

Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Multiplikation natürlicher Zahlen

von Susanne Stiewe und Friedhelm Padberg

Wie schon im unmittelbar vorangehenden Beitrag von Kühnhold/Padberg zur schriftlichen Subtraktion bildet auch hier unsere im Frühjahr 1983 in 30 Klassen¹⁾ des 4. Schuljahres an 16 verschiedenen Grundschulen im Raum Bielefeld durchgeführte Untersuchung über Schülerleistungen und typische Fehler bei der schriftlichen Multiplikation – neben einer im Untersuchungsablauf vorgeschalteten gründlichen Auswertung entsprechender deutschsprachiger und angloamerikanischer Publikationen – die entscheidende Grundlage dieser Arbeit. In allen untersuchten Klassen wurde hierbei einheitlich ein und dasselbe nicht nur in

Nordrhein-Westfalen weitverbreitete Schulbuch benutzt. Die genaue methodische Vorgehensweise der betreffenden Lehrer stellen wir durch eine sehr ausführliche standardisierte Befragung fest.

Entsprechend schildern wir im folgenden nach einleitenden Bemerkungen zum schriftlichen Multiplikationsverfahren (unter Punkt 1) und nach einer knappen Darstellung der Ergebnisse einiger wichtiger Studien zur schriftlichen Multiplikation (unter Punkt 2) im Hauptteil dieser Arbeit die in unserer Untersuchung gefundenen Ergebnisse und ziehen hieraus einige Schlußfolgerungen.

1

Bemerkungen zum schriftlichen Multiplikationsverfahren

Das Verfahren der schriftlichen Multiplikation ist in der BR Deutschland schon seit den fünfziger Jahren durch Beschluß der Kultusministerkonferenz auf folgende Art und Weise normiert worden:

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 753 \cdot 495 \\ \underline{3012} \\ \quad 6777 \\ \quad \underline{3765} \\ 372735 \end{array}$$

Beide Faktoren stehen also in derselben Zeile nebeneinander. Die rechte Zahl ist der Multiplikator, die linke Zahl der Multiplikand. Man beginnt die Multiplikation mit der höchsten Stelle des zweiten Faktors. Die Teilprodukte ordnet man jeweils ihrem Stellenwert entsprechend unter dem 2. Faktor an und läßt die zugehörigen Endnullen fort.

Bei der Bewertung von empirischen Untersuchungen ist zu beachten, daß das Verfahren der schriftlichen Multiplikation unterschiedlich normiert werden kann. So ist in den USA und England, aber auch in vielen für den Unterricht wichtigen Gastarbeiterherkunftsländern, wie z. B. in der Türkei, Griechenland, Spanien und – mit minimalen Modifikationen – auch in Italien die folgende Notationsform üblich:

Beispiel:

$$\begin{array}{r} 753 \\ \times 495 \\ \hline 3765 \\ 6777 \\ 3012 \\ \hline 372735 \end{array}$$

Abweichend von dem in der BR Deutschland üblichen Normalverfahren stehen hier die beiden Faktoren untereinander. Die untere

Zahl ist hierbei der Multiplikator, die obere Zahl der Multiplikand. Man beginnt die Multiplikation mit den Einern des zweiten Faktors,

entsprechend verläuft hier die »Staffel« der Teilprodukte von rechts nach links.

2

Ergebnisse einiger grundlegender Untersuchungen zur schriftlichen Multiplikation

Wir müssen uns hier auf die knappe Beschreibung einiger wichtiger Studien beschränken, nämlich auf die schon bei der schriftlichen Subtraktion erwähnte grundlegende Arbeit von Cox über systematische Fehler sowie auf die Untersuchungen insbesondere von Burge, und ergänzend auch von Whitaker/Williams und von Kilian, zur Häufigkeitsverteilung von Fehlern bei der schriftlichen Multiplikation.

An dieser Stelle sei auch schon auf den sehr informativen Band von Gerster über Schülerfehler bei den schriftlichen Rechenverfahren verwiesen, der uns für unsere Untersuchung manche Anregung vermittelt hat. Im Unterschied zu Gerster haben wir uns jedoch in unserer Untersuchung bewußt auf ein Schuljahr (Ende der Klasse 4) und ein einheitliches Schulbuch in allen untersuchten 30 Klassen (Gerster: insgesamt 20 Klassen des 4.-6. Schuljahres) beschränkt. Ferner fehlen bei Gerster gezielte und umfassende Aussagen über systematische Fehler bei der schriftlichen Multiplikation.

2.1

Die Untersuchung von Cox über systematische Fehler

Der Multiplikationstest von Cox besteht aus 10 Aufgabenblättern unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades mit jeweils 5 Aufgaben. Die Multiplikanden weisen hierbei bis zu 3 Stellen auf, die Multiplikatoren sind ein- oder zweistellig. Analysiert wurden rund 2700 Testblätter, wobei ungefähr ein Viertel aus der vierten Klasse stammt, die übrigen aus den Klassen 2, 3, 5 und 6. Der Anteil der Schüler, die systematische Fehler machten, lag mit im Durchschnitt 5 % klar unter den entsprechenden Werten bei der schriftlichen Subtraktion (dort 11 %). Am häufigsten unterliefen systematische

Fehler den Schülern der 4. Klasse, nämlich 8 %, während der Anteil der Schüler mit systematischen Fehlern nach längerer Praxis bis zur Klasse 6 auf 1 % abfiel. Hierbei nennt Cox einen Fehler systematisch, wenn er in 3 von 5 Aufgaben vorkommt. In der Untersuchung von Cox fällt die große Anzahl verschiedener systematischer Fehler auf, bedingt – so Cox – durch die starke Komplexität des Multiplikationsalgorithmus. Am häufigsten treten die beiden Fehler »Behalteziffer erst addiert, dann multipliziert« sowie »Einmaleinsfehler mit der Null« auf.

