

Kurzschreibweise:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 54 \\ - 26 \\ \hline 28 \end{array}$$

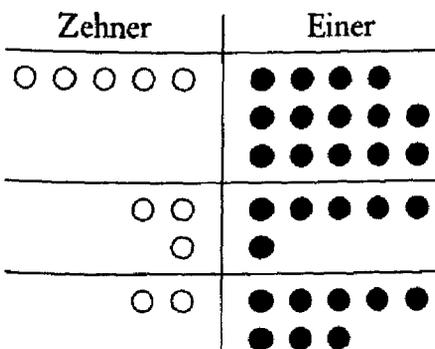
Diese Borgetechnik kann sowohl mit dem Abzieh- wie auch mit dem Ergänzungsverfahren kombiniert werden. Als Haupteinführungsweg ist diese Zehnerübergangstechnik jedoch beispielsweise bei den in Nordrhein-Westfalen verbreiteten Schulbüchern nicht zu finden.

2. Die Erweiterungstechnik

Der Erweiterungstechnik liegt das Gesetz von der Konstanz der Differenz (bei gleichsinniger Veränderung der Glieder) zugrunde. Ist in einer Spalte eine Stellenwertüberschreitung erforderlich, dann werden zur entsprechenden Ziffer des Minuenden 10 Einheiten (im folgenden Beispiel 10 Einer) addiert, die dem nächsthöheren Stellenwert des Subtrahenden anschließend gebündelt (im Beispiel als 1 Zehner) zugeschlagen werden.

Beispiel: 54
Aufgabe: - 26

enaktive/ikonische Realisation



Diese Technik wird in den gegenwärtig vorliegenden Schulbüchern überwiegend benutzt, so auch in dem bei unserer Untersuchung zugrundeliegenden Schulbuchwerk.

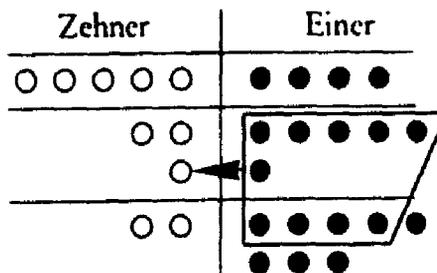
3. Die Auffülltechnik

Bei dieser Technik ist der Subtrahend der Ausgangspunkt, zu dem eine Zahl hinzugefügt werden muß, um den gegebenen Zielbetrag (den Minuenden) zu erreichen, ohne daß an der oberen Zahl etwas verändert wird.

In dem nachfolgenden Beispiel, in dem in der Einerspalte eine Stellenwertüberschreitung erforderlich ist, sind im Subtrahenden 6 Einer vorhanden. Addiert man nun zu diesen 6 Einern noch weitere 8 Einer hinzu, dann sind insgesamt 14 Einer vorhanden, also die im Minuenden geforderten 4 Einer und zusätzlich ein Zehner, der zu den bereits vorhandenen 2 Zehnern hinzugeschlagen wird. Hierbei fallen die starken Entsprechungen zwischen der Entstehung dieses Übertrags und der entsprechenden Vorgehensweise bei der schriftlichen Addition unmittelbar ins Auge. Wegen einer genaueren Diskussion der Auffülltechnik und insbesondere wegen eines sehr gründlichen Vergleichs der Vor- und Nachteile der Auffüll- und der Erweiterungstechnik sei an dieser Stelle auf entsprechende Ausführungen von Gerster verwiesen.

Beispiel: 54
Aufgabe: - 26

enaktive/ikonische Realisation:



Kurzschreibweise:¹⁾

$$\begin{array}{r} 10 \\ 54 \\ - 26 \\ \hline 1 \\ 28 \end{array}$$

Kurzschreibweise:

$$\begin{array}{r} 54 \\ - 26 \\ \hline 1 \\ 28 \end{array}$$

Wie aus der Beschreibung schon zu ersehen ist, läßt sich die Auffülltechnik nur mit dem Ergänzungsverfahren kombinieren.

Diese Technik wurde bis etwa 1970 in den Schulbüchern der BR Deutschland als die vorwiegend eingesetzte Methode benutzt (vgl. Gerster) und ist seitdem in vielen Schulbüchern durch die Erweiterungstechnik abgelöst worden. Sie wird beispielsweise in Nordrhein-Westfalen nur in einigen wenigen Schulbüchern benutzt.

