ein volles Verständnis der Dezimalbrüche ist es wichtig, daß die Schüler mit ihnen *anschauliche Vorstellungen* verbinden. Das am häufigsten eingesetzte geometrische Veranschaulichungsmittel ist der *Zahlenstrahl*. Sowohl beim Zuordnen von Dezimalbrüchen (mit einer, zwei bzw. drei Dezimalen) zu Punkten auf dem Zahlenstrahl wie auch umgekehrt sind die Erfolgsquoten sehr hoch und typische Problembereiche *nicht* festzustellen. Die von uns untersuchten Schüler sind damit deutlich erfolgreicher als die von Hart [8] in England bzw. von Hiebert/Wearne [9] in den USA untersuchten Schüler. Berichtenswert ist das bei der Zuordnung einer Zahl zu einem Punkt des Zahlenstrahls mehrfach genannte Ergebnis 8, $1\frac{1}{2}$ (für 8,15).

Zweidimensionale Veranschaulichungsmittel – in unserem Test Quadrate – bereiten den Schülern *mehr* Schwierigkeiten als der Zahlenstrahl. Dies ist zum Teil sicher auch eine Frage der Häufigkeit ihres Einsatzes im Unterricht. Zwischen der Zuordnung von Dezimalbrüchen (mit einer bzw. zwei Dezimalen) zu geeignet unterteilten Flächen und der umgekehrten Zuordnung sind *keine* Unterschiede im Schwierigkeitsgrad zu erkennen. Es fällt positiv auf, daß die Schüler bei der Veranschaulichung von Dezimalbrüchen mittels Quadraten *sehr variationsreich* vorgehen. Typische Fehlerstrategien, die von einer größeren Zahl von Schülern benutzt werden, sind *nicht* zu erkennen. Erwähnenswert ist allerdings, daß bei der Veranschaulichung von 0,4 am Quadrat Schüler häufiger 0,25 schraffieren. Die falsche Assoziation von 0,4 mit einem Viertel oder aber die Gleichsetzung $0{,}4 = \frac{1}{4}$ (vgl. 4.6) dürfte die Ursache hierfür sein.

Nicht nur durch die Anbindung an geometrische Veranschaulichungsmittel, sondern auch durch Bezug zu *vertrauten Größen* mit Dezimalbrüchen als Maßzahlen können anschauliche Vorstellungen von Dezimalbrüchen vermittelt werden. Die beiden entsprechenden Aufgaben unseres Tests über Gewichte und Volumina werden fast zu 100 % richtig gelöst.

4.3 Umwandlung von Größen

Dezimalbrüche spielen im täglichen Leben eine wichtige Rolle beim Umgang mit Größen. Durch die Umwandlung von einer größeren Maßeinheit in eine kleinere kann man allerdings häufig schon die Argumentation vom Bereich der Dezimalbrüche auf den vertrauten Bereich der natürlichen Zahlen verlagern. Die Beherrschung der Umwandlungen von größeren in kleinere Maßeinheiten und auch umgekehrt ist hierbei hilfreich.

Die Umwandlung von kleineren Maßeinheiten in größere wird bei Geldwerten (Pf → DM) und Längen (m → km) mit Lösungsquoten von über 90 % problemlos beherrscht. Die umgekehrte Richtung, getestet mit Gewichten (kg → g), bereitet den Schülern *etwas mehr* Schwierigkeiten. Der *Hauptfehler* ist hier – wie auch schon analog, allerdings im geringeren Umfang, beim ersten Teil –, daß die Schüler die Zahl nach dem Komma einfach als Maßzahl für die kleinere Einheit nehmen (Beispiele: 0,4 kg = 4 g, 0,45 kg = 45 g; beim ersten Teil: 8 Pf = 0,8 DM, 38 m = 0,38 km). In Sonderfällen führt diese Strategie zum Ziel (Beispiele: 0,375 kg = 375 g, 0,45 DM = 45 Pf). Diese Tatsache wie auch Spätfolgen eines Grundschulunterrichts, bei dem häufig bei »Kommazahlen« das Komma dazu dient, die größere von der kleineren Einheit zu trennen (Beispiel: 1,36 m bedeutet 1 m 36 cm), können dafür verantwortlich sein, daß hier zwischen 10 % und 15 % der Gymnasialschüler diesen Fehler begehen (vgl. auch Günther [7]).

4.4 Erweitern/Kürzen und Einbettung

Bei Dezimalbrüchen spielt das Erweitern, also das Anhängen von Endnullen, eine größere Rolle als das Kürzen. Das Erweitern kann hilfreich sein beim Größenvergleich, beim Umwandeln von Größen, beim Addieren, Subtrahieren und beim Dividieren, wenn der Divisor mehr Dezimalen hat als der Dividend.

Die Kenntnisse der Schüler beim Erweitern testen wir durch vier Aufgabentypen. Gleichzeitig wird so abgeklärt, wieweit die Schüler mit der Rolle der Null bei Dezimalbrüchen vertraut sind oder wieweit sie fehlerhaft Eigenschaften der Null von den natürlichen Zahlen auf die Dezimalbrüche transferieren.

Typ 1

Schreibe mit drei Stellen nach dem Komma:

4,56 = 4,56 □
0,4 = 0,4 □□

Die beiden Aufgaben bereiten den Schülern keine Probleme und werden zu rund 90 % richtig gelöst. Typische Fehler sind nicht zu beobachten. Dies Ergebnis kann bei einer anderen (unklareren?) Aufgabenstellung und bei einer anderen Zielgruppe (überwiegend Hauptschüler, daneben einige Realschüler) allerdings auch deutlich anders ausfallen (vgl. Günther [7]).

Typ 2

Kreuze die *richtige* Aussage an:

0,3 < 0,30 ○
0,3 = 0,30 ○
0,3 > 0,30 ○

Auch diese Aufgabe wird zu rund 90 % richtig gelöst. Entsprechend wie bei der Anordnung (vgl. 4.5) wird auch hier bei den Fehllösungen 0,3 > 0,30 (MK-Strategie) deutlich häufiger als 0,3 < 0,30 (KK-Strategie) angekreuzt.

Typ 3

Welche Zahlen sind gleich?
Kreuze *alle richtigen* Lösungen an:

0,2 = 0,02 ○
0,2 = 0,20 ○
0,2 = 0,002 ○
0,2 = 0,200 ○

Lösungsquoten von über 90 % belegen, daß auch dieser Aufgabentyp problemlos ist (vgl. jedoch Günther [7]). Den Schülern sind die Unterschiede zwischen den natürlichen Zahlen und den Dezimalbrüchen offenbar geläufig: Bei natürlichen Zahlen darf man *keine* Endnullen anhängen, wohl aber beliebig viele Nullen links davor schreiben. Dagegen darf man bei den Dezimalbrüchen beliebig viele Endnullen anhängen, aber *keine* Nullen (im Bereich der Dezimalen) links davor schreiben.

Typ 4

4 Zehntel ist dasselbe wie □ Hundertstel bzw. 30 Hundertstel ist dasselbe wie □ Zehntel.

Das inhaltliche Argumentieren fällt den Schülern schwerer als das rein syntaktische Agieren (Typ 1: 0,4 = 0,4 □□). Hauptfehler sind erwartungsgemäß bei der 1. Aufgabe 0,4 Hundertstel und entsprechend bei der 2. Aufgabe 300 Zehntel. Unsere Lösungsquoten für die erste Aufgabe liegen jedoch weit höher als die Quoten in einer vergleichbaren englischen Untersuchung (Hart [8]).

Das *Einbetten* der natürlichen Zahlen in die Menge der Dezimalbrüche hängt eng mit dem Erweitern zusammen. Die Kenntnis des Einbettens kann beim Addieren, Subtrahieren und beim Dividieren von natürlichen Zahlen durch Dezimalbrüche hilfreich sein. Im Gegensatz zu Daubert [4], der bei einer andersartigen Zielgruppe (überwiegend Hauptschüler, daneben einige Realschüler) konstatiert, daß viele Schüler nicht in der Lage sind von 14 zu 14,00 oder von 11,4 zu 11,40 überzugehen, bereitet den von uns untersuchten Gymnasialschülern das Einbetten – abgetestet in der Aufgabenform: Schreibe mit zwei Stellen nach dem Komma: 7 = 7, □□ – absolut *keine* Schwierigkeiten.

4.5 Anordnung

Durch Aufgaben zur Anordnung kann man ebenfalls ein gutes Bild über das Verständnis des Dezimalbruchbegriffs gewinnen. Daher untersuchen wir diesen Bereich mit seinen vielfältigen Aspekten durch eine größere Anzahl verschiedenartiger Testaufgaben. Die Wichtigkeit einer *sorgfältigen* Auswahl der hierbei benutzten Testitems demonstriert gut das folgende Beispiel (Ruddock u. a. [24]; n. b. bedeutet in der folgenden Tabelle nicht beantwortet):

Welches ist die größte Zahl?		Welches ist die kleinste Zahl?	
0,075	1 %	0,625	34 %
0,09	1 %	0,25	3 %
0,1	82 % (r)	0,375	2 %
0,089	14 %	0,125	38 % (r)
n. b.	1 %	0,5	22 %
		n. b.	1 %

(Antworthäufigkeit bei Ruddock u. a. [24])

Auf den ersten Blick ist es sehr überraschend, daß die Lösungsquoten bei diesen beiden ähnlichen Aufgaben soweit auseinanderklaffen, zumal die dortigen Nullen nach dem Komma eher die linke Aufgabe als die wahrscheinlich schwerere erscheinen lassen. Im folgenden werden wir jedoch sehen, daß bei der *linken* Aufgabe eine weit verbreitete Fehlerstrategie zum *richtigen* Ergebnis, bei der *rechten* Aufgabe dagegen zu einem *falschen* Ergebnis führt und so die Unterschiede in den Lösungsquoten bewirkt. Bei der Auswahl der Testitems ist es daher wichtig, die Distraktoren so auszuwählen, daß die richtige Lösung sowie unterschiedliche Fehlerstrategien jeweils zur Ankreuzung *verschiedener* Distraktoren führen.

Durch folgende *Aufgabentypen* versuchen wir, typische oder systematische Schülerfehler bei der Anordnung von Dezimalbrüchen aufzudecken:

- Umrande die *kleinste* Zahl!
- Umrande die *größte* Zahl!
- Ordne die folgenden Zahlen der Größe nach, die *kleinste* Zahl zuerst!
- Umrande die Zahl, die *am nächsten bei* dem (konkret gegebenen) Dezimalbruch a liegt!
- Nenne eine Zahl *zwischen* den (konkret gegebenen) Dezimalbrüchen a und b!
- Zähle weiter!

– Umrande die *längste* Strecke!
– Umrande die (quasikardinal gegebene) *kleinste* Zahl!