2.2

Untersuchungen zur Häufigkeitsverteilung von Fehlern

Burge untersuchte bereits 1932 mehr als 2500 Schüler der Klassen 4 bis 6 mit einem Multiplikationstest und ergänzend in einigen Fällen auch mittels Interviews, um so einerseits Fehlertechniken, aber andererseits auch problematische Gewohnheiten beim Lösungsprozeß aufzudecken.

Am häufigsten beobachtete Burge folgende Fehler:

	% der Schüler je Klassenstufe machten diesen Fehler (im Durchschnitt)
1. Fehler beim Kleinen 1×1	26
2. Einmaleinsfehler mit der Null ($0 \cdot a = a$)	16
3. Fehler bei der Anordnung der Teilprodukte, wenn die Einerziffer im Multiplikator eine Null ist	15

- | | |
|---|---|
| 4. Behalteziffernfehler | 8 |
| 5. Fehlerhafte Anordnung der Teilprodukte | 5 |

Auch die Untersuchung von Whitaker/Williams belegt deutlich den hohen Anteil von Fehlern beim Kleinen 1×1 , von Fehlern im Zusammenhang mit der Multiplikation mit Null und von Behalteziffernfehlern unter den Fehlern bei der schriftlichen Multiplikation, ebenso wie eine kürzlich auf der Grundlage einer wesentlich schmaleren Stichprobe (120 Schüler, 3000 untersuchte Multiplikationsaufgaben) von Kilian u. a. publizierte Studie. Hiernach

treten Einmaleinsfehler beim Kleinen 1×1 bei den Vielfachen von 2 bis 5 sehr viel seltener auf als bei den Vielfachen von 6 bis 9.

Betrachtet man zusammenfassend die Ergebnisse der hier dargestellten wie auch weiterer hier nicht aufgeführter Studien aus den USA und der BR Deutschland, so fällt auf, daß in diesen Arbeiten Einmaleinsfehler, Behalteziffernfehler und Fehler mit der Null die häufigsten Fehler bei der schriftlichen Multiplikation sind. Unter den Fehlern mit der Null sind die Fehler des Typs $0 \cdot a = a$, also Fehler bei Aufgaben, bei denen der Multiplikator 0 ist, wesentlich zahlreicher als die Fehler des Typs $a \cdot 0 = a$.²⁾

3

Typische Schülerfehler bei der schriftlichen Multiplikation

Wenn auch die Unterschiede beim Kalkül der schriftlichen Multiplikation zwischen den USA, wo die unter 2 referierten Untersuchungen durchgeführt wurden, und der BR Deutschland nicht so krass sind wie bei der schriftlichen Subtraktion, so bleiben dennoch – wie unter 1 ausgeführt – deutliche Unterschiede im Kalkül feststellbar. Ferner weicht die methodische Vorgehensweise in den USA häufig von der bei uns praktizierten ab (stärkere Betonung von Drill, geringerer Umfang und weniger anschauliche Art der Ableitung der Verfahren). Daher lag es nahe, eine hinreichend umfangreiche, eigene Untersuchung zum schriftlichen Multiplikationsverfahren durchzuführen, die gezielt den gegenwärtigen Mathematikunterricht in der BR Deutschland berücksichtigt. Für unsere Untersuchung erstellten wir einen diagnostischen Rechentest, mit dessen Hilfe Fehlermuster bei der schriftlichen Multiplikation erkannt, klassifiziert und typische Fehlerstrategien einzelner Schüler diagnostiziert werden können, um so gezielt diese Fehler bekämpfen zu können. Anregungen zur Konstruktion unseres Tests gaben uns die in der Literatur beschriebenen typischen oder systematischen Schülerfehler wie auch die diagnostischen Tests von Gerster.

3.1

Bemerkungen zu dem benutzten Test

Unser Test umfaßt 12 Aufgaben und weist folgende Charakteristika auf:

- Der Zahlenraum reicht bis 300 000.
- Die Multiplikatoren sind zwei- bzw. dreistellig, die Multiplikanden i. a. dreistellig (einmal vier-, einmal zweiziffrig).
- Ein Teil der Aufgaben weist eine Null im Multiplikanden, Multiplikator bzw. in einem Teilprodukt auf. Dieses ist eine sehr wichtige Schwierigkeitskomponente, da Nullen eine Vielzahl von Fehlern auslösen.
- Die Anzahl der Behalteziffern je Teilprodukt schwankt zwischen null und zwei. Sie bilden eine weitere bedeutende Fehlerquelle, weil sich beim Rechnen mit ihnen mehrere Merkprozesse überlagern.
- Die Behalteziffern je Teilprodukt sind teils kleiner oder gleich 5 (niedrigere rechnerische Anforderungen, die Behalteziffern können mit Hilfe der Finger gemerkt werden), teils größer als 5 (höhere rechnerische Anforderungen, der Einsatz der Finger entfällt).