Da der im eingeführten Schulbuch benutzte Einführungsweg für die Art der Einführung eines Stoffgebietes im Unterricht nicht unerheblich ist, verwendeten – entsprechend der Vorgehensweise bei dem in unserer Stichprobe einheitlich zugrundeliegenden Schulbuch – rund 90 % der von uns getesteten Schüler die Erweiterungstechnik in Verbindung mit dem vorgeschriebenen Ergänzungsverfahren.

2

Ergebnisse einiger grundlegender Untersuchungen

Zum Vergleich von Schülerleistungen in Abhängigkeit von der benutzten Methode ist uns im Bereich der schriftlichen Subtraktion nur eine grundlegende Untersuchung bekannt, nämlich die schon 1938 publizierte Studie von Johnson. Hierbei verglich er drei Methoden:

- die »decompositon method«, eine Kombination von Abziehverfahren und Borge-technik;
- die »equal addition method«, eine Kombination von Abziehverfahren und Erweiterungstechnik;
- die »Austrian method«, eine Kombination von Ergänzungsverfahren und Auffülltechnik.

Johnson differenzierte in seiner Studie zwischen Grundaufgaben (Beispiel: $12 - 9 = 3$) die im Kopf gelöst werden können, und komplexeren Aufgaben, die die Anwendung des jeweiligen schriftlichen Subtraktionsverfahrens erfordern. Anhand der entsprechend konstruierten Tests konnte überprüft werden, inwieweit ein Fehler zufällig auftrat bzw. inwieweit er von dem angewendeten Subtraktionsverfahren abhing. Es stellte sich heraus, daß die Mehrzahl der Fehler beim Lösen der komplexeren Aufgaben durch die Anwendung des Subtraktionsverfahrens bedingt und nicht auf Unkenntnis der Grundaufgaben zurückzuführen war.

Die mehr als 6000 Testblätter wurden sowohl in bezug auf den Aspekt »Richtigkeit der Aufgaben« wie auch auf die benötigte Zeit pro Test untersucht.

Bei einem Vergleich der drei Methoden ergaben sich folgende Resultate: Die in den USA weit verbreitete »decomposition method« verursachte 18,4 % mehr Fehler als die »equal addition method« und 16,4 % mehr als die »Austrian method«. Ferner erforderte sie 15,5 % mehr Zeit als die »equal addition method« und sogar 67 % mehr als die »Austrian method«.

Diese, wie Johnson feststellte, signifikanten Unterschiede zeigen, daß die »equal addition method« und die »Austrian method« in bezug auf die Fehlerhäufigkeit wesentlich besser abschneiden als die »decomposition method«, und folglich die Borgetechnik – zumindest in der untersuchten Kombination – fehleranfälliger ist als die Erweiterungs- und Auffülltechnik.

Bei einem Vergleich der »equal addition method« mit der »Austrian method« ergaben sich keine signifikanten Unterschiede bezüglich der Fehleranfälligkeit, wohl aber in bezug auf die benötigte Zeit, da die Schüler, die die Subtraktionsaufgaben mit Hilfe der »equal addition method« lösten, 44,5 % mehr Zeit benötigten. Der niedrigere Zeitaufwand bei der »Austrian method« ist wahrscheinlich neben der unterschiedlichen Technik beim Zehnerübergang auch darauf zurückzuführen, daß hierbei das Ergänzungsverfahren angewendet wird, also kein ständiger Wechsel zwischen Addition und Subtraktion erfolgen muß, während bei der »equal addition method« nach dem Abziehverfahren vorgegangen wird.

Karola Kühnhold und Friedhelm Padberg
Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Subtraktion natürlicher Zahlen

Ganzes auffassen oder rein ziffernweise rechnen, wurde der Sonderfall »Minuend kleiner als Subtrahend« im Test berücksichtigt.