Wir beginnen zunächst mit den *ersten vier* genannten Aufgabentypen, da sie besonders gut Fehlerstrategien bei der Anordnung sichtbar machen:

1. Umrande die *kleinste* Zahl:

0,625	0,25	0,3753	0,125	0,5	n. b.
1 %	4 %	15 %	70 %	5 %	5 %

2. Umrande die *größte* Zahl:

0,3	0,13	0,42	0,135	0,287	n. b.
19 %		72 %		8 %	1 %

3. Ordne der Größe nach, die *kleinste* Zahl zuerst:

	0,1	0,231	0,07	
Ergebnis:	0,07	0,1	0,231	83 %
	0,231	0,07	0,1	9 %
	0,1	0,07	0,231	3 %
	n. b.			1 %

4. Umrande die Zahl, die am *nächsten* bei 0,18 liegt:

0,1	0,2	0,15	n. b.
	73 %	25 %	1 %

Antworthäufigkeiten bei einigen Aufgaben zur Anordnung

Eine erste Fehlerstrategie, die wir bei allen vier Aufgabentypen beobachten können, läßt sich als *Kein-Komma-Strategie* (im folgenden kurz: KK-Strategie) kennzeichnen. Die Schüler ordnen die Dezimalbrücken ohne Berücksichtigung des Kommas *wie natürliche Zahlen* an. Da 5 von den Zahlen 625, 25, 3753, 125 und 5 die *kleinste* Zahl ist, wird 0,5 in 1. als kleinste Zahl sowie mit analoger Begründung 0,287 in 2. als *größte* Zahl umrandet. Die Anordnung 0,1 < 0,07 < 0,231 in 3. resultiert aus einer konsequenten Anwendung der KK-Strategie, ebenso wie das Ankreuzen von 0,15 in 4. als nächster Zahl bei 0,18. Die KK-Strategie kann sich bei Schülern besonders leicht verfestigen, wenn man bei der Behandlung der Kleinerrelation kleinschrittig zunächst nur Dezimalbrüche mit einer, dann mit zwei Dezimalen usw. behandelt oder wenn bei der Aufgabenauswahl Dezimalbrüche mit jeweils *gleicher* Anzahl von Dezimalen sehr stark vertreten sind; denn in diesen Fällen führt die KK-Strategie (bei gleichem ganzzahligen Anteil) *stets* zu einem *richtigen* Ergebnis und wird so nicht als fehlerhaft enttarnt. Aber auch die problematische Sprechweise von Dezimalbrüchen (vgl. 4.1) fördert stark die KK-Strategie, ebenso wie die *Komma-Trennt* (KT)-Vorstellung, bei der ein Dezimalbruch nicht als *eine* Zahl gesehen wird, sondern als ein Gebilde, das aus *zwei* natürlichen Zahlen besteht, getrennt durch ein Komma. In diesem Fall ist es sehr naheliegend, die durch jahrelangen Gebrauch sehr vertraute Kleinerrelation nicht nur für Zahlen vor, sondern auch für Zahlen *nach* dem Komma zu verwenden. Aber auch der von Comiti/Neyret [3] beschriebene Fehler, nämlich daß viele Schüler bei 7,3; 7,28 und 7,401 den Dezimalbruch 7,3 bzw. bei 6,04; 6,4 und 6,44 den Dezimalbruch 6,4 als kleinste Zahl ankreuzen, läßt sich unmittelbar als KK-Fehler deuten. Diese Erklärung ist naheliegender als die dort gegebene Erklärung, daß jeweils die Zahl mit den *wenigsten* Dezimalen die *kleinste* ist. Vielmehr lassen unsere Daten wie auch Befunde von Ruddock u. a. [24] gerade *im Gegenteil* den Schluß zu, daß viele Schüler Dezimalbrüche mit gleichem ganzzahligen Anteil – diese Voraussetzung erwähnen wir im folgenden nicht mehr stets explizit – für *um so kleiner* halten, *je mehr* Dezimalen und entsprechend für *um so größer* halten, *je weniger* Dezimalen sie besitzen. Diese Je-*mehr*-um so-*kleiner*-Strategie werden wir im folgenden kurz MK-Strategie nennen. Das häufige Ankreuzen von 0,3753 in 1., von 0,3 in 2. oder die in sich konsequente Abfolge 0,231 < 0,07 < 0,1 in 3. sind gerade das Ergebnis dieser MK-

Strategie. Die MK-Strategie beruht auf der fehlerhaften Übergeneralisierung eines richtigen Grundgedankens; denn *eine* Dezimale bedeutet Zehntel, zwei Dezimalen Hundertstel, drei Dezimalen Tausendstel usw. Unbestritten ist, daß Tausendstel kleiner sind als Hundertstel, Hundertstel kleiner als Zehntel. Hieraus wird dann fehlerhaft geschlossen, daß Zahlen mit z. B. drei Dezimalen stets kleiner sind als Zahlen mit zwei Dezimalen, da Tausendstel kleiner sind als Hundertstel, daß also generell Zahlen mit mehr Dezimalen kleiner als Zahlen mit weniger Dezimalen bzw. umgekehrt Zahlen mit weniger Dezimalen größer sind als Zahlen mit mehr Dezimalen (bei gleichem ganzzahligen Anteil). Die MK-Strategie kommt bei den von uns untersuchten Gymnasialklassen deutlich häufiger vor als die – simplere – KK-Strategie. Unsere Untersuchungsergebnisse bei Realschulklassen (Padberg [15, 20]) sowie Befunde von Ruddock u. a. [24] deuten darauf hin, daß die Anteile der KK- und MK-Fehler unterschiedlich sind je nach *Leistungsfähigkeit* der untersuchten Schülergruppe: KK-Fehler werden wesentlich häufiger von *schwächeren* Schüler gemacht, die nur sehr selten den – anspruchsvolleren – MK-Fehler machen, während umgekehrt *leistungsstärkere* Schüler häufiger den MK- und seltener den KK-Fehler begehen.

MK- und KK-Fehler lassen sich vermeiden bzw. bekämpfen durch das *Anhängen von Endnullen,* bis alle zu vergleichenden Zahlen jeweils gleich viele Dezimalen haben (vgl. auch Grossmann [6]). In diesem Fall kann die MK-Strategie nicht mehr angewandt werden, während die KK-Strategie stets zum richtigen Ergebnis führt, da das Anhängen der Endnullen ein Gleichnamigmachen der betreffenden Brüche bewirkt. Wir halten allerdings diese Vorgehensweise für *problematisch,* da die Gefahr einer rein syntaktischen Argumentation hierbei sehr groß ist. Günstiger für eine echte Einsicht dürfte eine Argumentation sein, die entsprechend wie beim Größenvergleich in $\mathbb{N}$ vorgeht. Zunächst wird der höchste Stellenwert betrachtet und verglichen. Ergeben sich hier Unterschiede, so ist klar, welche Zahl die größere ist. Andernfalls gehen wir schrittweise so weiter vor, bis wir zu einer Stelle gelangen, wo Unterschiede auftreten.

Bei dem Einsatz von Aufgaben im Unterricht sollte man allerdings beachten, daß nicht durch eine *ungeschickte Aufgabenauswahl* implizit die KK- bzw. MK-Fehlerstrategie verstärkt wird. In Anlehnung an Leonard/Grisvard [11] können wir Dezimalbrüche (mit gleichem ganzzahligen Anteil) nämlich nach zwei Gesichtspunkten typisieren, die für die KK- bzw. MK-Strategie relevant sind:

1. Anzahl der Stellen nach dem Komma, also Anzahl der Dezimalen,
2. aus den Ziffern nach dem Komma gebildete natürliche Zahl.

So weist beispielsweise 0,567 drei Dezimalen auf und ist 567 die aus den Ziffern nach dem Komma gebildete natürliche Zahl. Beim Vergleich von *zwei* Dezimalbrüchen können folgende Fälle auftreten:

1. *Anzahl der Dezimalen*
   Die zweite Zahl hat mehr Dezimalen (+), sie hat weniger Dezimalen (–) bzw. beide Zahlen haben gleichviel Dezimalen (=).

2. *Gebildete Zahl*
   Die zweite Zahl ist größer (+), sie ist kleiner (–) bzw. beide gebildeten Zahlen sind gleich groß (=).

Die nebenstehende Tabelle weist übersichtlich alle neun Kombinationsmöglichkeiten auf:

		Anzahl der Dezimalen		
		+	=	–
Gebildete Zahl	+	1	2	3
	=	4	5	6
	–	7	8	9

So bedeutet beispielsweise der Fall 1: Die zweite Zahl besitzt jeweils mehr Dezimalen, und die aus ihren Dezimalen gebildete natürliche Zahl ist größer als die erste Zahl (Beispiel: 5,01 (1. Zahl); 5,312 (2. Zahl)).

Die Anwendung der *KK-Strategie* führt in obigen neun Fällen zu folgenden Ergebnissen: Die Regel ist – neben dem Trivialfall 5 – immer dann anwendbar, wenn die gebildeten Zahlen verschieden sind, also in den Fällen 1, 2, 3, 7, 8, 9. Die KK-Regel ergibt folgende Aussagen:

Gebildete Zahl \ Anzahl der Dezimalen	+	=	–
+	<	<	<
=	0	=	0
–	>	>	>

Hierbei kürzen wir in der Tabelle die verschiedenen Ergebnisse folgendermaßen ab: Die Anwendung der KK-Strategie führt stets zu dem Ergebnis, daß die erste Zahl kleiner ist durch <, daß die erste Zahl größer ist durch >, daß beide Zahlen gleich sind durch =. Fälle, in denen die KK-Strategie nicht anwendbar ist, kennzeichnen wir durch 0. In den Fällen 1 bis 3 ist nach der KK-Regel die erste Zahl offensichtlich stets kleiner als die zweite Zahl, in den Fällen 7 bis 9 umgekehrt stets größer. Während die KK-Strategie in den Fällen 1 und 9 teils zu richtigen, teils zu falschen Ergebnissen führt (Beispiel zu 1 : 0,23 < 0,578 (r), 0,23 < 0,0578 (f); ein Beispiel zu 9 erhalten wir durch Vertauschen der Reihenfolge und des Relationszeichens), führt sie in den übrigen Fällen 2, 3, 7 und 8 offensichtlich *stets* zu einem *richtigen* Ergebnis. (Hierbei entsprechen 2 und 8 sowie 3 und 7 einander genauso wie 1 und 9.)

Die *MK-Strategie* ist – neben dem Trivialfall 5 – immer dann anwendbar, wenn die Anzahl der Dezimalen unterschiedlich ist, also in den Fällen 1, 3, 4, 6, 7 und 9. Die MK-Regel liefert folgende Ergebnisse (wobei die Symbole analog zur KK-Strategie definiert sind):

Gebildete Zahl \ Anzahl der Dezimalen	+	=	–
+	>	0	<
=	>	=	<
–	>	0	<

In den Fällen 1, 4 und 7 ist nach der MK-Strategie die erste Zahl offensichtlich stets größer als die zweite Zahl, in den Fällen 3, 6 und 9 umgekehrt stets kleiner. Während die MK-Strategie in den Fällen 1 und 9 teils zu richtigen, teils zu falschen Ergebnissen führt (Beispiel zu 1 : 0,2 > 0,234 (f), 0,1 > 0,023 (r), Beispiel zu 9 durch Vertauschen der Reihenfolge und des Relationszeichens), führt sie offensichtlich in den Fällen 3 und 4 und damit auch in den Fällen 7 und 6 *stets* zu *einem richtigen* Ergebnis.

Die vorgestellte Analyse belegt, daß zur Vermeidung einer ungewollten, versehentlichen Verstärkung der KK- bzw. MK-Fehlerstrategien eine *sorgfältige Aufgabenauswahl* wichtig ist.

Die Untersuchung der *vier letzten Aufgabentypen* zur Anordnung liefert folgende Ergebnisse:

5. Nenne eine Zahl *zwischen* 8,3 und 8,4:
   r: 88 % f: 7 % n. b. 5 %

6. Zähle *weiter:*
20,97 20,98 20,99
r: 75 % n. b. 1 %
30,00 9 % 20,991 3 %
30 6 % 20,100 1 %

7. Umrande die *längste* Strecke:

0,3 km	0,13 km	0,42 km	0,135 km	0,287 km	n. b.
14 %		76 % (r)		9 %	1 %

8. Umrande die *kleinste* Zahl:

2z5h	6z2h5t	5z	3z7h5t3zt	1z2h5t	n. b.
3 %	5 %	8 %	6 %	69 % (r)	9 %

Antworthäufigkeiten bei einigen Aufgaben zur Anordnung (Auswahl)

Eine Zahl zwischen 8,3 und 8,4 anzugeben, bereitet den Schülern keine Schwierigkeiten. Am häufigsten wird die in der Mitte gelegene Zahl 8,35, daneben häufiger auch 8,31 genannt. Eine klare Fehlerhäufung ist *nicht* erkennbar. Bei der Aufgabe, eine Zahl zwischen 0,4 und 0,41 anzugeben, tun sich dagegen die Schüler *wesentlich schwerer.* Rund jeder dritte Schüler löst die Aufgabe falsch, am häufigsten wird fehlerhaft 0,40 genannt. Diese Lösung sowie auch die meisten anderen Fehllösungen wie 0,6; 0,8; 0,11; 0,12; 0,30; 0,35; 0,36; 0,37 usw. können als KK-Fehler gedeutet werden. Einige Schüler antworten explizit, daß es keinen weiteren Dezimalbruch dazwischen gibt, »weil 0,41 die nachfolgende Zahl von 0,4 ist. Man kann nach den Zahlen ja beliebig viele Nullen anhängen«.

Weiterzuzählen von 0,7; 0,8; 0,9 aus bereitet den Schülern kaum Schwierigkeiten. Häufigster Fehler ist 0,10 bzw. 0,1. Daß es sich hierbei allerdings *nicht* um einen KK-Fehler, sondern um Probleme mit dem Umbündeln handelt, belegt 6. Die Fehllösung 20,100 im Sinne der KK-Strategie kommt dort nur äußerst selten vor, die häufigeren Fehllösungen lassen sich als Probleme mit dem Umbündeln über das Komma hinaus deuten.