Die Systematik der Aufgabenkonstruktion sowie die konkret benutzten Aufgaben kann man der folgenden Tabelle 1 entnehmen:

Susanne Stiewe und Friedhelm Padberg
Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Multiplikation natürlicher Zahlen

Multiplikations- test	– Zahlenraum bis 300 000 – Multiplikator zwei- bzw. dreistellig – Faktoren beim Einmaleins beliebig – Behalteziffern auch größer als 5 – Addieren einer Behalteziffer kann Zehnerübergang erfordern					
	keine Null		Null im Multipli- kanden		Null im Multi- plikator	
keine Behalteziffern	1	$\begin{array}{r} 712 \cdot 23 \\ 1424 \\ 2136 \\ \hline 16376 \end{array}$	2	$\begin{array}{r} 620 \cdot 41 \\ 2480 \\ 620 \\ \hline 25420 \end{array}$	3	$\begin{array}{r} 531 \cdot 30 \\ 15930 \end{array}$
eine Behalteziffer je Teilprodukt ≤ 5	4	$\begin{array}{r} 282 \cdot 33 \\ 846 \\ 846 \\ \hline 9306 \\ \textcircled{2} \end{array}$	5	$\begin{array}{r} 905 \cdot 86 \\ 7240 \\ 5430 \\ \hline 77830 \\ \textcircled{3} \textcircled{6} \end{array}$	6	$\begin{array}{r} 627 \cdot 302 \\ 18810 \\ 1254 \\ \hline 189354 \end{array}$
eine Behalteziffer je Teilprodukt (Ausnahme: 1. TP bei 8), mind. eine davon > 5	7	$\begin{array}{r} 47 \cdot 93 \\ 423 \\ 141 \\ \hline 4371 \\ \textcircled{5} \end{array}$	8	$\begin{array}{r} 380 \cdot 179 \\ 380 \\ 2660 \\ 3420 \\ \hline 68020 \\ \textcircled{5} \end{array}$	9	$\begin{array}{r} 281 \cdot 980 \\ 2529 \\ 22480 \\ \hline 275380 \\ \textcircled{5} \end{array}$
zwei beliebige Behalteziffern je Teilprodukt	10	$\begin{array}{r} 275 \cdot 289 \\ 550 \\ 2200 \\ 2475 \\ \hline 79475 \\ \textcircled{4} \textcircled{5} \textcircled{6} \end{array}$	11	$\begin{array}{r} 1044 \cdot 86 \\ 8352 \\ 6264 \\ \hline 89784 \\ \textcircled{1} \textcircled{3} \end{array}$	12	$\begin{array}{r} 239 \cdot 400 \\ 95600 \\ \textcircled{2} \end{array}$

Tabelle 1: Übersicht über die im Multiplikationstest enthaltenen Schwierigkeitsmerkmale

Darüber hinaus weist unser Test in jeweils einigen Aufgaben folgende zusätzliche Schwierigkeitsmerkmale auf:

- | | in Aufg. Nr. | |
|--|-----------------|---|
| ① Zwei gleiche Ziffern nebeneinander im Multiplikanden | 11 | ⑤ Addition einer Behalteziffer führt zur Zehnerüberschreitung |
| ② Zwei gleiche Ziffern nebeneinander im Multiplikator | 4, 12 | ⑥ Von Null verschiedene Faktoren ergeben eine Null im Teilprodukt |
| ③ Addition einer Behalteziffer zur Null | 5 (2x), 11 (2x) | |
| ④ Addition einer Behalteziffer erzeugt eine Zehnerzahl | 10 | |
- Tabelle 2: Zusätzliche Schwierigkeitsmerkmale

3.2

Die wichtigsten systematischen Fehler

Wir bezeichnen einen Fehler bei einem Schüler als systematisch, wenn er von dem betreffenden Schüler bei mindestens 50 % aller in Frage kommenden Aufgaben gemacht wird. Wie schon bei der Subtraktion machten auch hier rund 14 % der Schüler – also in einer Klasse von 30 Schülern im Durchschnitt 4 Schüler – mindestens einen systematischen Fehler. Nur eine kleine Minderheit machte bei der Multiplikation zwei oder gar drei verschiedene systematische Fehler. Allerdings schwankt der Anteil der Schüler mit systematischen Fehlern stark von Klasse zu Klasse. So machten in 2 Klassen über die Hälfte aller Schüler systematische Fehler, während in anderen Klassen keinem einzigen Schüler systematische Fehler unterliefen. Hiebei ist die Aufdeckung und Bekämpfung systematischer Fehler durch die betreffenden Lehrer besonders wichtig: so drückt ein einziger systematischer Fehler sehr stark die Anzahl richtig gelöster Aufgaben nach unten (im Extremfall auf Null), während sich andererseits gerade diese Fehler gut gezielt bekämpfen und so relativ rasch große Erfolge erzielen lassen.