Unser Test enthält konkret die folgenden Aufgaben:

Subtraktionstest	Zahlenraum bis 100 000 Aufgaben mit und ohne Stellenunterschied		
	keine Null	Null in den gegebenen Zahlen	Null im Ergebnis
kein Übertrag	1 $\begin{array}{r} 746 \\ - 532 \\ \hline 214 \end{array}$	2 $\begin{array}{r} 8067 \\ - 4020 \\ \hline 4047 \\ \textcircled{1} \end{array}$	3 $\begin{array}{r} 5738 \\ - 717 \\ \hline 5021 \\ \textcircled{1} \end{array}$
	4 $\begin{array}{r} 713 \\ - 281 \\ \hline 432 \end{array}$	6 $\begin{array}{r} 7705 \\ - 462 \\ \hline 7243 \end{array}$	8 $\begin{array}{r} 3964 \\ - 2558 \\ \hline 1406 \\ \textcircled{2} \end{array}$
ein Übertrag	5 $\begin{array}{r} 3279 \\ - 628 \\ \hline 2651 \\ \textcircled{6} \end{array}$	7 $\begin{array}{r} 5437 \\ - 2091 \\ \hline 3346 \\ \textcircled{7} \end{array}$	9 $\begin{array}{r} 5268 \\ - 4838 \\ \hline 430 \\ \textcircled{10} \end{array}$
	10 $\begin{array}{r} 5643 \\ - 4295 \\ \hline 1348 \\ \textcircled{8} \end{array}$	12 $\begin{array}{r} 1503 \\ - 396 \\ \hline 1107 \\ \textcircled{9} \end{array}$	14 $\begin{array}{r} 74254 \\ - 4156 \\ \hline 70098 \\ \textcircled{10} \end{array}$
zwei Überträge	11 $\begin{array}{r} 9638 \\ - 675 \\ \hline 8963 \\ \textcircled{16} \end{array}$	13 $\begin{array}{r} 8973 \\ - 8085 \\ \hline 888 \\ \textcircled{17} \end{array}$	15 $\begin{array}{r} 123781 \\ - 116762 \\ \hline 7019 \\ \textcircled{18} \end{array}$
	16 $\begin{array}{r} 88555 \\ - 33999 \\ \hline 54556 \\ \textcircled{23} \end{array}$	18 $\begin{array}{r} 60107 \\ - 309 \\ \hline 59798 \\ \textcircled{24} \end{array}$	20 $\begin{array}{r} 72184 \\ - 3978 \\ \hline 68206 \\ \textcircled{25} \end{array}$
mindestens 3 Überträge	17 $\begin{array}{r} 43362 \\ - 42974 \\ \hline 388 \\ \textcircled{26} \end{array}$	19 $\begin{array}{r} 20010 \\ - 420 \\ \hline 19590 \\ \textcircled{27} \end{array}$	21 $\begin{array}{r} 51365 \\ - 9385 \\ \hline 41980 \\ \textcircled{28} \end{array}$
	Sonderfälle 22 $\begin{array}{r} 6352 \\ - 6413 \\ \hline \textcircled{29} \end{array}$	23 $\begin{array}{r} 1000 \\ - 333 \\ \hline 667 \\ \textcircled{30} \end{array}$	24 $\begin{array}{r} 8345 \\ - 37642 \\ \hline \textcircled{31} \end{array}$

Tabelle 1: Übersicht über die im Subtraktionstest enthaltenen Schwierigkeitsmerkmale

Darüber hinaus weist unser Test folgende zusätzlichen Schwierigkeitsmerkmale auf:

I. <u>Gleiche Ziffern innerhalb einer Aufgabe</u>	in den Aufgaben mit der Nr.
(1) gleiche Ziffern übereinander	2, 3, 9, 14, 15, 19, 21
(2) . . . nach Berücksichtigung des Übertrags	8, 14, 15, 17, 20
(3) . . . beim höchsten Stellenwert	9, 13, 15, 17
(4) . . . dazu Übertrag	11, 18, 21
(5) . . . in benachbarten Spalten	16, 23
II. <u>Überträge</u>	
(6) Übertrag in eine leere Stelle	5, 11, 18, 19, 20, 21, 23
(7) Übertrag zur Null	7, 13, 18
(8) Übertrag zur 9	10, 16, 17, 21
(9) Übertrag zur 9 und Ergänzen bis 10	12
(10) Übertrag in eine leere Stelle und Ergänzen bis 10	18, 19
(11) Übertrag zur 0 und Ergänzen bis 10	18
(12) untere Ziffer minus Übertrag gleich obere Ziffer	13, 17, 20
III. <u>Sonderfälle</u>	
(13) Minuend kleiner als Subtrahend	22, 24