Durch 7 soll abgetestet werden, wieweit *Größenangaben* hinter Dezimalbrüchen (hier: km) Aufgaben zur Anordnung für Schüler leichter oder schwerer machen. Ein Vergleich mit 2., wo dieselben Dezimalbrüche vorkommen, ergibt eine *Verbesserung,* vor allem bedingt durch einen Abfall bei den MK-Fehlern. Die Ursache: Neben dem üblichen Weg wie bei 2. kann bei 7. durch Umwandlung in kleinere Größeneinheiten (z. B. m) ein zusätzlicher Lösungsweg beschritten werden. Wichtig hierfür ist natürlich, daß die Schüler mit den betreffenden Größeneinheiten gut vertraut sind. *Abweichend* von unseren Befunden berichten allerdings Léonard/Grisvard [11], daß bei ihrer Untersuchung beim Vergleich von Dezimalbrüchen *mit* Nullen nach dem Komma die Anzahl der Fehler nach dem Hinzufügen der Größeneinheiten kg und m sogar noch deutlich *höher* liegt als beim Vergleich der entsprechenden »reinen« Dezimalbrüche, während sich bei Dezimalbrüchen *ohne* Nullen nach dem Komma keine Unterschiede ergeben. Die unterschiedlichen Ergebnisse der beiden Untersuchungen könnten nach unserer Einschätzung auf *Unterschieden* in der Leistungsfähigkeit der jeweiligen Schüler beruhen. In unserer Untersuchung ergeben sich jedenfalls auch bei einer entsprechenden Aufgabe *mit* Nullen nach dem Komma durch den Übergang zu Größen (km) starke Verbesserungen.

Die Betonung des *quasikardinalen Aspekts* im Sinne von Griesel [5] ist bei der Behandlung der gemeinen Brüche an verschiedenen Stellen sehr hilfreich (vgl. Padberg [18]). Wieweit dieser Aspekt beim Größenvergleich von Dezimalbrüchen mit Gewinn eingesetzt werden kann, dazu soll 8. Hinweise liefern. Ein Vergleich mit 1. ergibt, daß die Lösungsquoten in beiden Fällen gleich hoch sind. Der deutliche Abfall bei den MK-Fehlern sowie der Anstieg der KK-Fehler bei 8. fällt allerdings ins Auge. Beides könnte durch die »Optik« der dortigen Schreibweise bedingt sein. Die Tatsache jedoch, daß die Schüler mit der Schreibweise in 8. *kaum vertraut* sind und daß die betreffende Aufgabe – im Gegensatz zu 1. – *sehr* *weit hinten* im Test steht, läßt vermuten, daß eine inhaltliche Sprech- und Schreibweise im Sinne des quasikardinalen Aspektes beim Größenvergleich zu einer *Fehlerreduzierung* beitragen kann.

Wir können abschließend festhalten: Der Größenvergleich bereitet den Schülern *mehr* Schwierigkeiten als die Addition und Subtraktion (vgl. 5, 6). Dies beruht z. T. auf fehlenden außerschulischen Erfahrungen; denn im täglichen Leben wird der Größenvergleich fast immer durch Übergang zu kleineren Maßeinheiten auf der Ebene der natürlichen Zahlen durchgeführt. Zwei Fehlerstrategien setzen Schüler häufig ein, nämlich – vor allem – die MK-Strategie sowie – bei dem Leistungsstand dieser Stichprobe seltener – die KK-Strategie. Hierbei werden diese Fehlerstrategien nicht nur gelegentlich aus Flüchtigkeit benutzt, sondern häufiger auch *systematisch*, und zwar die MK-Strategie von 6 %, die KK-Strategie von 3 % der Schüler. Wegen der *unterschiedlichen* Effekte dieser Fehlerstrategien bei gleicher bzw. verschiedener Anzahl von Dezimalen bewirkt dieses Merkmal eine *deutliche Stufung* im Schwierigkeitsgrad.

4.6 Umformungen

Für ein fundiertes Verständnis des Dezimalbruchbegriffs ist neben einer gründlichen Kenntnis des dezimalen Stellenwertsystems die Kenntnis des Zusammenhanges zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen wichtig. Die Höhe der Fehler in diesem Bereich ist darüber hinaus ein guter Indikator für die Fehlerhöhe bei den schriftlichen Rechenoperationen mit Dezimalbrüchen (vgl. Padberg [20]).

Bei den Umformungen von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche und umgekehrt fällt den Schülern überraschenderweise die Umformung von Zehnerbrüchen in Dezimalbrüche i. a. *leichter* als die umgekehrte Richtung. So formen beispielsweise 82 % der Schüler richtig $\frac{5}{1000}$ in 0,005, aber umgekehrt nur 68 % der Schüler den Dezimalbruch 0,009 richtig in $\frac{9}{1000}$ um. Bei der Umformung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche ist allerdings eine sehr deutliche Stufung im Schwierigkeitsgrad in Abhängigkeit vom *Nenner* erkennbar. Während die Umformung von Brüchen mit Zehnerpotenzen als Nennern jeweils von mindestens 80 Prozent der Schüler richtig gelöst wird, bereitet die Umformung beispielsweise von $\frac{3}{4}$ (67 % der Schüler richtig), $\frac{3}{8}$ (55 % richtig) oder gar $\frac{2}{3}$ (45 % richtig) selbst Gymnasialschülern erhebliche *Schwierigkeiten*.

Bei der Umformung von *Dezimalbrüchen in gemeine Brüche* massieren sich die Fehler auf einige typische Fehlerstrategien:

- So formen viele Schüler (15 % bzw. 13 %!) fehlerhaft 0,29 in $\frac{29}{10}$ oder 0,017 in $\frac{17}{100}$ um. Folgende Ursachen sind hierfür verantwortlich:
  - Fehlerhafter Transfer von $\mathbb{N}$ bzgl. des *Stellenwertes:* Abweichend von den Verhältnissen in $\mathbb{N}$ stehen bei den Dezimalbrüchen bekanntlich an zweiter Stelle nach dem Komma schon die Hundertstel (und nicht die Zehntel), an dritter Stelle schon die Tausendstel (und nicht die Hundertstel). Weitere Belege für diese Fehlerursache sind Fehllösungen wie $2{,}7 = 2\,\frac{7}{1}$, $2{,}7 = \frac{27}{1}$, $4{,}03 = 4\,\frac{3}{10}$ oder $4{,}03 = \frac{403}{10}$ (vgl. auch 4.1).
  - Fehlerhafter Transfer von $\mathbb{N}$ bzgl. der *Notation von Bündelungen höherer Ordnung:* Weil man in $\mathbb{N}$ 29 Zehner oder 17 Hunderter ausgehend von der Zehner- bzw. Hunderterstelle nach links hin notiert, notieren eine größere Zahl von Schülern – wegen der umgekehrten »Blickrichtung« bei den Dezimalen – 29 Zehntel bzw. 17 Hundertstel beginnend bei der Zehntel- bzw. Hundertstelstelle nach rechts – bzw. setzen sie als »Block« auf die Zehntel- bzw. Hundertstelstelle (Probleme mit dem Umbündeln!).
- Die – selteneren – Fehllösungen wie $0{,}7 = \frac{0}{7}$ (bzw. $\frac{1}{7}$), $0{,}017 = \frac{0}{17}$ (bzw. $\frac{0}{017}$ oder $\frac{1}{17}$), $2{,}7 = \frac{2}{7}$ oder $4{,}03 = \frac{4}{3}$ (bzw. $\frac{4}{03}$) resultieren aus der *Gleichsetzung von Komma und Bruchstrich* (vgl. auch Hiebert [10]), wobei im Fall des Zählers 0 häufiger ersatzweise die 1 genommen wird.

Bei der Umformung von *gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche* spielen im wesentlichen dieselben Fehlerstrategien eine Rolle:

- Fehlerhafter Transfer von ℕ bzgl. des *Stellenwertes*. Beispiele hierfür sind Fehllösungen wie $\frac{3}{10} = 0{,}03$; $\frac{3}{100} = 0{,}003$; $\frac{5}{1000} = 0{,}0005$; $\frac{287}{100} = 0{,}287$ oder $4\frac{3}{10} = 4{,}03$, die jeweils von rund 4 % der Schüler gemacht werden.
- Fehlerhafter Transfer von ℕ bzgl. der *Notation von Bündelungen höherer Ordnung* (bzw. fehlerhafte »Block«-Lösungen). Lösungen wie $\frac{48}{100} = 0{,}048$; $\frac{37}{1000} = 0{,}0037$ oder $5\frac{38}{100} = 5{,}038$, die jeweils von mindestens 7 % der Schüler gemacht werden, sind Beispiele für diese Fehlerstrategie.
- *Gleichsetzung von Bruchstrich und Komma.* Diese Strategie wird häufiger benutzt, wenn die Nenner *keine* Zehnerpotenzen sind (Beispiele: $\frac{2}{5} = 2{,}5$, $\frac{3}{8} = 3{,}8$ oder $\frac{2}{3} = 2{,}3$), also bei den für die Schüler schwierigeren Aufgaben (Fluchtreaktion?).
- Notation des Zählers bei Zehnerbrüchen *direkt hinter dem Komma.* Fehllösungen wie $\frac{3}{100} = 0{,}3$; $\frac{37}{1000} = 0{,}37$ oder $\frac{287}{100} = 0{,}287$ können so erklärt werden. Eine bei speziellen Zehnerbrüchen richtige Vorgehensweise (Beispiel: $\frac{3}{10} = 0{,}3$; $\frac{48}{100} = 0{,}48$ oder $\frac{526}{1000} = 0{,}526$) wird hier fehlerhaft übergeneralisiert. Dies passiert besonders häufig, wenn vorher mehrere Aufgaben von der gerade genannten Art gelöst werden (»Einschleifeffekte«) oder aber auch, wenn ein Umbündeln – insbesondere über das Komma hinweg – erforderlich ist (Beispiel: $\frac{287}{100} = 0{,}287$).

Einige weitere – allerdings *seltener* vorkommende – Fehlerstrategien verdeutlichen schließlich die folgenden Fehllösungen:

1. $\frac{3}{100} = 3{,}00$ oder $\frac{5}{1000} = 5{,}000$
2. $\frac{3}{100} = 0{,}300$ oder $\frac{5}{1000} = 0{,}5000$

5. Addition

Die Addition von Dezimalbrüchen fällt den Schülern von allen Rechenoperationen mit Abstand am *leichtesten.* Die Quoten richtiger Lösungen liegen hier zwischen rund 80 % und 100 %. Aufgaben mit *Überträgen über das Komma* sind auf den ersten Blick fehlerträchtiger als Aufgaben ohne Überträge. So wird z. B. die Aufgabe 4,2 + 3,6 von 100 % der Schüler, dagegen die Aufgabe 5,7 + 2,8 nur von 87 % der Schüler richtig gelöst. Die Unterschiede beruhen jedoch – neben einigen Übertragsfehlern – vor allem auf der KT-Strategie: Diese führt bei der ersten Aufgabe nämlich zu einer richtigen, dagegen bei der zweiten Aufgabe zu einer falschen Lösung. Der Unterschied in den Lösungsquoten bei den Aufgaben 3,48 + 4,2 (ohne Übertrag) und 2,75 + 3,8 (mit Übertrag) ist dagegen minimal, weil die Schüler in beiden Fällen in fast gleichem Umfang KT-Fehler machen (18 % bzw. 16 % der Schüler!), fast alle Fehler auf diesen Fehlertyp entfallen und daher die wenigen Übertragsfehler nicht ins Gewicht fallen. Daher ist zumindest bei Gymnasialschülern für die Beurteilung der Fehlerhäufigkeit bei einer Aufgabe die Frage, ob KT-Fehler zu einer falschen Lösung führen, wichtiger als die Frage, ob bei der Aufgabe Überträge über das Komma erfolgen.

Überhaupt dominiert bei der Addition von Dezimalbrüchen eine *einzige* Fehlerstrategie, nämlich die *Komma-Trennt (KT)-Strategie.* Sie wird von den Schülern nicht nur bei einzelnen Aufgaben aus Flüchtigkeit angewandt, sondern 13 % (!) der Schüler machen diesen Fehler bei der Addition von Dezimalbrüchen mit einer unterschiedlichen Anzahl von Dezimalen *systematisch.* Die KT-Strategie schleift sich bei Schülern besonders leicht ein, wenn bei einer schrittweisen Einführung der Addition zu Beginn häufig Aufgaben mit *gleicher* Anzahl von Dezimalen sowie *ohne* Übertrag über das Komma gerechnet werden.