Bei unserer Untersuchung identifizierten wir insgesamt acht verschiedene systematische Fehler, davon drei bei jeweils nur einem Schüler. Die fünf häufiger vorkommenden systematischen Fehler sind in der unten stehenden Tabelle 3 dargestellt.

Das Ergebnis macht deutlich, wie wichtig eine sorgfältige Beachtung der Null bei der schriftlichen Multiplikation ist, da allein mindestens 3 dieser 5 systematischen Fehler mit der Null zusammenhängen. Auch in der Untersuchung von Cox gehören die Einmaleinsfehler mit der Null zu den häufigsten systematischen Fehlern. Die Tatsache übrigens, daß in unserer Untersuchung der Anteil der Schüler mit systematischen Fehlern über den Werten von Cox liegt, läßt sich zumindest zum Teil dadurch erklären, daß das Kriterium von Cox strenger ist (und daher eher weniger Schüler systematische Fehler machen) sowie insbesondere auch durch Unterschiede im Schwierigkeitsgrad der Aufgaben (so kamen in unserem Test Aufgaben mit einziffrigem Multiplikator nicht vor).

Fehlerbeschreibung	Beispiel	Anteil der Schüler mit dem jeweiligen Fehler
Stellenwertbelegende Rolle der Null im 2. Faktor nicht beachtet	$\begin{array}{r} 531 \cdot 30 \\ \hline 1593 \leftarrow \end{array}$	5 % (39 %) ³⁾
Stellenwertfehler durch falsche Anordnung der Teilprodukte	$\begin{array}{r} 712 \cdot 23 \\ \hline 1424 \leftarrow \\ 2136 \end{array}$	5 % (36 %)
Einmaleinsfehler mit der Null im 2. Faktor ($0 \cdot a = a$) ⁴⁾	$\begin{array}{r} 531 \cdot 30 \\ \hline 1593 \\ 531 \leftarrow \end{array}$	3 % (23 %)
Einmaleinsfehler mit der Null im 1. Faktor ($a \cdot 0 = a$) ⁴⁾	$\begin{array}{r} 620 \cdot 41 \\ \hline 2484 \\ \uparrow \end{array}$	1 % (9 %)
Behalteziffer als zusätzliche Stelle im (Teil-)Produkt notiert	$\begin{array}{r} 282 \cdot 33 \\ \hline 6246 \\ \uparrow \end{array}$	1 % (9 %)

Tabelle 3: Liste der fünf häufigsten systematischen Fehler

Susanne Stiewe und Friedhelm Padberg
Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Multiplikation natürlicher Zahlen

Fehlerbeschreibung	Beispiel	Häufigkeit		durchschnittliche Häufigkeit pro Aufgabe	mögliche Fehlerursachen
		absolut	% aller Fehler		
Stellenwertfehler durch falsche Anordnung der Teilprodukte, z. B. Ausrücken nicht beachtet	$\begin{array}{r} 712 \cdot 23 \\ \hline 1424 \leftarrow \\ 2136 \end{array}$	172	15	14	Anwendung einer falschen bzw. keiner Regel für die Anordnung der Teilprodukte; Bedeutung des Ausrückens wurde nicht erfaßt bzw. vergessen; Anhängen wurden möglicherweise zu früh weggelassen
Stellenwertbelegende Rolle der Null im 2. Faktor nicht beachtet	$\begin{array}{r} 531 \cdot 30 \\ \hline 1593 \leftarrow \end{array}$	53	5	13	Methodische Stufe »Multiplikation mit reinen Zehner- bzw. Hunderterzahlen« nicht ausführlich genug behandelt; Nullanhangungsregel zu formal ohne Einsicht der Schüler eingeführt; Zehner- bzw. Hunderterzahlen werden nicht als Ganzes aufgefaßt, sondern zerlegt (z. B. $\cdot 40$ in $\cdot 4$ und $\cdot 0$); zu wenig Übung und damit keine Regel für das Rechnen mit Nullen; zu früh auf das Notieren der Endnullen verzichtet
Einmaleinsfehler mit der Null im zweiten Faktor	$\begin{array}{r} 531 \cdot 30 \\ \hline 1593 \\ 531 \leftarrow \end{array}$	38	3	10	Falsche Vorstellung, daß bei Multiplikationsaufgaben das Resultat größer als die Einzelfaktoren bzw. so groß wie der größere Faktor sein muß; Aufgaben mit Nullen beim Erarbeiten des Einmaleins zu wenig berücksichtigt; keine Unterscheidung zwischen der Rolle der Null bei der Addition und Multiplikation
im ersten Faktor	$\begin{array}{r} 620 \cdot 41 \\ \hline 2484 \\ \uparrow \end{array}$	22	2	6	
Einmaleinsfehler der Nähe	$8 \cdot 3 = \underline{21}$	99	9	8	Zu starke Betonung des Auf-sagens von Einmaleinsreihen, so daß sich die Schüler beim Abrufen des zu einem gegebenen Multiplikators gehörenden Produktes aus der auswendig gelernten Einmaleinsreihe leicht um ein Element vertun; Probleme beim ordinalen Zählen; Probleme durch das Zurückführen von Aufgaben auf sogenannte Königs- bzw. Stützpunktaufgaben
Einerstelle des vorangehenden Teilprodukts als Behalteziffer addiert	$\begin{array}{r} 126 \cdot 6 \\ \hline 1156 \\ \uparrow \end{array}$	71	6	8	Produktziffer wirkt nach und setzt sich gegenüber der Behalteziffer durch (Perseverationsfehler); Verstärkung dieser Tendenz durch die Betonung der Produktziffer beim begleitenden Sprechen