Tabelle 2: Zusätzliche Schwierigkeitsmerkmale

3.2

Die wichtigsten systematischen Fehler

Insgesamt machten rund 14 % der Schüler mindestens einen systematischen Fehler. Hierbei bewerteten wir einen Fehler als systematisch, wenn er bei den betreffenden Schülern bei mindestens der Hälfte aller in Frage kommenden Aufgaben auftrat. Unter den insgesamt 19 verschiedenen identifizierten systematischen Fehlern traten die folgenden drei Fehler am häufigsten auf:

Beispiel	Fehlermuster	Anteil der Schüler mit dem jeweiligen Fehler
$\begin{array}{r} 273 \\ - 197 \\ \hline 124 \end{array}$	Spaltenweise Subtraktion der kleineren von der größeren Ziffer ohne anschließenden Übertrag	3 % (23 %)²
$\begin{array}{r} 574 \\ - 216 \\ \hline 368 \end{array}$	Kein Übertrag berücksichtigt	3 % (21 %)
$\begin{array}{r} 786 \\ - 92 \\ \hline 794 \end{array}$	Kein Übertrag in die leere Stelle	2 % (13 %)

Tabelle 3: Die wichtigsten Subtraktionsfehler

Der hier zuerst genannte Fehlertyp wurde auch in allen uns vorliegenden Untersuchungen am häufigsten identifiziert.

3.3

Fehlergruppen und Fehlerhäufigkeiten

Um einen Überblick über die Häufigkeit der verschiedenen – nicht nur der systematischen – Fehler zu bekommen, teilten wir die Fehler in sieben übergreifende Fehlergruppen ein, und zwar in Anlehnung an eine entsprechende Klassifikation von Gerster.

Wir erhielten folgendes Ergebnis:

Fehlergruppe	Anteil an der Fehlerzahl
1. Übertragsfehler	49,5 %
2. Rechenrichtungsfehler ³⁾	16,5 %
3. Perseverationsfehler	10,4 %
4. Fehler mit der Null	7,8 %
5. Einsundeinsfehler	7,5 %
6. Anwendung der inversen Operation (Addition statt Subtraktion)	4,7 %
7. Fehler durch unterschiedliche Stellenanzahl	3,5 %

Tabelle 4: Aufteilung nach Fehlergruppen

Die in Tabelle 4 genannte Abfolge wird natürlich auch durch die Anzahl der Aufgaben beeinflusst, bei denen die einzelnen Fehlergruppen überhaupt auftreten können. Dies gilt insbesondere für die beiden Fehlergruppen »Fehler mit der Null« und »Fehler durch unterschiedliche Stellenanzahl«. Berücksichtigt man dies bei der Auswertung, so erhalten wir folgende Reihenfolge:

1. Übertragsfehler,
2. Rechenrichtungsfehler,
3. Perseverationsfehler,
4. Fehler mit der Null,
5. Fehler durch unterschiedliche Stellenanzahl,
6. Einsundeinsfehler,
7. Anwendung der inversen Operation (Addition statt Subtraktion).

Bei dieser Form der Auszählung gewinnt nur die Fehlergruppe »Fehler durch unterschiedliche Stellenanzahl« deutlich an Gewicht. Wichtigste Fehlerquelle ist jedoch in beiden Fällen der Übertrag bei der schriftlichen Subtraktion, in Übereinstimmung mit weiteren, uns bekannten Untersuchungen. Bei den Übertragsfehlern ist es sinnvoll, diese in drei Untergruppen zu zerlegen:

Während nur 9 % dieser Fehler auf den Bereich »Übertrag zuviel berücksichtigt«

(Beispiel:
$$\begin{array}{r} 34 \\ - 12 \\ \hline 12 \end{array}$$
)

und 16 % auf ein falsches Operieren mit der Merkfziffer entfallen, (Beispiel:
$$\begin{array}{r} 295 \\ - 87 \\ \hline 1 \\ 118 \end{array}$$
)

wird in 75 % dieser Fälle der Übertrag überhaupt nicht berücksichtigt (Beispiel:
$$\begin{array}{r} 34 \\ - 18 \\ \hline 26 \end{array}$$
)