Schüler begehen den KT-Fehler ferner häufiger bei Aufgaben wie 3,48 + 4,2 als bei Aufgaben wie 6,3 + 2,42. Im ersten Fall wird offensichtlich bedenkenloser 48 + 2 = 50 gerechnet, während im zweiten Fall eher »Alarmglocken« schrillen. KT-Fehler spielen auch im *Ausland* bei der Addition von Dezimalbrüchen eine wichtige Rolle. So erhält beispielsweise in einer in den USA durchgeführten Repräsentativerhebung (vgl. Carpenter u. a. [2]) jeder vierte Schüler bei der Aufgabe 0,70 + 0,40 + 0,30 als Ergebnis 0,130 bzw. 0,13.

Vergleichen wir den KT-Fehler mit dem Hauptfehlertyp bei der Addition *gemeiner Brüche*, nämlich $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, so fällt die völlige Entsprechung unmittelbar ins Auge. In beiden Fällen greifen die Schüler auf eine weithin bewährte Strategie zurück, nämlich Gleiches zusammenfassen bzw. zu addieren. Sind hiermit bei den Dezimalbrüchen jeweils Zehntel, Hundertstel usw. gemeint, so führt dies zu einem richtigen Ergebnis. Fassen die Schüler dagegen auch die Zahlen vor dem Komma bzw. die Zahlen nach dem Komma oder die Zahlen oberhalb des Bruchstrichs bzw. unterhalb des Bruchstrichs als Gleiches auf, so resultieren hieraus gerade obige Fehlerstrategien.

Weitere in der Literatur beschriebene Fehlerstrategien wie die rechtsbündige Anordnung ohne Rücksicht auf das Komma mit anschließender Addition der Summanden (Beispiel: 5,37 + 1,4 = 5,51) oder die verschiedenen von Daubert [4] beschriebenen Wege, wie Schüler bei der schriftlichen Addition durch verschiedene fehlerhafte Maßnahmen das Problem fehlender Rechtsbündigkeit lösen, spielen in unserer Untersuchung *keine* nennenswerte Rolle.

Die Vermutung, daß der *Übergang zu Größen* wegen möglicher *weiterer* Lösungsstrategien die Lösungsquote erhöht, ist naheliegend. Ein Vergleich der Lösungsquoten und der Hauptfehler bei den Aufgaben

$$\begin{array}{lcl} 3{,}48\ \text{m} + 4{,}2\ \text{m} & \text{———} & 3{,}48 + 4{,}2 \\ 0{,}7\ \text{m} + 0{,}05\ \text{m} & \text{———} & 0{,}7 + 0{,}05, \end{array}$$

ergibt jedoch jeweils *gleiche* Werte. Der Übergang zu Größen (hier Meter) verändert also nicht unbedingt die Lösungsquoten oder die Fehlerstruktur. Ebenso gilt auch *nicht* generell, daß *Nullen* bei den Dezimalen den Schwierigkeitsgrad von Additionsaufgaben *erhöhen*. So werden die Aufgaben 5,07 + 2,3 und 3,48 + 4,2 gleich häufig richtig gelöst. Hauptfehler ist bei beiden Aufgaben der KT-Fehler, wobei gerade die nullfreien Dezimalen bei der zweiten Aufgabe stärker zu diesem Fehler führen.

Auf die Frage: »Wie addierst Du zwei Dezimalbrüche?« können selbst bei großzügiger Wertung der Antworten nur 30 % der Schüler eine richtige Antwort geben, 20 % geben keine, rund 50 % eine falsche Antwort. Bemerkenswert ist, daß bei dieser Frage 6 % der Schüler die KT-Strategie sogar als Regel formulieren. Dies Ergebnis belegt, daß die Beherrschung von Kalkülen selbst für Gymnasialschüler wesentlich leichter ist als die – selbst unpräzise – Formulierung der benutzten Regeln.

Die Addition von *Dezimalbrüchen und natürlichen Zahlen* fällt den Schülern – im deutlichen Gegensatz zu diesem Aufgabentyp bei den gemeinen Brüchen (vgl. Padberg [14]) – leicht. *Ein* Hauptfehlermuster ist hier einheitlich zu beobachten, nämlich beispielsweise 0,3 + 6 = 0,9 oder 0,45 + 7 = 0,52 zu rechnen, also jeweils um 6 bzw. 7 »weiterzuzählen«. Dies wird von 4 % der Schüler *systematisch* gemacht. Dieses Fehlermuster kann man beispielsweise auch in den USA beobachten: So rechnen nach Wearne-Hiebert [26] dort »sehr viele« Schüler 6 + 0,32 = 0,38 oder 4 + 0,3 = 0,7. Eine – ebenfalls mögliche – Deutung der Fehler als Addition nach rechtsbündiger Anordnung der Summanden ist nach unseren Testunterlagen äußerst unwahrscheinlich. *Nullen* hinter dem Komma können bei diesem Aufgabentyp jedoch die Lösungsquote deutlich senken. So lösen die Schüler die Aufgabe 0,03 + 5 im gewohnten Umfang fehlerhaft durch 0,08 im Sinne des »Weiterzählens«. Hinzu kommt hier jedoch relativ häufig eine *weitere* Fehllösung, nämlich 0,53, bei der die 5 zur ersten Dezimalen hinzuaddiert wird.

6. Subtraktion

Subtraktionsaufgaben mit *gleicher Anzahl* von Dezimalen fallen den Schülern besonders leicht. Bei Aufgaben *ohne* Übertrag werden kaum Fehler gemacht, bei Aufgaben *mit* Übertrag bereitet insbesondere der Übertrag über das Komma einigen Schülern Schwierigkeiten. Das Problem wird häufiger durch Vernachlässigen dieses Übertrages gelöst, wie beispielsweise bei der Lösung 9,4 - 4,8 = 5,6. Aufgaben mit *verschiedener* Anzahl von Dezimalen im Minuend und Subtrahend bereiten den Schülern generell mehr Schwierigkeiten. Aufgrund unserer Untersuchung läßt sich allerdings nicht belegen, daß Aufgaben mit weniger Dezimalen im *Minuend* – wie man meinen könnte – generell schwieriger sind als Aufgaben mit *mehr* Dezimalen im Minuend als im Subtrahend.

Bei Aufgaben, bei denen ein *Komma-Trennt-Fehler* möglich ist, wird dieser häufiger gemacht. So rechnen 7 % der untersuchten Gymnasialschüler 0,87 - 0,3 = 0,84 oder 8 % 5,07 - 1,3 = 4,04 (bzw. 4,4). Der Fehler wird nach unseren Befunden von Realschülern deutlich *häufiger* gemacht (vgl. Padberg [20]). KT-Fehler findet man allerdings bei der Subtraktion generell wesentlich *seltener* als bei der Addition, weil die KT-Strategie hier – im Gegensatz zur Addition – überhaupt nur bei einigen Aufgaben einsetzbar ist und – noch viel seltener! – zu einem richtigen Ergebnis führt. Daher ist die Zahl der Erfolgserlebnisse bei Einsatz dieser Strategie nur sehr beschränkt und entsprechend gering die Verstärkung. Der KT-Fehler bei der Subtraktion entspricht auch völlig dem Hauptfehler bei der Subtraktion *gemeiner Brüche*, nämlich $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$ zu rechnen. Allerdings wird dieser Fehler dort sehr viel *häufiger* gemacht (vgl. Padberg [14]). Über KT-Fehler wird auch in amerikanischen Untersuchungen berichtet. So rechnen in der Untersuchung von Wearne-Hiebert [26] Schüler »sehr oft« 0,86 - 0,3 = 0,83, oder es rechnet bei Ruddock u. a. [24] fast jeder achte Schüler 5,07 - 1,3 = 4,04.

Die Subtraktion von Dezimalbrüchen entspricht weitestgehend der Subtraktion von *natürlichen Zahlen*. Von daher ist die Vermutung naheliegend, daß die *dortigen* Hauptfehler auch auf den Bereich der Dezimalbrüche »durchschlagen«. Nach unseren Untersuchungen (vgl. Padberg [15]) sind rund die Hälfte aller Fehler bei der Subtraktion *in* ℕ *Übertragsfehler*, und zwar wird in der weit überwiegenden Zahl der Fälle der Übertrag *überhaupt nicht* berücksichtigt (Beispiel:

$$\begin{array}{r} 34 \\ -\ 18 \\ \hline 26 \end{array}$$).

Dies geschieht in ℕ besonders häufig in Sonderfällen. So erfolgt *in* ℕ besonders häufig 1. kein Übertrag in eine leere Stelle, wenn im Minuenden eine Null steht, 2. kein Übertrag, wenn gleiche Ziffern (insbesondere Nullen) übereinanderstehen, 3. kein Übertrag zur 9, wenn im Minuend eine Null steht und schließlich 4. kein Übertrag zur Null (vgl. Padberg [15]). Auch bei den *Dezimalbrüchen* bildet die *Nichtberücksichtigung von Überträgen*, und zwar insbesondere über das Komma, eine wichtige Fehlerquelle, wie die folgenden Fehllösungen belegen: 5,05 - 1,3 = 4,77 (5 % der Schüler), 5,23 - 2,5 = 3,73 (3 %), 5,6 - 2,84 = 3,76 (3 %) oder 0,4 - 0,275 = 0,135 (3 %) bzw. 0,4 - 0,275 = 0,225 (2 %). Bei der Behandlung der Subtraktion von Dezimalbrüchen sollte daher hierauf gezielt eingegangen werden. Bei der Lösung 5,8 - 3,47 = 1,33 wird fälschlich ein Übertrag *zuviel* berücksichtigt, und zwar in der Einerspalte. Entsprechend wie auch schon in ℕ wird dieser Fehler allerdings wesentlich seltener gemacht als die Nichtberücksichtigung von Überträgen.

Vergleichen wir die folgenden Lösungen 5,6 - 2,84 = 2,84, 5,8 - 3,47 = 2,47, 0,5 - 0,004 = 0,504 und 0,4 - 0,275 = 0,275, die jeweils 3 % der Schüler notieren, so erkennen wir folgende Gemeinsamkeiten. In allen Aufgaben hat der Minuend weniger Dezimalen als der Subtrahend. Die »überstehende« Ziffer bzw. Ziffern im Subtrahend bereiten den Schülern Schwierigkeiten. Einheitlich wird hierbei dieses Problem durch Übernahme dieser Ziffern in das Ergebnis gelöst. Ursache hierfür ist vermutlich die Vorstellung: Null bzw. Nichts minus z. B. 4 ergibt 4. Im Sonderfall 0,5 - 0,004 = 0,504 wirkt dies wie eine Addition.

Weitere in der Literatur beschriebene Fehler wie beispielsweise die *rechtsbündige Anordnung* (Beispiel: 5,07 - 1,3 = 4,94), die auf einer Übergeneralisierung der Subtraktion in ℕ ohne Berücksichtigung des Kommas beruht, spielen in unserer Untersuchung *keine* Rolle. Die schon aus ℕ bekannten *Rechenfehler der Nähe*, also Einsundeinsfehler, bei denen das Ergebnis um + 1 oder - 1 von der richtigen Lösung abweicht, kommen beim Rechnen mit Dezimalbrüchen ebenso vereinzelt vor wie *Assoziationsfehler.* Dies trifft auch zu für die *spaltenweise Unterschiedsbildung,* für die die folgende Lösung ein Beispiel ist (5,6 - 2,84 = 3,24).

Eine Aufschlüsselung der Testaufgaben nach der *Anzahl der Überträge* wie auch danach, ob *Nullen* im Minuend oder Subtrahend vorkommen, läßt bei unserer Gruppe *keine* deutlichen Unterschiede im Schwierigkeitsgrad erkennen. KT-Fehler andererseits können i. a. nur vorkommen, wenn der Minuend mindestens soviele Dezimalen wie der Subtrahend hat, daher massieren sich hier die KT-Fehler.

Unsere Untersuchung, ob die *Benutzung von Größen* oder die Betonung des *quasikardinalen Aspektes* im Sinne von Griesel [5] Vorteile mit sich bringt, liefert folgende Ergebnisse: In der Fehlerhöhe wie im Fehlerprofil lassen sich jeweils zwischen 5,8 m - 3,47 m und 5,8 - 3,47 sowie zwischen 6 DM - 0,03 DM und 6 - 0,03 nur geringfügige Unterschiede feststellen. Die Benutzung von *Größen* bietet an dieser Stelle in dieser Form bei unserer Zielgruppe *keine* (wesentliche) Hilfe. Die Betonung des *quasikardinalen Aspektes* bringt bei den gemeinen Brüchen u. a. auch bei der Subtraktion Gewinn. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß auch bei den Dezimalbrüchen die Benutzung der Schreibweise 3z für 0,3 oder 4h für 0,04 zumindestens in der Anfangsphase auch bei der Subtraktion hilfreich sein könnte. Ein Vergleich der Fehlerhöhe und des Fehlerprofils bei 0,87 - 0,3 und 8z7h – 3z sowie 0,4 – 0,275 und 4z - 2z7h5t zeigt jedoch, daß bei der jeweils *zweiten* Schreibweise die Fehlerhöhe deutlich *höher* liegt und daher die Benutzung des quasikardinalen Aspektes bei diesem Aufgabentyp und in dieser Form *keine* Erleichterung bringt. Zum Teil mag dies natürlich auch damit zusammenhängen, daß die zweite Schreibweise für die Schüler mit Sicherheit *ungewohnt* ist.