Tabelle 4: Die fünf häufigsten Fehler sowie mögliche Fehlerursachen

3.3

Die fünf häufigsten Fehler und mögliche Ursachen

Bei unserer Untersuchung identifizierten wir insgesamt 1149 Fehler. Hierbei wurden identische Fehler innerhalb einer Aufgabe, auch wenn sie dort mehrfach auftraten, nur jeweils einfach gezählt. Läßt man die Fehler, die bei der Addition der Teilprodukte auftreten, unberücksichtigt, so kommen die in der folgenden Tabelle 4 ausgewiesenen Fehler jeweils am häufigsten vor. Hierbei fällt auf, daß eine weitgehende Übereinstimmung zwischen den häufigsten systematischen Fehlern und den insgesamt häufigsten Fehlern besteht, daß hier also nicht von den systematischen Fehlern völlig abweichende andere Fehler, etwa Flüchtigkeitsfehler, das Bild grundlegend verändern. Bei der Anordnung der fünf häufigsten Fehler innerhalb der folgenden Tabelle 4 haben wir für die Rangfolge nicht die absolute Fehlerzahl, sondern die aussagekräftigere durchschnittliche Häufigkeit des einzelnen Fehlers pro Aufgabe zugrundegelegt, haben wir also die Anzahl der Aufgaben berücksichtigt, in denen der einzelne Fehler überhaupt auftreten konnte. Bei der Zuordnung von möglichen Fehlerursachen wie insbesondere auch bezüglich Vorschlägen zum Beheben und Vermeiden von Fehlermustern sei an dieser Stelle nochmals auf den Band von Gerster über Schülerfehler bei den schriftlichen Rechenverfahren verwiesen, dessen Analysen in diesem Bereich sich weitgehend mit unseren Befunden decken.

3.4

Fehlerhäufigkeit nach Fehlergruppen

Fassen wir die einzelnen Fehler nach Fehlergruppen zusammen, so erhalten wir folgendes Ergebnis:

Fehlergruppe	Anteil (%)
Behalteziffernfehler	30
Einmaleinsfehler	27
Stellenwertfehler	23
Additionsfehler	10
Verfahrensfehler	9
Rechenrichtungsfehler	2

Tabelle 5: Anteile der einzelnen Fehlergruppen an der Gesamtfehlerzahl

Hierbei sind der in Tabelle 4 genannte Fehler »Einerstelle des vorangehenden Teilproduktes als Behalteziffer addiert« sowie der in Tabelle 3 genannte Fehler »Behalteziffer als zusätzliche Stelle im (Teil-)Produkt notiert« neben dem Fehler »Rechenfehler der Nähe bei der Addition der Behalteziffer« die wichtigsten Fehler-typen bei den Behalteziffernfehler. Der in verschiedenen, insbesondere amerikanischen Untersuchungen beschriebene Behalteziffernfehler »Behalteziffer erst addiert, dann multipliziert« spielt dagegen bei unseren Untersuchungen keine Rolle. Der hohe Anteil der Behalteziffernfehler an den Fehlern insgesamt überrascht nicht, da sich bei dem Multiplikationsverfahren mehrere Merkprozesse überlagern, die ein hohes Maß an Konzentration, Genauigkeit und Ausdauer erfordern.

Unter den Einmaleinsfehlern spielen die in Tabelle 3 bzw. Tabelle 4 erwähnten Einmaleinsfehler mit der Null sowie die Einmaleinsfehler der Nähe die entscheidende Rolle, während die Stellenwertfehler auf einer falschen Anordnung der Teilprodukte bzw. auf der Nichtbeachtung der stellenwertbelegenden Rolle der Null im 2. Faktor beruhen. Als Verfahrensfehler haben wir im wesentlichen zwei Fehler ausgewiesen, nämlich das Auslassen eines kompletten Teilprodukts bei der schriftlichen Multiplikation, sowie das »Verrutschen« innerhalb des Multiplikators bei der Berechnung eines Teilproduktes (Beispiel: $281 \cdot 980$), wobei

$$\begin{array}{r} 2529 \\ 2248 \\ \underline{2240} \\ \uparrow \end{array}$$

beide Fehler vermutlich durch Konzentrationsmangel bedingt sind.

Dagegen spielen Abweichungen von der Rechenrichtung des Normalverfahrens — als Rechenrichtungsfehler bezeichnet — bei unserer Untersuchung nur eine sehr untergeordnete Rolle.