Diese Ergebnisse weisen eindeutig darauf hin, daß ein Großteil der Schüler, die Übertragsfehler machen, beträchtliche Schwierigkeiten mit der Zehnerübertragstechnik haben und deshalb versuchen, das Problem einfach durch Nichtberücksichtigung der Merkfziffern zu umgehen.

Schlüsseln wir die einzelnen Fehler rein nach der absoluten Häufigkeit ihres Vorkom-

mens auf, ohne nach systematischen und unsystematischen Fehlern zu differenzieren, so kommen die fünf folgenden fehlerhaften Strategien am häufigsten vor:

– Spaltenweise Subtraktion der kleineren Zahl von der größeren Zahl ohne anschließenden Übertrag (256 mal;

Beispiel:
$$\begin{array}{r} 34 \\ - 16 \\ \hline 22 \end{array}$$
)

– kein Übertrag berücksichtigt bei Einhaltung der Rechenrichtung (186 mal;

Beispiel:
$$\begin{array}{r} 34 \\ - 16 \\ \hline 28 \end{array}$$
)

– Einsundeinsfehler der Nähe (98 mal;

Beispiel:
$$\begin{array}{r} 72 \\ - 48 \\ \hline 25 \end{array}$$
)

– kein Übertrag in eine leere Stelle (73 mal;

Beispiel:
$$\begin{array}{r} 72 \\ - 8 \\ \hline 74 \end{array}$$
)

– Übertrag zuviel berücksichtigt (57 mal;

Beispiel:
$$\begin{array}{r} 72 \\ - 11 \\ \hline 1 \\ 51 \end{array}$$
)

Ein Vergleich der Abfolge hier mit der Abfolge in der Tabelle 3 (systematische Fehler) zeigt weitgehende Entsprechungen auf. Berücksichtigt man jedoch die Anzahl der Aufgaben, bei denen die einzelnen Fehlermuster auftreten können, so stehen die folgenden fünf Fehlermuster an der Spitze, die allerdings nur jeweils bei ein bis zwei unserer Testaufgaben auftreten können:

– kein Übertrag in die folgende Stellenwertspalte, wenn die vorhergehende Minuendenziffer eine Null und die Subtrahendenziffer eine 9 ist, zu der ein Übertrag erfolgen muß (Aufg. 12)

– kein Übertrag in eine leere Stelle, wenn im Minuenden eine Null steht (Aufg. 18, 19)

– kein Übertrag, wenn gleiche Ziffern (Nullen) übereinander stehen (Aufg. 18)

– kein Übertrag zur 9, wenn im Minuenden eine Null steht (Aufg. 12)

– kein Übertrag zur Null (Aufg. 7, 13).

Karola Kühnhold und Friedhelm Padberg
Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Subtraktion natürlicher Zahlen

Durch diese Auflistung kommt deutlich zum Ausdruck, daß ein großer Teil der Schüler gerade bei »kniffligen« Aufgaben dazu neigt, die Merzkiffern nicht zu berücksichtigen, um so das Problem des Übertrags zu umgehen. Als besonders schwierig empfinden die Schüler augenscheinlich diejenigen Aufgaben, die im Subtrahenden eine 9 aufweisen und in denen eine Null in den gegebenen Zahlen vorkommt, ferner Aufgaben mit unterschiedlicher Stellenanzahl bei Minuend und Subtrahend und einer Null im Minuenden.

Demnach erwiesen sich also die in den Erläuterungen zum Subtraktionstest mit den Nummern (6) bis (11) bezeichneten Schwierigkeitsmerkmale als am fehleranfälligsten, auf die deshalb im Unterricht besonders eingegangen werden sollte.