Aufgaben vom Typ *Natürliche Zahl minus Bruch* (Beispiel: $5 - \frac{1}{3}$) verzeichnen von sämtlichen Additions- und Subtraktionsaufgaben mit *gemeinen Brüchen* trotz des sehr leichten Grundverständnisses die *schwächsten* Ergebnisse. Dies trifft für die Aufgaben vom Typ *Natürliche Zahl minus Dezimalbruch* (und umgekehrt) *nicht* zu. Die Fehlerhöhe ist hier recht gering, die Fehler beruhen weit überwiegend auf fehlenden Überträgen, sei es zu den bei den natürlichen Zahlen zu ergänzenden Nullen, sei es im Bereich des Kommas (Beispiel: 8 - 0,54 = 7,56 oder 8 - 0,54 = 8,46). Während bei unserer Untersuchung mit Realschülern jeder 10. Schüler 7,20 - 4 = 7,16 rechnet, also entsprechend zur Vorgehensweise bei der Addition bei der Subtraktion um 4 zurückzählt (vgl. Padberg [20]), macht bei der Untersuchung an Gymnasialschülern kein Schüler diesen Fehler.

Bei der Frage nach der *Subtraktionsregel* schließlich sind die Ergebnisse ähnlich wie bei der Addition. Nur knapp 40 % der Schüler nennen die Regel im großen und ganzen richtig.

7. Multiplikation

Die Aufgaben zur Multiplikation von *Dezimalbrüchen* fallen den Schülern entschieden *schwerer* als die Aufgaben zur Addition oder Subtraktion. Die Fehlerquote liegt hier bei den meisten Aufgaben drastisch höher. Die Multiplikation von Dezimalbrüchen bereitet aber auch deutlich mehr Probleme als die Multiplikation von (gängigen) *gemeinen Brüchen,* bedingt durch die *mnemo*technisch sehr viel leichtere Multiplikationsregel und den meist deutlich geringeren Schwierigkeitsgrad der in ℕ erforderlichen Multiplikationen bei Brüchen. Hinzu kommt, daß bei der Multiplikation von *Brüchen* die Strategie, Gleiches mit

Gleichem zu verknüpfen, die sich in vielen anderen Bereichen bei gemeinen Brüchen wie auch Dezimalbrüchen als große Fehlerquelle entpuppt, hier zu *richtigen* Ergebnissen führt.

Die Multiplikation von Dezimalbrüchen entspricht weitestgehend dem entsprechenden Kalkül in $\mathbb{N}$. Daher ist zu erwarten, daß *generell* auch die wichtigsten Fehler der Multiplikation in $\mathbb{N}$ unverändert hier wiederzufinden sind. Nach unseren Untersuchungen (vgl. Padberg [16]) werden die folgenden Fehler am häufigsten in $\mathbb{N}$ *systematisch* gemacht:

- Die stellenwertbelegende Rolle der Null im zweiten Faktor wird nicht beachtet.
- Die Teilprodukte werden fehlerhaft untereinander angeordnet (kein »Herausrücken«).
- Bei Teilprodukten mit der Null im zweiten Faktor (seltener mit der Null im ersten Faktor) wird fehlerhaft gerechnet $0 \cdot a = a$ (Einmaleinfehler mit der Null).

Neben diesen systematischen Fehlern werden auch noch folgende weitere *Flüchtigkeitsfehler in* $\mathbb{N}$ häufig gemacht:

- Einmaleinsfehler der Nähe (Beispiel: $8 \cdot 3 = 21$);
- Fehler mit der Behalteziffer (besonders häufig: 1. Die *Einer*stelle des vorangehenden Teilproduktes wird als Behalteziffer addiert, bedingt durch die Betonung dieser Ziffer beim begleitenden Sprechen (Perseverationsfehler). 2. Die Behalteziffer wird als zusätzliche Stelle im (Teil-)Produkt notiert.).

Diese Fehler spielen in unserer Untersuchung allerdings wegen des bewußt einfach gehaltenen rechnerischen Schwierigkeitsgrades – um so gezielt die für die *Dezimalbruchrechnung* typischen Fehler herauszufinden – und wegen der speziellen Untersuchungsgruppe (Gymnasialschüler) bei den *meisten* Aufgaben nur eine *geringe* Rolle.

Die Behandlung der Multiplikation von Dezimalbrüchen wird im Regelfall eingeleitet durch den besonderen einfachen Fall der Multiplikation von Dezimalbrüchen mit *Zehnerpotenzen*. Diese Aufgaben werden in unserer Untersuchung auch deutlich am häufigsten richtig gelöst. Während bei den von uns untersuchten Realschülern (Padberg [20]) ein fehlerhafter Transfer von $\mathbb{N}$, nämlich das Anhängen von Endnullen, der Hauptfehler ist (Beispiel: $10 \cdot 2{,}3 = 2{,}30$), spielt dieser Fehler bei den Gymnasialschülern in dieser Form *keine* Rolle. Allerdings ist denkbar, daß die Fehllösungen $3{,}4 \cdot 10 = 3{,}4$ und $0{,}48 \cdot 1000 = 0{,}48$ dieselbe Ursache haben, nur daß man hier vor dem Notieren die überflüssigen Endnullen wieder fortläßt (vgl. hierzu auch die weiter unten folgenden Aussagen über die Multiplikationsregel). Von den drei untersuchten Aufgaben ($3{,}4 \cdot 10$; $2{,}56 \cdot 100$; $0{,}48 \cdot 1000$) bereitet die dritte Aufgabe die meisten Schwierigkeiten, da hier nicht nur einfach das Komma verschoben, sondern zusätzlich eine Endnull angehängt werden muß. Entsprechend ist hier die häufigste Fehllösung 48. Fehler wie $3{,}4 \cdot 10 = 30{,}40$; $2{,}56 \cdot 100 = 200{,}56$ oder $0{,}48 \cdot 1000 = 0{,}48000$, die zwischen 1 % und 3 % der Schüler machen, lassen sich als KT-Fehler deuten. Unsere Frage nach der *Regel* für die Multiplikation eines Dezimalbruches mit 100 wird nur von rund 40 % der Schüler richtig beantwortet, eine *Begründung* dieser Regel nur von 4 % der Schüler gegeben. Hauptfehler bei der Regelnennung sind Richtungsfehler beim Verschieben des Kommas (nach links, nach vorne) sowie – deutlich seltener – Nullanhängungsfehler (»zwei Nullen anhängen«).

Die Multiplikation von Dezimalbrüchen mit *natürlichen Zahlen*, die *keine* Zehnerpotenzen sind, bereitet den Schülern *mehr* Schwierigkeiten als der Sonderfall der Multiplikation mit Zehnerpotenzen, der allein durch Kommaverschiebung und ggf. Nullanhängung gelöst wird. Fehler wie $6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$ und $4 \cdot 2{,}3 = 8{,}12$ kommen am *häufigsten* vor und beruhen auf der *KT-Vorstellung* wie aber auch auf Problemen beim *Umbündeln* über das Komma hinweg. Hierbei ist die Multiplikation *beider* Teile des Dezimalbruches naheliegend und grundsätzlich richtig, nur nicht die *getrennte* Multiplikation. Der KT-Fehler entspricht in seiner Struktur völlig dem Hauptfehler bei der Multiplikation von *gemeinen Brüchen* mit natürlichen Zahlen, nämlich $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$ zu rechnen. Während allerdings jeder vierte Realschüler (!) diesen Fehler bei bemeinen Brüchen *systematisch* macht und dieser Teilbereich der Multiplikation dort die mit Abstand schwächsten Ergebnisse zeitigt (vgl. Padberg [14]), wird der KT-Fehler hier bei den Dezimalbrüchen fast nie systematisch und nur jeweils von rund 4 % der Schüler als Flüchtigkeitsfehler gemacht. Aufgaben mit *Nullen nach dem Komma* wie 6 · 0,008 fallen den Schülern wesentlich *schwerer*. Zwei Fehllösungen kommen am häufigsten vor, nämlich 6,008 (5 %) und 0,0048 (4 %). Die erste Fehllösung läßt sich als Fluchtreaktion zur leichteren Addition deuten. Wegen der bekannten Einmaleinsfehler mit der Null in ℕ, die sich auch in unserem Test an verschiedenen Stellen beobachten lassen, läßt sich das Ergebnis aber auch durch die Rechnung 6 · 0 = 6 erklären. Der zweite Fehler (0,0048) beruht auf der KT-Strategie sowie auf Problemen mit der Umbündelung. (Auf welcher Stelle müssen die 48 Tausendstel notiert werden?)

Den allgemeinen Fall der *Multiplikation von Dezimalbrüchen mit Dezimalbrüchen* untersuchen wir zunächst am *Sonderfall* der *Multiplikation von Dezimalbrüchen mit 0,1; 0,01 bzw. 0,001*. Hier läßt sich die Kenntnis der Kommasetzungsregel besonders gut abtesten, da Rechenfehler in ℕ so gut wie ausgeschlossen sind. Es ist überraschend, daß rechnerisch so leichte Aufgaben wie 5,6 · 0,1; 3,8 · 0,01 oder 4,7 · 0,001 von jeweils rund 30 % bis 40 % der Gymnasialschüler (!) *fehlerhaft* gelöst werden. Es ist kennzeichnend für das vielfach stark formale Vorgehen, daß diese Aufgaben von rund jedem dritten Schüler nicht im Kopf, sondern *schriftlich* gelöst werden. Die Aufgaben 3,8 · 0,01 und 4,7 · 0,001, bei denen im Ergebnis bei den Dezimalen eine bzw. zwei Nullen ergänzt werden müssen, fallen den Schülern deutlich *schwerer* als die Aufgabe 5,6 · 0,1, bei der dies nicht erforderlich ist. Den jeweiligen *Hauptfehler*, nämlich 5,6 · 0,1 = 5,6 (22 % der Schüler); 3,8 · 0,01 = 0,38 (13 %) und 4,7 · 0,001 = 0,047 (9 %) zu rechnen, können wir durch einen fehlerhaften Transfer von der Addition/Subtraktion von Dezimalbrüchen erklären: Die Anzahl der Dezimalen im Ergebnis richtet sich nach der Zahl mit den *meisten* Dezimalen. Die Fehllösung 5,6 · 0,1 = 5,6 kommt besonders häufig vor, da sie gleichzeitig auch durch eine *weitere* Fehlerstrategie erklärt werden kann, die bei den übrigen Aufgaben am zweithäufigsten vorkommt (jeweils rund 10 % der Schüler) und dort zu anderen Ergebnissen führt, nämlich Zahlen bei Multiplikation mit 0,1; 0,01; oder 0,001 ebenso wie bei einer Multiplikation mit 1 *unverändert* zu lassen. Die Fehllösungen bei 8 % der Schüler können als *systematische* Anwendung dieser Strategie gedeutet werden. Schließlich lassen sich die Lösungen 3,8 · 0,01 = 3,81 und 4,7 · 0,001 = 4,701 als Ausweichen auf die leichtere Addition erklären.