3.5

Schwierigkeitsdimensionen

Bei unserer Testkonstruktion haben wir für das zugrundeliegende Raster verschiedene, in der untersuchten Literatur gefundene Schwierigkeitsdimensionen benutzt. Die folgende Ta-

belle 5 liefert uns genauere Hinweise, wieweit sich die zugrundegelegten Schwierigkeitsdimensionen in den Lösungsprozentsätzen der einzelnen Aufgaben widerspiegeln:

Aufgabe	Prozentsatz richtiger Lösungen
Nr. 1 (712 · 23)	87
Nr. 2 (620 · 41)	85
Nr. 3 (531 · 30)	85
Nr. 4 (282 · 33)	83
Nr. 5 (905 · 86)	83
Nr. 12 (239 · 400)	77
Nr. 6 (627 · 302)	74
Nr. 7 (47 · 93)	73
Nr. 11 (1044 · 86)	73
Nr. 9 (281 · 980)	63
Nr. 8 (380 · 179)	60
Nr. 10 (275 · 289)	53

Tabelle 6: Prozentsatz richtiger Lösungen bei den einzelnen Testaufgaben

So fallen den Schülern erwartungsgemäß die Aufgaben ohne Behalteziffern (Nr. 1 – Nr. 3) am leichtesten. Die wenigen Fehler entfallen bei Aufgabe 1 (in Form der rechtsbündigen Anordnung der Teilprodukte) und bei Aufgabe 3 (infolge Nichtbeachtung der stellenwertbelegenden Rolle der Null im 2. Faktor) weit überwiegend auf Stellenwertfehler, bei Aufgabe 2 (Null im Multiplikanden!) auf Einmaleinsfehler.

Aufgaben, die nur eine Behalteziffer kleiner 6 je Teilprodukt haben, bei denen man sich darum die Behalteziffer ggf. zusätzlich mit den Fingern leicht merken kann und die vom zugrundeliegenden 1×1 her leicht lösbar sind, sind für die Schüler beinahe genau so leicht lösbar wie Aufgaben ohne Behalteziffern (vgl. die Aufgaben Nr. 4 und 5). Kommt jedoch zusätzlich eine Null im Multiplikator hinzu, so reduziert dies den Lösungsprozentsatz deutlich (vgl. Nr. 6). Bei den drei Aufgaben Nr. 4–6 dominieren einheitlich die Einmaleinsfehler (insbesondere Einmaleinsfehler der Nähe), es folgen danach an Bedeutung bei den Aufgaben Nr. 4 und 5 die Stellenwertfehler (in Form einer rechtsbündigen Anordnung der Teilprodukte) und bei Nr. 6 die Behalteziffernfehler. Insgesamt treten also bei den Aufgaben Nr. 4–6 nur

wenige Behalteziffernfehler auf, wobei hier die fehlerhafte Addition der vorangegangenen Einerziffer als Behalteziffer relativ am häufigsten auftritt.

Die Aufgabe Nr. 12 fällt den Schülern trotz des Vorkommens von 2 Behalteziffern in dem Teilprodukt vermutlich deshalb besonders leicht, weil neben der Kenntnis der Nullanhängerregel nur die Multiplikation mit einem einzeiffrigen Faktor geringer Größe (4) verlangt wird. Die Nichtbeachtung der Endnullen, also ein Stellenwertfehler, ist hier erwartungsgemäß der Hauptfehler, Behalteziffernfehler treten hier nicht allzu häufig auf, sicher auch dadurch bedingt, daß hier nur ein Teilprodukt berechnet werden muß.

Dagegen liegen bei den Aufgaben Nr. 7 bis 9, bei denen jeweils mindestens eine Behalteziffer größer 5 vorkommt, die Behalteziffernfehler mit Abstand an der Spitze, und zwar vor allem die Fehler vom Typ »Einerziffer des vorangegangenen Teilprodukts als Behalteziffer addiert«, aber auch relativ häufig die Fehler »Rechenfehler der Nähe bei der Addition der Behalteziffern«. Hier wirkt sich vermutlich das zusätzliche Schwierigkeitsmerkmal »Addition einer Behalteziffer führt zur Zehnerüberschreitung« aus. An zweiter Stelle liegen bei den Aufgaben 7 und 8 Einmaleinsfehler der Nähe, bei der Aufgabe 9 Stellenwertfehler (und zwar Stellenwertfehler bedingt durch eine falsche Anordnung von Teilprodukten sowie bedingt durch die Nichtbeachtung der stellenwertbelegenden Rolle der Null im 2. Faktor). Das relativ günstige Abschneiden der Aufgabe Nr. 7 beruht sicher auch darauf, daß Multiplikator wie Multiplikand hier nur zweizeiffrig sind und in beiden zusätzlich keine Null vorkommt.

Von den Aufgaben Nr. 10 bis 12 mit zwei beliebigen Behalteziffern je Teilprodukt haben wir die relativ gut gelöste Aufgabe Nr. 12 schon erwähnt. Bei den Aufgaben Nr. 10 und 11 dominieren die Behalteziffernfehler, und zwar bei Nr. 10 die »Rechenfehler der Nähe bei der Addition der Behalteziffer«, vermutlich bedingt durch das zusätzliche Schwierigkeitsmerkmal »Addition einer Behalteziffer erzeugt eine Zehnerüberschreitung«, bei Nr. 11 der Fehler »Einerstelle des vorangehenden Teilprodukts als Behalteziffer addiert«. Mit Abstand am

schlechtesten ist die Lösungsquote bei der Aufgabe Nr. 10.