3.4

Schwierigkeitsdimensionen

Die Vermutung, daß die Fehlerrate mit einer wachsenden Zahl von Überträgen zunimmt, wird durch die folgende tabellarische Übersicht bestätigt:

Zahl der Überträge pro Aufgabe	durchschnittliche Fehlerquote (falsch gelöste Aufgaben in %)
1	16 %
2	20 %
mind. 3	25 %

Tabelle 5: Zahl der Überträge und durchschnittliche Fehlerquote

Je mehr Überträge also in einer Aufgabe zu berücksichtigen sind, um so unübersichtlicher wird das Verfahren für die Schüler. Dies hat eine höhere Fehlerquote zur Folge.

Bei unserer Testkonstruktion hatten wir neben dem Faktor »Anzahl der Überträge« als weiteren Faktor auch die Frage berücksichtigt, ob Nullen in der jeweiligen Aufgabe vorkommen. Daß wir diese Frage zurecht beachtet haben, belegt die folgende Tabelle:

Schwierigkeitsmerkmal	durchschnittliche Fehlerquote
keine Null	16 %
Null nur im Ergebnis	18 %
Null in den gegebenen Zahlen	21 %

Tabelle 6: Nullen und durchschnittliche Fehlerquote

3.5

Die Auswirkungen ausgewählter Faktoren auf die Rechenleistungen

3.5.1 Klasse

Auch bei unserer Untersuchung bestätigte sich wiederum der große Einfluß der Lehrerpersönlichkeit und der speziellen Situation der einzelnen Klassen auf die Leistungen der Schüler. So schwankte bei unserem Subtraktionstest die durchschnittliche Zahl richtig gelöster Aufgaben je Klasse zwischen 13 Aufgaben (59 %) bei der schlechtesten und 22 Aufgaben (99 %) bei der besten Klasse. Außerdem ließen sich signifikante Unterschiede bezüglich der Häufigkeit des Auftretens von systematischen Fehlern zwischen den einzelnen Klassen feststellen. Während wir bei den Testblättern aus 13 Klassen keine systematischen Fehlerstrategien identifizieren konnten, variierte der Anteil der Schüler mit systematischen Fehlern in den übrigen 18 Klassen zwischen 8 und 56 %.

Die enormen Differenzen bei der Häufigkeit systematischer Fehler sind möglicherweise zum Teil darauf zurückzuführen, daß einige der Lehrer Fehler dieser Art frühzeitig entdeckten und Abhilfe schafften, während andere dazu nicht in der Lage waren, andererseits aber zum Teil auch auf Unterschiede bei der Einführung des Subtraktionsverfahrens. So ist es beispielsweise auffällig, daß nur in einer einzigen Klasse die Stellenwerttafel bei der schriftlichen Subtraktion nicht als Hilfsmittel eingesetzt wurde und daß genau diese Klasse im Vergleich zu den anderen bei weitem am schlechtesten abschnitt.

3.5.2 Notation der Überträge

Zwischen den beiden Kriterien »Anzahl richtig gelöster Aufgaben« und »Notation der Überträge« besteht bei unserer Untersuchung ein hoher Zusammenhang, wie die folgende Tabelle erkennen läßt:

Anzahl der Schüler ⁵⁾	Notation der Überträge	Anzahl richtig gelöster Aufgaben
251 (77 %)	immer notiert	19 (88 %)
53 (16 %)	nie notiert	18 (81 %)
21 (7 %)	manchmal notiert	14 (65 %)
325		

Tabelle 7: Notation der Überträge und Anzahl richtig gelöster Aufgaben

Die Ergebnisse legen den Hinweis nahe, die Merkfziffern beim Übertrag möglichst konsequent notieren zu lassen. Sehr ungünstig ist offenbar eine nur streckenweise erfolgende Notation der Übertragsziffern, wobei allerdings die entsprechende Schülergruppe bei unserer Untersuchung nur relativ klein war.

3.5.3 Nichtdezimale Stellenwertsysteme

Sechs der 31 untersuchten Klassen arbeiteten bei der Einführung der schriftlichen Subtraktion ausführlich mit nichtdezimalen Stellenwertsystemen. In sieben Klassen wurde dieser Themenbereich kurz angesprochen, während er in allen übrigen Klassen nicht berücksichtigt wurde.