Die Anzahl der Fehler bei der Multiplikation von *Dezimalbrüchen mit Dezimalbrüchen* liegt im allgemeinen Fall *noch höher* als die schon sehr hohe Fehlerquote im gerade behandelten Sonderfall. So ist es auf den ersten Blick nur schwer zu glauben, daß gut die Hälfte (!) der Gymnasialschüler (!) Aufgaben wie 0,2 · 0,3; 0,8 · 0,11 oder 0,4 · 0,05 *falsch* löst. Ursache hierfür ist eine sehr starke Massierung der Fehllösungen auf 0,6 bei 0,2 · 0,3 (38 % der Schüler), auf 0,88 bei 0,8 · 0,11 (42 %) und auf 0,2 bei 0,4 · 0,05 (31 %). Eine naheliegende Erklärung für all diese Fehler ist die *KT-Strategie*, insbesondere wenn die Aufgaben rein im Kopf gelöst werden. Daneben lassen sich aber auch alle drei Lösungen durch den gerade schon erwähnten fehlerhaften Transfer von der Addition/Subtraktion erklären (wenn bei der dritten Aufgabe 0,2 für 0,20 notiert wird). Eine Tendenz der Schüler zu diesem fehlerhaften Transfer können wir nämlich auch bei der Aufgabe »Setze das Komma im Ergebnis an die richtige Stelle: 0,456 · 3,7 = 16872« feststellen. Fast jeder fünfte Schüler setzt hier das Komma ganz im Sinne obigen Transfers an die drittletzte Stelle. Obige Fehllösungen lassen sich ferner erklären durch eine *Null-Komma* (NK)-Strategie, bei der man bei Dezimalbrüchen mit Null als ganzzahligem Anteil die Dezimalen als natürliche Zahlen auffaßt, diese multipliziert und das Ergebnis in der Form Null-Komma – obiges Produkt schreibt. Für eine Überlagerung verschiedener Fehlerstrategien bei obigen drei Aufgaben spricht auch, daß die Lösungen 6,8 bei 3,2 · 2,4 und 45,48 bei 15,2 · 3,24 wesentlich seltener vorkommen (nur 9 % bzw. 2 % der Schüler). Diese Aufgaben werden allerdings auch weithin *schriftlich* gerechnet. Durch den üblichen Kalkülrahmen wird hier der KT-Fehler weithin *quasi automatisch* vermieden. Neben den drei genannten Fehlerstrategien spielt bei unseren Untersuchungen nur noch die Fluchtreaktion zur Addition eine breitere Rolle, insbesondere, wenn *Nullen* bei den Dezimalen vorkommen (Beispiele: 0,4 · 0,05 = 0,45 oder 0,02 · 0,004 = 0,024).

Bei der letzten Aufgabe mit ihren vielen Nullen wird eine große Unsicherheit der Schüler an der starken Variationsbreite bei der Anzahl der Nullen nach dem Komma im Ergebnis sichtbar: Bei 0,02 · 0,004 erhalten 14 % der Schüler 0,008 (Transfer von der Addition/Subtraktion), 9 % 0,08 (Anzahl der Dezimalen wie beim ersten Faktor) und 7 % 0,0008 (Anzahl der Nullen wie bei beiden Faktoren zusammen) als Ergebnis.

Ein Vergleich der Fehlerhöhe und -profile bei den Aufgaben 0,2 · 0,3 und 2z · 3z, 0,4 · 0,05 und 4z · 5h sowie 6 · 0,4 und 6 · 4z ergibt schließlich bei allen drei Aufgabenpaaren *keine* positiven Effekte durch die Benutzung des *quasikardinalen Aspektes* bei der Multiplikation von Dezimalbrüchen. Im Gegenteil: Bei sämtlichen quasikardinal formulierten Aufgaben steigen die Fehler insgesamt drastisch an.

Bei der Multiplikation von Dezimalbrüchen mit Dezimalbrüchen unterlaufen 8 % der Schüler *systematisch* Fehler, die im Sinne der KT-Strategie gedeutet werden können. Auch Wearne/Hiebert [26] berichten bei ihren Untersuchungen in den USA über häufige KT-Fehler: So rechnen dort Schüler ebenfalls »sehr oft« 0,4 · 0,2 = 0,8 und 0,05 · 0,4 = 0,2. Die Multiplikationsregel für gemeine Brüche, bei der Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert wird, könnte übrigens die Tendenz von Schülern zur getrennten Multiplikation der Zahlen vor dem Komma und der Zahlen nach dem Komma – und damit zum KT-Fehler – verstärken.

Wie wir schon bei den anderen Rechenoperationen beobachten konnten, bereitet auch die Formulierung der *Multiplikationsregel* für Dezimalbrüche den Schülern sehr große Schwierigkeiten. Einige formulieren hier explizit die KT-Strategie als Multiplikationsregel.

Viele der in diesem Abschnitt vorgestellten typischen Fehlerstrategien führen offenkundig zu Ergebnissen, die stark vom richtigen Ergebnis abweichen. *Überschlagsrechnungen* können diese Rechnungen daher leicht als fehlerhaft entlarven. Deshalb sollte die Überschlagsrechnung gerade bei der Multiplikation von Dezimalbrüchen gezielt eingesetzt werden. *Runden* ist aber auch bei Anwendungsaufgaben, die Multiplikationen erfordern, notwendig, um dort unsinnige Scheingenauigkeiten zu vermeiden.

8. Division

Schon die Division im Bereich der *natürlichen Zahlen* gilt zu Recht als die bei weitem schwierigste Grundrechenoperation. Folgende Schrittfolge muß bei ihr immer wieder durchlaufen werden:
- Bestimmung eines (Teil-)Dividenden;
- überschlagsmäßiges Dividieren;
- schriftliches Multiplizieren;
- schriftliches Subtrahieren.

Das überschlagsmäßige Dividieren bereitet – insbesondere bei mehrziffrigen Divisoren – die mit Abstand größten Probleme. Fehlerhafte Überschläge bemerkt man bei *zu groß* geschätzter Quotientenziffer erst nach erfolgter Multiplikation, bei *zu klein* geschätzter Quotientenziffer sogar erst nach der anschließenden Subtraktion. Erschwerend kommt hinzu, daß die schriftliche Division durch mehrziffrige Divisoren – im Gegensatz zu allen anderen Grundrechenarten – *nicht* vollständig auf die Anwendung von Grundaufgaben in Form des Kleinen 1 durch 1 bzw. 1 mal 1 reduziert werden kann, da nur der Dividend, nicht aber der Divisor bei dem Divisionskalkül zerlegt wird. Für das Verständnis des Divisionskalküls ist auch eine gründliche Einsicht in das dezimale Stellenwertsystem unerläßlich.

Der genannte Komplexitätsgrad gilt unverändert auch für die Division von *Dezimalbrüchen*, als zusätzliche Erschwerung kommt hier noch das Problem der richtigen Kommasetzung hinzu. In Anbetracht dieser Tatsache überrascht es nicht, daß auch bei der Division von Dezimalbrüchen die schon beim Dividieren in $\mathbb{N}$ begangenen Fehler ebenfalls »durchschlagen«. Nach unseren Untersuchungen (Padberg [17]) treten beim Dividieren in ℕ mit *ein*ziffrigen Divisoren folgende Fehlermuster am häufigsten auf:

- Im Quotienten fehlt eine erforderliche Endnull.
- Es werden Fehler bei der Staffelanordnung gemacht.
- Es wird fehlerhaft subtrahiert.
- Im Quotienten fehlt eine erforderliche Zwischennull.

Beim Dividieren mit *zwei*stelligen Divisoren sind folgende Fehler am häufigsten:

- Subtraktionsfehler;
- Zwischennullfehler;
- Multiplikationsfehler;
- Endnullfehler;
- Fehlen des letzten Divisionsschrittes bei Divisionen mit Rest (der letzte Teildividend geht nicht in die Quotientenziffer ein, er wird nur als Rest festgehalten).

Hierbei treten *Zwischennullfehler* am häufigsten bei folgenden Situationen auf:

- Die vorhergehende Teildivision geht auf, und die »heruntergeholte« Ziffer ist kleiner als der Divisor.
- Die vorhergehende Teildivision liefert eine Null als Quotientenziffer und auch der neue Teildividend ist kleiner als der Divisor (zwei Nullen hintereinander).
- Die vorhergehende Teildivision läßt einen Rest, der kleiner als der Divisor ist, und die »herunterzuholende« Ziffer Null wird einfach ignoriert.

Endnullfehler beruhen im wesentlichen auf folgenden Ursachen:

- Der letzte Divisionsschritt wird bei einer Division mit Rest nicht durchgeführt, da der letzte Teildividend sofort und ausschließlich als Rest notiert wird (Hauptursache).
- Der Dividend besitzt als letzte Stelle eine Null, diese wird nicht heruntergeholt.

Neben den genannten Endnull- und Zwischennullfehlern werden noch die folgenden beiden Fehlermuster häufiger als Flüchtigkeitsfehler, aber auch als systematische Fehler begangen:

- Bei der Bildung von Teildividenden werden mehrere Ziffern fälschlich gleichzeitig heruntergeholt, und nicht Schritt für Schritt nacheinander.
- Es wird fälschlich mehrmals in derselben Stellenwertspalte dividiert.

In Anbetracht dieser vielen Fehlerquellen beim Dividieren *schon* von natürlichen Zahlen und *erst recht* von Dezimalbrüchen überrascht es nicht, daß die Erfolgsquoten der Schüler beim Dividieren von *gemeinen Brüchen* – allein schon wegen des i. a. wesentlich geringeren rechnerischen Aufwandes – deutlich *über* den entsprechenden Werten für Dezimalbrüche liegen.

Der Behandlung der Division von Dezimalbrüchen wird im Regelfall die Division von Dezimalbrüchen *durch Zehnerpotenzen* vorgeschaltet. Die Untersuchung des Sonderfalles der Division von *natürlichen Zahlen* durch Zehnerpotenzen (in unserem Test: 5 : 10; 5 : 100 und 5 : 1000) vermittelt hierbei gute Einblicke in die Beherrschung des dezimalen Stellenwertsystems. Die Erwartung, daß diese – bei Kenntnis des dezimalen Stellenwertsystems für Dezimalbrüche – völlig problemlosen Aufgaben hochprozentig richtig gelöst werden, trifft jedoch selbst bei Gymnasialschülern nicht zu. So lösen z. B. 30 % der Schüler die Aufgabe 5 : 100 fehlerhaft. Hier wie bei den übrigen Aufgaben beobachten wir *zwei Hauptfehler:* Jeder siebte Schüler (!) erhält als Ergebnis 20 (meist) bzw. 0,2; 0,02 oder 0,002 (seltener), dividiert also einfach die größere durch die kleinere Zahl und paßt das Ergebnis ggf. noch formal der Dezimalbruchschreibweise an. Dieser Fehlertyp wird von 10 % der Schüler sogar *systematisch* begangen. Daneben läßt sich der schon an anderer Stelle häufiger beobachtete fehlerhafte Transfer von ℕ feststellen, nämlich Hundertstel entsprechend den Hundertern an die dritte, Tausendstel an die vierte Stelle nach dem Komma zu schreiben (5 : 100 = 0,005; 5 : 1000 = 0,0005).

Die eigentliche Behandlung der Division von Dezimalbrüchen beginnt üblicherweise mit der Division von Dezimalbrüchen *durch natürliche Zahlen.* Vergleicht man hier beispielsweise die Aufgaben 8,24 : 4 und 18,27 : 9 mit den Aufgaben 7,5 : 2 und 9,5 : 4, so erwartet man bei einer *theoretischen* Analyse des Schwierigkeitsgrades, daß die letztgenannten beiden Aufgaben den Schülern *mehr* Schwierigkeiten bereiten, da bei ihren Lösungen Endnullen angehängt werden müssen. Unsere Untersuchung ergibt jedoch, daß bei den – theoretisch leichteren – ersten beiden Aufgaben *wesentlich mehr* Fehler gemacht werden. Ursache hierfür ist die *KT-Strategie*. So rechnet jeder vierte (!) Schüler 8,24 : 4 = 2,6 oder 18,27 : 9 = 2,3, dividiert also im Kopf getrennt die Zahlen vor dem Komma und die Zahlen nach dem Komma durch den Divisor. Hierbei wird dieser Fehler bei geeigneten Aufgaben von den Schülern häufig auch *systematisch* gemacht. Daneben erhalten einige Schüler diese Ergebnisse auch trotz *schriftlicher* Rechnung, aber dann nicht infolge der KT-Strategie, sondern infolge eines der typischen – weiter vorne erwähnten – Rechenfehler in ℕ (24 bzw. 27 werden fälschlich auf einmal, und nicht Schritt für Schritt »heruntergeholt«). Dieser Fehler läßt sich bei einer Reihe weiterer Aufgaben ebenfalls konstatieren. Daneben beobachtet man häufiger auch Rechenfehler der Nähe (Beispiel 84 : 12 = 6) und Assoziationsfehler (Beispiel 8 : 4 = 4 oder 84 : 4 = 24). Greifen wir gezielt Aufgaben heraus, bei denen die KT-Strategie *nicht* anwendbar ist (Beispiel: 7,2 : 6 und 7,5 : 2), so wirkt sich die Schwierigkeitskomponente »Anhängen von Endnullen erforderlich« deutlich aus: Während nur 10 % die Aufgabe 7,2 : 6 falsch lösen, lösen beachtliche 24 % die im Test unmittelbar folgende Aufgabe 7,5 : 2 fehlerhaft, wobei die Fehlermuster breit streuen (u. a. Zwischennullfehler, aber auch Rechnungen wie: 7,5 : 2 = 3,7 Rest 1). Ferner erhöht sich der Schwierigkeitsgrad i. a. mit der Zahl der anzuhängenden *Endnullen*. Unterteilen wir die Aufgaben des Typs Dezimalbruch durch natürliche Zahl weiterhin danach, ob ein *Übertrag* von den Einern zu den Zehnteln erforderlich ist, so beobachtet man *nur selten* Fehler, die hierdurch verursacht sein könnten wie z. B. bei der Rechnung 7,2 : 6 = 1,02.