Analysieren wir im folgenden gezielt die 8 Aufgaben (Nr. 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12), die Nullen im Multiplikanden bzw. im Multiplikator aufweisen, so beobachten wir hier deutlich eine Anzahl von Fehlern, die durch die Nullen bedingt sind, und zwar sowohl Einmaleinsfehler wie auch Stellenwertfehler.

In der ersten Gruppe sind die Fehler des Typs »Einmaleinsfehler mit der Null im 2. Faktor ($0 \cdot a = a$)« wesentlich häufiger vertreten als die des Typs »Einmaleinsfehler mit der Null im 1. Faktor ($a \cdot 0 = a$)« [Verhältnis 38 : 22]. Bei den Stellenwertfehlern identifizierten wir 53 mal das Fehlermuster »Stellenwertbelegende Rolle der Null im 2. Faktor nicht beachtet«, ein Fehler, der bei der 6. Aufgabe (Null in der Mitte des 2. Faktors) nur sehr selten gemacht wurde. In solchen Fällen erkennen die Schüler die stellenwertbelegende Rolle der Null offenbar eher als in den Fällen, wo es sich um Endnullen handelt.

3.6

Auswirkungen ausgewählter Faktoren auf die Rechenleistungen

3.6.1 Behalteziffern

Der Algorithmus der schriftlichen Multiplikation ist sehr komprimiert. Neben dem eigentlichen Rechenvorgang, bei dem die Fakten des Kleinen 1×1 sehr rasch und sicher verfügbar sein müssen, sind nämlich jeweils noch 2 Merkprozesse zu beachten. Die Überlagerung dieser drei Vorgänge verdeutlicht das folgende Beispiel:

Aufgabe: $578 \cdot 7$
 4046

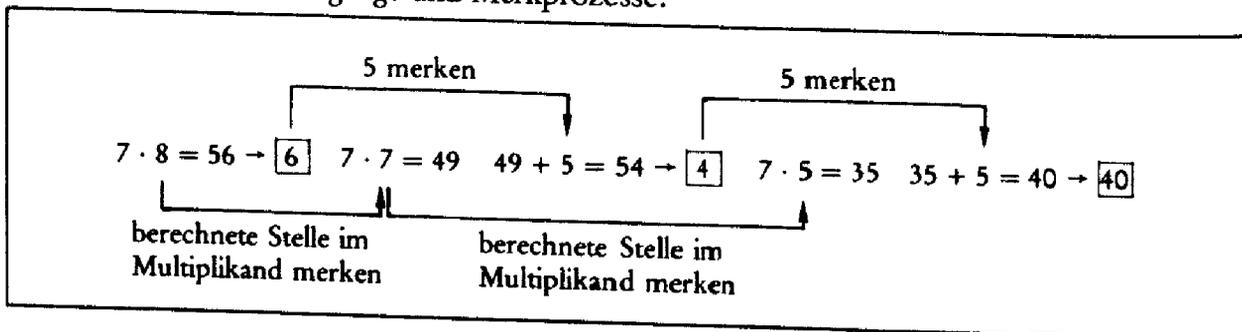
Obwohl viele der befragten Lehrer keine Bedenken dagegen haben, die Behalteziffern notieren zu lassen, macht allerdings der überwiegende Teil der von uns untersuchten Schüler von diesem Hilfsmittel keinen Gebrauch. Dabei ist nach unseren Befunden die konsequente Notation der Behalteziffern eine sehr wirksame Hilfe für die Schüler. So erzielten nämlich die Schüler, die die Behalteziffern stets mitschrieben – entweder in der Aufgabe selbst oder am Rand – die besten Ergebnisse (Fehlerquotient [FQ], d. h. Prozentsatz falscher Lösungen: 21 %), mit Abstand gefolgt von denen, die sie nie (FQ: 26 %) oder nur manchmal (FQ: 29 %) notierten. Läßt man die Behalteziffern jeweils seitlich von der Aufgabe notieren, so muß man unbedingt darauf achten, daß die Ziffern stets nach der Addition durchgestrichen werden, um so zu verhindern, daß sie irrtümlich mehrfach berücksichtigt und so zur Ursache für neue Fehler werden.

3.6.2 Endnullen

Rund die Hälfte der Schüler notierte konsequent die Endnullen beim Aufschreiben der Teilprodukte, die andere Hälfte benutzte die Kurzform ohne Endnullen. Während die Schüler, die die Endnullen immer notierten, nur eine Fehlerquote von 20 % erreichten, machten die Schüler, die die Kurzform ohne Endnullen benutzten, wesentlich mehr Fehler (FQ: 31 %).

Das konsequente Notieren der Endnullen bei allen Aufgaben wirkt sich auch äußerst positiv auf das Auftreten der systematischen Fehler »Stellenwertfehler durch falsche Anordnung von Teilprodukten« und »Stellenwertbelegende Rolle der Null im zweiten Faktor nicht beachtet« aus.

Erforderliche Rechenvorgänge und Merkprozesse:



3.6.3 Nullzeilen

Bei Aufgaben mit Nullen im Multiplikator notierten knapp zwei Drittel der Schüler eine Nullzeile bei mindestens drei der vier entsprechenden Aufgaben, ein Viertel wählte stets die eleganteste Form, nämlich die Nullen ganz wegzulassen. Der Rest schrieb die Nullzeilen bei ein oder zwei Aufgaben.