Die wichtigsten diesbezüglichen Ergebnisse können der folgenden Tabelle entnommen werden:

Anzahl der Schüler	Behandlung nichtdezimaler Stellenwertsysteme	richtig gelöste Aufgaben (im Ø)	Anteil der Schüler mit systematischen Fehlern
61	ausführlich	21 (93 %)	3 %
72	kurz	18 (81 %)	15 %
209	überhaupt nicht	17 (78 %)	16 %

Tabelle 8: Behandlung nichtdezimaler Stellenwertsysteme und Anzahl richtig gelöster Aufgaben sowie Häufigkeit systematischer Fehler

Die Schüler, die intensiv mit nichtdezimalen Stellenwertsystemen gearbeitet haben, schneiden in bezug auf die systematischen Fehler und auf die Gesamtzahl richtig gelöster Aufgaben signifikant besser ab als die übrigen Schüler. Das bessere Ergebnis dieser Schülergruppe hängt vermutlich damit zusammen, daß diese bei der Einführung der schriftlichen Subtraktion nicht die Möglichkeit hatten, bei der Lösung der Aufgaben auf bereits vorhandenes Vorwissen zurückzugreifen und so z. B. die Größenordnung eines Ergebnisses in etwa abzuschätzen. Sie waren stattdessen gezwungen, das Verfahren systematisch und gründlich zu erlernen. Die besten Resultate erzielten übrigens die Klassen, in denen gleichzeitig die nichtdezimalen Stellenwertsysteme gründlich behandelt worden waren und in denen zugleich auch die Übertragsziffern konsequent notiert wurden.

4

Abschließende Bemerkungen

Nach unseren Befunden basiert mehr als ein Drittel aller falschen Aufgabenlösungen auf systematischen Fehlern, und es begeht jeder 7. Schüler mindestens einen systematischen Fehler. Bei diesen systematischen Fehlern muß daher bei dem Bemühen um eine Reduzierung der Fehler bei der schriftlichen Subtraktion angesetzt werden, da hier wegen der Konzentra-

tion auf einige wenige dominante fehlerhafte Strategien (vgl. 3.2) gezielte Maßnahmen den stärksten Erfolg versprechen. So kann der einzelne Lehrer bei Kenntnis der besonders fehlerträchtigen Bereiche im Rahmen der schriftlichen Subtraktion hier versuchen, bewußt vorzubeugen bzw. geeignete Gegenmaßnahmen zu ergreifen, um ein Einschleifen von fehlerhaf-

ten Rechenstrategien möglichst frühzeitig zu verhindern. Hilfreich ist auch der Einsatz von noch für den Schüler überschaubaren Aufgaben bei der schriftlichen Subtraktion, die er zur Kontrolle auch im Kopf rechnen kann. Hier kann dann beim Vorliegen fehlerhafter Strategien bewußt ein kognitiver Konflikt erzeugt werden, um auf diese Art die Schüler gegen diese Fehlerstrategien resitenter zu machen. Es empfiehlt sich auch, Teilfertigkeiten gezielt einüben zu lassen, z. B. nur die Bestimmung von Übertragsziffern (für nähere Details sei an dieser Stelle auf die Arbeit von Gerster verwiesen).

Der weit überwiegende Teil der Fehler steht mit dem Übertrag in Zusammenhang. Die Aufgaben ohne Übertrag bereiten den Schülern praktisch keine Schwierigkeit und werden von den Schülern zu über 95 % richtig gelöst. Viele dieser Schüler versuchen ihre beträchtlichen Schwierigkeiten mit dem Übertrag einfach in der weit überwiegenden Zahl der Fälle durch eine Nichtberücksichtigung der

Übertragsziffern zu lösen. Dies trifft besonders stark bei etwas »kniffligen« Aufgaben zu (vgl. 3.3). Ursache ist offenkundig eine nur ungenügende Einsicht in die Technik des Stellenwertübertrags. Das mangelnde Verständnis für das Subtraktionsverfahren, und zwar insbesondere für den Stellenübertrag, wird auch besonders deutlich bei den beiden Testaufgaben, die im Bereich der natürlichen Zahlen unlösbar sind. So erkannten lediglich 25 % der Schüler, daß das vertraute Subtraktionsverfahren auf die Aufgaben nicht angewandt werden kann und machten dies durch eine entsprechende Notiz kenntlich. Die große Mehrheit hingegen rechnete zunächst wie gewohnt rein ziffernweise, ohne die Zahlen als Ganzes zu erfassen und führte dann durch fehlerhafte Ausweichreaktionen (z. B. durch die Notation einer Null in der höchsten Stellenwertspalte) die Aufgabe zu einem fehlerhaften Ende.