Die Untersuchung der Division *durch Dezimalbrüche* beginnen wir mit dem Sonderfall, daß der Dividend eine *natürliche Zahl* ist. Wir unterscheiden zusätzlich zwischen den Dezimalbrüchen 0,1; 0,01 und 0,001 und *anderen* Dezimalbrüchen als Divisor. Bei den drei Aufgaben des ersten Typs (5 : 0,1; 5 : 0,01; 5 : 0,001) läßt sich die Beherrschung der Kommasetzungsregel besonders gut abtesten, da Rechenfehler in ℕ das Ergebnis nicht beeinflussen. Die Tatsache, daß mehr als jeder vierte Schüler trotz vorderer Position im Test beispielsweise die Aufgabe 5 : 0,1 *nicht* löst, läßt deutlich Unsicherheiten gegenüber diesem Aufgabentyp erkennen, ebenso wie die Tatsache, daß weiter 28 % der Schüler diese einfache Aufgabe *fehlerhaft* lösen. Als *Hauptfehler* kann man hier wie bei den übrigen Aufgaben zwei fehlerhafte Lösungsstrategien identifizieren: Bei den Lösungen 5 : 0,1 = 0,5 (8 % der Schüler), 5 : 0,01 = 0,05 (5 %) und 5 : 0,001 = 0,005 (6 %) richten sich die Schüler bei der Anzahl der Dezimalen im Ergebnis nach dem (einzigen) Dezimalbruch. Dieser Fehler wird von 4 % der Schüler systematisch gemacht. Die einheitliche Lösung 5 bei allen drei Aufgaben wird dagegen durch die Kein-Komma-(KK)-Strategie verursacht. Bei den sechs übrigen Aufgaben dieses Typs (2 : 0,5; 3 : 0,6; 3 : 0,4; 35 : 0,7; 9 : 0,05 und 8 : 0,004) liegt die Fehlerquote vergleichbar hoch wie im Sonderfall, ebenso auch die Quote fehlender Lösungen selbst bei den Aufgaben im vorderen Bereich unseres Tests. Eine deutliche *Unsicherheit* der Schüler – vermutlich bedingt durch die erforderliche Einbettung der natürlichen Zahlen in die Menge der Dezimalbrüche durch das Anhängen von Endnullen nach vorheriger Kommasetzung – ist unverkennbar. Hauptfehler ist auch hier – mit einem Fehleranteil von meist rund 10 % – die Ausrichtung der Anzahl der Dezimalen im *Ergebnis* nach der Anzahl der Dezimalen des (einzigen) Dezimalbruchs in der Aufgabe (Beispiele: 3 : 0,6 = 0,5; 35 : 0,7 = 0,5 oder 8 : 0,004 = 0,002). Bei Aufgaben, die direkt schon in ℕ lösbar sind (etwa 35 : 0,7 im Gegensatz zu 3 : 0,4), spielt ebenfalls die KK-Strategie eine – allerdings wesentlich geringere – Rolle. Vergleichbares gilt nach Befunden von Wearne/Hiebert auch für die USA: So lösen die Schüler dort die Aufgabe 42 : 0,6 »sehr oft« durch 0,7, »oft« durch 7.

Bei der Division von *Dezimalbrüchen durch Dezimalbrüche* lassen sich mindestens *drei Fälle* unterscheiden:

- Beide Dezimalbrüche besitzen *dieselbe Anzahl* von Dezimalen (Testaufgabe: 0,44 : 0,11; 5,6 : 0,7).
- Der *Dividend* besitzt mehr Dezimalen als der Divisor (0,028 : 0,4; 0,36 : 0,9).
- Der *Divisor* besitzt mehr Dezimalen als der Dividend (3,3 : 0,11; 0,5 : 0,25; 0,6 : 0,02).

Analysiert man den Divisionskalkül in allen drei Fällen, so müßten die Aufgaben des ersten Typs generell am leichtesten, die des letzten Typs am schwierigsten sein, da dort beim Dividieren beim Dividenden Endnullen angehängt werden müssen. Diese Abfolge im Schwierigkeitsgrad wird von unserer Untersuchung bestätigt. Sind von den Zahlen her *KT-Fehler* möglich (dies ist nur bei 0,44 : 0,11 und 0,6 : 0,02 der Fall), so dominiert auch hier dieser Fehlertyp. So rechnen beispielsweise 18 % aller Schüler 0,44 : 0,11 = 0,4. Die weiteren Fehlertypen entsprechen den Fehlern bei der Division von natürlichen Zahlen durch Dezimalbrüche: Die Division wird im Kopf durchgeführt, bei der Anzahl der Dezimalen im Ergebnis richtet man sich teils nach dem Dividend, teils nach dem Divisor, wobei allerdings bei fast allen Aufgaben eine deutliche Tendenz zugunsten des *Dividenden* festzustellen ist. Die meisten Fehler hier lassen sich aber auch als *Null-Komma(NK)-Strategie* beschreiben: Man dividiert die gegebenen Zahlen im Kopf und notiert dann dies Ergebnis in der Form Null-Komma – gefundenes Ergebnis. Ferner spielt die *KK-Strategie* eine Rolle. Bei Aufgaben wie 0,5 : 0,25, die auf den ersten Blick leichter in der Richtung 0,25 : 0,5 lösbar sind, drehen ferner eine Reihe von Schülern (5 %) die Aufgaben beim Lösen entsprechend um und erhalten dann Lösungen wie 0,5, aber auch 5 und 0,005. Neben den drei eingangs genannten Fallunterscheidungen kann auch die Frage, ob *Nullen* unter den Dezimalen vorkommen, deutlichen Einfluß auf die Anzahl richtiger Lösungen haben, wie beispielsweise ein Vergleich der beiden Aufgaben 0,028 : 0,4 und 0,36 : 0,9 belegt.

Ein Vergleich der Fehlerquoten bei den Aufgaben »3 : 0,6« (24 % falsch) und »Anja macht 0,6 m lange Schritte. Wieviel Schritte braucht sie um 3 m zurückzulegen?« (nur 8 % falsch trotz der Position dieser Aufgabe fast am Ende des Tests) zeigt, daß die Einbeziehung des Aspektes des *Messens* bei einfachen Aufgaben zur Division die Anzahl von Fehllösungen *stark reduzieren* kann. Dies beruht darauf, daß die Schüler die Textaufgbabe – neben der Lösung durch Division – auch auf anderen, leichteren Wegen lösen, so z. B. über die wiederholte Addition oder Subtraktion, also auf Wegen, die offenkundig bei der Lösung der Rechenaufgabe 3 : 0,6 nicht benutzt werden. Diese – leichteren – Lösungswege überkompensieren die zusätzliche – durchaus fehleranfällige – Übersetzungsarbeit bei der Lösung der Textaufgabe.

Wie schon bei den anderen Rechenoperationen gesehen bereitet auch die Formulierung der *Divisionsregel* – selbst im einfachen Sonderfall der Division eines Dezimalbruchs durch 100 – den Schülern große Schwierigkeiten: Nur jeder 5. Schüler formuliert diese einfache Regel richtig. Hauptfehler ist die Verschiebung des Kommas in die falsche Richtung. Sogar nur 3 % der Schüler können diese Regel richtig begründen.

9. Schlußbemerkungen

Dezimalbrüche spielen im täglichen Leben und im Mathematikunterricht eine *große Rolle.* Um so erschreckender ist es daher, daß *selbst Gymnasialschüler* beim Umgang mit ihnen *große* Probleme haben und daß diese Probleme in wesentlichen Bereichen noch *deutlich größer* sind als bei den – allgemein als schwer bekannten – gemeinen Brüchen.

Für ein fundiertes Verständnis des Dezimalbruchbegriffs ist neben der Kenntnis des Zusammenhangs zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen eine gründliche Kenntnis des *dezimalen Stellenwertsystems* notwendig. Bei der Einführung der Dezimalbrüche werden allerdings im Unterricht offensichtlich häufig die *Analogien* zu den natürlichen Zahlen *überbetont,* während die *Unterschiede nicht deutlich genug* herausgestellt werden:

- Hängen wir bei natürlichen Zahlen rechts Nullen an, so werden sie *größer*. Dezimalbrüche dagegen bleiben *gleich groß*.
- Dezimalbrüche besitzen *keinen* zum Komma *symmetrischen* Aufbau: Links vom Komma stehen Einer, dann Zehner usw., rechts vom Komma dagegen *keine* »Eintel«, sondern sofort Zehntel, dann Hundertstel usw.
- Fortbewegen vom Komma bedeutet für die natürlichen Zahlen eine *Vergrößerung*, für die Dezimalen eine *Verkleinerung* der Bündelungseinheiten.
- Bewegen wir uns bei natürlichen Zahlen und bei den Dezimalen von Dezimalbrüchen *einheitlich* von links nach rechts, so ist die *Abfolge der Bündeleinheiten* völlig unterschiedlich (Hunderter, Zehner, Einer – Zehntel, Hundertstel, Tausendstel).
- Kleine Veränderungen bei den Endungen haben große Wirkungen: So entsprechen 10 Zehner einem Hunderter, aber 10 Zehntel keineswegs einem Hundertstel genauso wie zwar 1 Zehntel 10 Hundertstel entspricht, aber keineswegs 1 Zehner 10 Hundertern.
- Auch beim *Umbündeln* gibt es deutliche Unterschiede. So werden beispielsweise 25 Hunderter auf die Hunderterstelle und die nächste – *weiter vom Komma entfernte* – Stelle notiert, dagegen ist eine *entsprechende* Notation bei 25 Hundertsteln selbstverständlich falsch, jedoch ein häufiger gemachter Fehler.

Die genannten *Unterschiede* sind offenkundig selbst vielen Gymnasialschülern nicht völlig klar und bilden eine deutliche *Fehlerquelle*, die auf *verschiedene Bereiche* ausstrahlt, so u. a. auf die *Schreibweise* der Dezimalbrüche (vgl. 4.1), auf die *Umformungen* zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen (vgl. 4.6) oder auf die *Ordnung* zwischen Dezimalbrüchen (insbesondere KK-, aber auch MK-Strategie; vgl. 4.5). Zur *Vermeidung von Übergeneralisierungen* sollten daher Unterschiede deutlich herausgestellt werden. Ein wichtiges Hilfsmittel hierbei ist der Einsatz von *Stellenwerttafeln*, gerade zu Beginn, aber auch immer wieder im weiteren Unterrichtsverlauf an geeigneten Stellen. Daneben sollte vor allem bei der Behandlung der Anordnung der *quasikardinale Aspekt* berücksichtigt und auch auf *Größen* mit gut vertrauten Größeneinheiten zurückgegriffen werden. Bei der *Sprechweise* der Dezimalbrüche ist unbedingt auf die ziffernweise Sprechweise zu achten (vgl. 4.1).

Bei den *vier Rechenoperationen* mit Dezimalbrüchen konzentrieren sich die typischen und systematischen Fehler bei Gymnasialschülern auf *relativ wenige Typen:* So finden wir die *KT-Strategie* vor bei *allen vier* Rechenoperationen. Während sie bei der Addition als *einzige* Fehlerstrategie dominiert, kann sie bei den übrigen Rechenoperationen – im Gegensatz zur Addition – längst nicht in allen Fällen benutzt werden. Ist ihr Einsatz jedoch möglich, so wird sie insbesondere bei im Kopf zu lösenden Multiplikations- und Divisionsaufgaben sehr stark, aber auch bei Subtraktionsaufgaben häufiger eingesetzt. Bei der Multiplikation und z. T. auch der Division kann man darüber hinaus häufiger einen fehlerhaften *Transfer von der Addition/Subtraktion* von Dezimalbrüchen feststellen: In der Anzahl der Dezimalen beim Ergebnis richtet man sich nach der Zahl mit den *meisten* Dezimalen, bei der Division *daneben* häufiger auch nach der Anzahl der Dezimalen des *Dividenden*. Die sowohl bei der Multiplikation wie bei der Division festzustellenden *NK-Strategie* basiert nach unserer Einschätzung im Regelfall weniger auf inhaltlichen Überlegungen, als vielmehr auf dem Bemühen, ein *formal richtig aussehendes Ergebnis* zu erhalten. Dagegen könnte die *KK-Strategie* bei der Division das Ergebnis einer zu kleinschrittigen Behandlung der Dezimalbruchrechnung sein (s. u.). Neben diesen für *Dezimalbrüche* typischen Fehlerstrategien lassen sich insbesondere bei der Multipliktion und Division wegen der weitestgehenden Entsprechung der Kalküle auch typische Fehler aus dem Bereich der *natürlichen Zahlen* beobachten (vgl. 7., 8.).

Aufgaben, bei denen *natürliche Zahlen und Dezimalbrüche kombiniert* auftreten, sind – im deutlichen Unterschied zu den entsprechenden Verhältnissen bei den gemeinen Brüchen – *weithin problemlos*. Dies hängt vermutlich mit dem engen inneren Zusammenhang der Schreibweisen zusammen, während bei den gemeinen Brüchen und natürlichen Zahlen zwei unterschiedliche Notationssysteme aufeinanderstoßen.

Unsere Untersuchung gibt Hinweise, daß die eingesetzten Fehlerstrategien je nach *Leistungsvermögen* der untersuchten Schüler bei ein und demselben Aufgabentyp deutlich *unterschiedlich* sein können: So setzen bei der Anordnung von Dezimalbrüchen *leistungsschwächere* Schüler eher die simplere KK- und deutlich seltener die anspruchsvollere MK-Fehlerstrategie ein, während dies bei *leistungsstärkeren* Schülern genau umgekehrt ist. Unsere Untersuchung belegt auch, daß eine *theoretische* Analyse des Schwierigkeitsgrades von Aufgaben zum Abschätzen der Fehlerhäufigkeit allein *keineswegs* ausreicht. So lösen die Schüler beispielsweise die – nach theoretischen Analysen – *schwereren* Aufgaben 3,2 · 2,4 und 9,5 : 4 deutlich *häufiger richtig* als die hiernach *leichteren* Aufgaben 0,2 · 0,3 und 8,24 : 4. Ursache hierfür ist, daß bei den letzteren beiden Aufgaben die KT-Strategie sehr häufig Fehler verursacht, während der übliche Kalkülrahmen bei 3,2 · 2,4 und die speziellen Zahlen bei 9,5 : 4 diese Fehlerstrategie bei den ersten beiden Aufgaben verhindern. Gleichzeitig erklärt dies auch, daß bei ein und denselben Aufgabentypen *mündlich* gerechnete Aufgaben u. U. *höhere* Fehlerquoten aufweisen als schriftlich gerechnete.

Die *Nennung* der *Rechenregeln* bereitet selbst den Gymnasialschülern bei allen vier Rechenoperationen *große Schwierigkeiten*, obwohl die *entsprechenden Kalküle* von einem Großteil der Schüler erfolgreich beherrscht werden. Die *Begründung*, warum die entsprechenden Regeln gelten, wird selbst in den einfachen Fällen des Multiplizierens mit und des Dividierens durch 100 nur von *verschwindend wenigen* Schülern *einigermaßen* beherrscht.

Ein Vergleich der Hauptfehlerstrategie bei der Addition und Subtraktion von *gemeinen Brüchen* und von *Dezimalbrüchen* läßt schließlich eine *gemeinsame Wurzel* erkennen: In allen vier Fällen gehen die Schüler nach dem sonst häufig erfolgreichen Motto vor: *Fasse Gleiches zusammen.* Auch die KT-Strategie bei der Multiplikation und auch bei der Division beruht auf diesem Grundsatz.

Die von uns beobachtete *Konzentration* der typischen und systematischen Fehler auf eine jeweils relativ geringe Anzahl je Rechenoperation erleichtert schließlich eine gezielte *Bekämpfung bzw. Vorbeugung* vieler Fehler. Folgende Gesichtspunkte sollten hierbei beachtet werden:

- Typische Fehler können als *wichtiger Bestandteil beim Lernprozeß* eingesetzt werden. Anhand der Analyse typischer Fehllösungen können die Schüler diese Fehler erkennen und überwinden.
- *Vor* der Behandlung der Kalküle muß der *Dezimalbruchbegriff* durch *variationsreiche Aufgaben* gut fundiert werden. Erst auf dieser Grundlage können dann die Kalküle eingeführt werden. *Sorgfältige Regelabteilungen* sind hierbei in vielerlei Hinsicht wichtig.
- Die Behandlung der Dezimalbruchrechnung darf *keineswegs zu kleinschrittig gestuft* erfolgen, etwa indem man zunächst nur Dezimalbrüche mit *einer*, dann mit *zwei* Dezimalen usw. behandelt. Eine jeweils *gleiche* Anzahl von Dezimalen bringt nämlich die große Gefahr mit sich, daß auf diese Art *Fehlerstrategien* eingeschliffen werden, und zwar etwa bei der Anordnung die KK-Strategie, beim Addieren und in gewissem Umfang auch beim Subtrahieren die KT-Strategie oder beim Dividieren – sofern die Division in $\mathbb{N}$ »aufgeht« – ebenfalls die KK-Strategie.
- Zur Bekämpfung der weit verbreiteten *KT-Strategie* muß die Einsicht vermittelt werden, daß ein Dezimalbruch *nicht* aus *zwei* Zahlen besteht, nämlich aus einer Zahl vor dem Komma und einer Zahl hinter dem Komma, sondern daß er *eine einzige Zahl* darstellt. Zur Gewinnung dieser Einsicht ist die *Stellenwerttafel* hilfreich.
- Viele der vorgestellten Fehlerstrategien führen schließlich bei der Multiplikation und Division zu Ergebnissen, die stark vom richtigen Ergebnis abweichen. *Überschlagsrechnungen* können daher diese Rechnungen leicht als fehlerhaft entlarven.

Unsere Untersuchung hat einige Problembereiche bei der Behandlung der Dezimalbrüche aufgezeigt und näher beleuchtet. Neben einigen gefundenen Antworten und Ergebnissen bleiben allerdings noch *viele Aufgaben und offene Fragen* bestehen. Zum Abschluß dieses Beitrags wollen wir daher einige derartige Punkte knapp auflisten:

- Eine Ergänzung der gefundenen Daten durch *diagnostische Interviews* ist unbedingt wünschenswert, um so zu genaueren Aussagen über die Ursachen von Schülerfehlern zu gelangen.
- Effektive, erfolgversprechende *Gegenmaßnahmen* müssen erarbeitet und erprobt werden.
- Wieweit *nützen*, wieweit *stören gemeine Brüche* bei der Behandlung der Dezimalbrüche (z. B. Multiplikation gemeiner Brüche, Addition gemischter Zahlen, ...)?
- Wieweit greifen Schüler beim Operieren mit Dezimalbrüchen bei *Unsicherheit* bezüglich der anzuwendenden Regeln auf *gemeine Brüche und deren Rechenregeln* zurück?
- Sollen gemeine Brüche und Dezimalbrüche *parallel* behandelt werden oder in der Abfolge *»Erst gemeine Brüche, dann Dezimalbrüche«* oder in der umgekehrten Abfolge?
- Wieweit besteht eine Abhängigkeit zwischen dem Unterrichtserfolg und dem benutzten *methodischen Weg* bei der Einführung der Ordnungsrelation und der einzelnen Rechenoperationen?
- Warum tauchen Fehlerstrategien (z. B. die KT-Strategie) bei *einem* Schüler nur ganz selten bei *allen* Aufgabentypen auf, wo dies möglich ist, sondern meist nur bei *einem* Teil (vgl. auch Günther [7])?
- Welche (verschiedenen) Fehlerstrategien verwendet *ein* Schüler bei Aufgaben *eines* Aufgabentyps? So kann die in dieser Untersuchung benutzte Betrachtungsweise durch eine *individuenzentrierte Betrachtungsweise* (vgl. Lorenz [12]) ergänzt werden.
- Welche *Konsistenz* und welche *Persistenz* besitzen die Fehlerstrategien in der Dezimalbruchrechnung? Wieweit handelt es sich um *Reparaturen* im Sinne Van Lehn's [25]?
- Welche Probleme ergeben sich bei der Behandlung *periodischer Dezimalbrüche?*

Literatur

[1] *Breidenbach, W.:* Rechnen in der Volksschule. Hannover 1963, *dort* 11. Gewöhnliche Brüche, S. 221-252. 12. Dezimalzahlen, S. 258-268

[2] *Carpenter, Th. P. u. a.:* Decimals: Results and Implications from National Assessment. In: Arithmetic Teacher, April 1981, S. 34-37

[3] *Comiti, C./Neyret, R.:* A Propos Des Problemes Rencontres Lors De L'enseignement Des Decimaux En Classe De Cours Moyen. Grand N, Oktober 1979, S. 5-20

[4] *Daubert, K.:* Addieren (Subtrahieren) von Dezimalzahlen – kein Problem? In: Mathematik lehren, August 1984, S. 19-20

[5] *Griesel, H.:* Der quasikardinale Aspekt in der Bruchrechnung. In: Der Mathematikunterricht (MU) 4/1981, S. 87-95

[6] *Grossmann, A. S.:* Decimal Notation: An Important Research Finding. In: Arithmetic Teacher, Mai 1983, S. 32-33

[7] *Günther, K.:* Über das Verständnis der Schüler von Dezimalzahlen und auftretende Schülerfehler. In: Mathematische Unterrichtspraxis, 1/1987, S. 25-40

[8] *Hart, K. M. u. a.:* Children's Understanding of Mathematics: 11-16. London 1980

[9] *Hiebert, J./Wearne, D.:* Student's Conception of Decimal Numbers. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Montreal, 1983

[10] *Hiebert, J.:* Children's Knowledge Of Common And Decimal Fractions. In: Educ.-Urban Soc., August 1985, S. 427-437

[11] *Léonard, F./Grisvard, C.:* Sur deux régles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. In: Bull. Assoc. Prof. Math., Februar 1981, S. 47-60

[12] *Lorenz, J. H.:* Zur Methodologie der Fehleranalyse in der mathematikdidaktischen Forschung. In: Journal für Mathematikdidaktik, 3/1987, S. 205-228

[13] *Neisser, U.:* Cognition and Reality. San Francisco 1976

[14] *Padberg, F.:* Über typische Schülerschwierigkeiten in der Bruchrechnung – Bestandsaufnahme und Konsequenzen. In: Der Mathematikunterricht (MU), 3/1986, S. 58-77 (1986 a)

[15] *Padberg, F./Kühnhold, K.:* Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Subtraktion natürlicher Zahlen. In: Der Mathematikunterricht (MU), 3/1986, S. 6-16 (1986b)
[16] *Padberg, F./Stiewe, S.:* Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Multiplikation natürlicher Zahlen. In: Der Mathematikunterricht (MU), 3/1986, S. 18-28 (1986c)
[17] *Padberg, F./Bathelt, I./Post, S.:* Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Division natürlicher Zahlen. In: Der Mathematikunterricht (MU), 3/1986, S. 29-44 (1986d)
[18] *Padberg, F.:* Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche – Dezimalbrüche. Mannheim 1989 (1989a)
[19] *Padberg, F.:* Dezimalbrüche – problemlos und leicht? In: Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (MNU), 7/1989, S. 387-395 (1989b)
[20] *Padberg, F./Neumann, R./Sewing, N.:* Typische Schülerfehler bei Dezimalbrüchen. In: Mathematische Unterrichtspraxis (MUP) 4/1990
[21] *Raddatz, H.:* Möglichkeiten und Grenzen der Fehleranalyse im Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht (MU), 6/1985, S. 18-24
[22] *Reitberger, W.:* Was versteht man unter Flüchtigkeitsfehlern und wie kann man sie durch unterrichtliche Maßnahmen verhüten? In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 3/1989, S. 111-115
[23] *Resnick, L. B. u. a.:* Conceptual Bases of Arithmetic Errors: The Case of Decimal Fractions. In: Journal for Research in Mathematics Education, 1989, S. 8-27
[24] *Ruddock u. a.:* Assessing Mathematics: 2. Concepts and Skills: Decimal Place Value. In: Mathematics in School, Januar 1984, S. 24-28
[25] *Van Lehn, K.:* Bugs are not enough: Empirical Studies of Bugs, Impasses and Repairs in Procedural Skills. In: Journal of Mathematical Behavior, Sommer 1982, S. 3-71
[26] *Wearne, D./Hiebert, J.:* Über typische Schülerfehler im Bereich der Dezimalbrüche. In: Der Mathematikunterricht (MU), 3/1986, S. 78-88