Aufgrund unserer Befunde ist es empfehlenswert, vor der Behandlung des schriftlichen Subtraktionsverfahrens in unserem dezimalen

BHW DISPO 2000

Die neue Freiheit beim Sparen und Bauen.
Jetzt mit Bausparziel-Versicherung.

Welche Vorteile Ihnen diese neue Freiheit bringt, steht im neuen *BHW-Bauspar-Buch*. BHW Bausparkasse für den öffentl. Dienst, Postfach 10 13 22, 3250 Hameln 1, Btx *55 255 #

BHWA
Die Bausparkasse mit Ideen

Stellenwertsystem dieses zunächst in einer überschaubaren kleineren nichtdezimalen Basis einzuführen. Dies verlangt von den Schülern eine gründliche Einarbeitung in das Verfahren und zahlt sich offenkundig in einem vertieften Verständnis aus. Auch die konsequente Notation der Übertragungsziffern bei der schriftlichen Subtraktion ist offensichtlich hilfreich. Sie trägt zwar nicht zu einem vertieften Verständnis des Subtraktionsverfahrens bei, hilft jedoch, Fehler infolge der Überlagerung verschiedener Merkprozesse beim Kalkül zu reduzieren und ist auch bei der Kontrolle der Aufgaben hilfreich. Unsere Untersuchung hat ebenfalls wiederum den großen Einfluß der Lehrerpersönlichkeit wie der speziellen Situation der einzelnen Klassen deutlich gemacht (vgl. 3. 5.1). Insbesondere auch die drastischen Unterschiede in der Häufigkeit des Vorkommens systematischer Fehler zwischen den einzelnen Klassen ist beeindruckend. Wir vermuten, daß ein wichtiger Faktor hierfür die Frage ist, wie weit der einzelne Lehrer gezielte – oder zumindest intuitive – Kenntnisse über typische Schülerfehler besitzt und seinen Unterricht entsprechend gestaltet. Entsprechend ist es ein wichtiges Anliegen dieser Untersuchung, Lehrer für charakteristische Fehler und Schülerschwierigkeiten im Bereich der schriftlichen Subtraktion zu sensibilisieren.

Literatur

- Cox, Linda S.: Systematic errors in the four vertical algorithms in normal and handicapped populations. In: Journal for research in mathematics education (1975), S. 202–220
- Gerster, Hans-Dieter: Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie. Freiburg 1982
- Johnson, John Theodore: The relative merits of three methods of subtraction. New York 1938
- Mitschka, Arno: Schülerleistungen im Rechnen zu Beginn der Hauptschule. Hannover 1971
- Padberg, F.: Didaktik der Arithmetik. Mannheim 1986

Anmerkungen

- 1 Im weiteren Verlauf des Unterrichts verzichtet man darauf, die »10« oben zu notieren und notiert nur noch die 1 unten.
- 2 Der zuerst aufgeführte Prozentwert bezieht sich auf die gesamte Stichprobe von 342 Schülern, der Wert in Klammern dagegen nur auf die Schüler mit systematischen Fehlern.
- 3 Unter einem Rechenrichtungsfehler ist hierbei insbesondere die spaltenweise Subtraktion der oberen von der unteren Ziffer zu verstehen.
- 4 Die 2 unlösbaren Aufgaben berücksichtigten wir an dieser Stelle nicht.
- 5) Bei 17 der 342 Schüler wurde jeweils ein sich über das gesamte Testblatt erstreckender systematischer Fehler identifiziert, der die Notation von Übertragungsziffern überflüssig machte. Deshalb wurden diese Schüler in der Tabelle nicht berücksichtigt.

Anschriften:

Karola Kühnhold, Mainzer Straße 2, 4800 Bielefeld 1

Prof. Dr. Friedhelm Padberg, Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, Universitätsstraße, 4800 Bielefeld 1