Die Notation der Nullzeilen hat hierbei einen deutlichen Einfluß auf die Anzahl der Fehler: So wiesen Schüler, die bei mindestens drei Aufgaben Nullzeilen schrieben, deutlich bessere Ergebnisse auf (FQ: 23 %) als solche, die das nie (FQ: 29 %) oder manchmal (FQ: 40 %) machten.

4

Abschließende Bemerkungen

Zum Schluß dieser Arbeit sollen noch einmal die wichtigsten, aus unserer Untersuchung gewonnenen Schlußfolgerungen für die Einführung der schriftlichen Multiplikation zusammengefaßt werden:

- Die Multiplikation mit reinen Zehner- bzw. Hunderterzahlen muß im Unterricht gründlich behandelt werden. Auf diese Phase ist besonderes Gewicht zu legen, sie darf sich nicht einfach im Anhängen von Nullen erschöpfen. Zum einen müssen ihr zahlreiche Übungen im mündlichen Rechnen vorausgehen, zum anderen sollte aber auch die Sprechweise sehr ausführlich sein. Ferner sind die Schüler immer wieder darauf hinzuweisen, daß sie z. B. mit 40 multiplizieren und nicht etwa mit 4 und 0.
- Zumindest in der Anfangsphase ist es angebracht, die Behalteziffern notieren zu lassen, damit sich die Schüler ganz auf den Ablauf des Verfahrens konzentrieren können. Vielleicht wäre es sogar sinnvoll, diese Vorgehensweise auch später beizubehalten, zumal es ja bei der Addition und Subtraktion ebenfalls üblich ist, die Übertragsziffern schriftlich festzuhalten. Bei besonders schwachen Schülern bietet sich ein Verzicht auf das Normalverfahren und statt dessen der Einsatz eines der zahlreichen in der Literatur beschriebenen Alternativverfahren an.
- Da das Mitschreiben der Endnullen einen positiven Einfluß auf die Anzahl der Stellenwertfehler ausübt, erweist es sich als günstig, die Nullen länger als bislang üblich notieren zu lassen, eventuell sogar auf Dauer, wie es schon in einigen der getesteten Klas-

sen praktiziert wurde. Als weitere Hilfe kann das Anwenden eines Stellenwertschemas angesehen werden.

- Aufgaben mit Nullen sollten immer eingeschoben werden, um die systematischen Fehler »Stellenwertbelegende Rolle der Null im zweiten Faktor nicht beachtet« und »Einmaleinsfehler mit der Null« zu vermeiden. Für die Behebung des zuerst genannten Fehlers scheint besonders das Notieren von Nullzeilen vorteilhaft zu sein.

Auch bei unserer Untersuchung zur schriftlichen Multiplikation ergaben sich starke Unterschiede im Anteil richtiger Lösungen wie auch bezüglich des Auftretens systematischer Fehler zwischen den einzelnen untersuchten Klassen. Deshalb ist es nach unserer Einschätzung äußerst wichtig und hilfreich, den Lehrern Hinweise auf typische, häufiger vorkommende sowie auf systematische Fehler zu geben, um sie so hierfür zu sensibilisieren und es ihnen zu ermöglichen, hiergegen gezielt und wirkungsvoll vorzugehen, damit sich diese Fehler gar nicht erst bei den Schülern »einschleifen« können.

Anmerkungen

1 Eine der beim Subtraktionstest untersuchten 31 Klassen hatte die schriftliche Multiplikation zum Zeitpunkt der Testdurchführung noch nicht vollständig behandelt und kam daher für den Multiplikationstest nicht in Frage. In den übrigen 30 Klassen bearbeitete – wie schon im Beitrag von Kühnhold/Padberg erwähnt – die Hälfte jeder Klasse jeweils den von uns entworfenen Multiplikationstest (insgesamt 323 Schüler), die andere Hälfte den Subtraktionstest.

Susanne Stiewe und Friedhelm Padberg
Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Multiplikation natürlicher Zahlen

2 Man beachte die unterschiedliche Stellung des Multiplikators bei der mündlichen bzw. bei der schriftlichen Multiplikation.

3 Der erste Prozentwert bezieht sich auf die gesamte Stichprobe (323 Schüler), der Wert in Klammern auf die Schüler mit systematischen Fehlern (44 Schüler).

4 Die Schreibweise in den Klammern bezieht sich auf die mündliche Sprechweise bei der Multiplikation.

Kilian, L. u. a.: Errors that are Common in Multiplication. In: Arithmetic Teacher 27 (1979/80) 5, S. 22-25

Padberg, F.: Didaktik der Arithmetik. Mannheim 1986

Whitaker, R. L./Williams, C. L.: Diagnosis of Arithmetic Difficulties. In: Elementary School Journal 37 (1936/37), S. 592-600

Literatur

Burge, L. V.: Types of Errors and Questionable Habits of Work in Multiplication. In: Elementary School Journal 33 (1932/33), S. 185-194

Cox, L. S.: Systematic Errors in the Four Vertical Algorithms in Normal and Handicapped Populations. In: Journal for Research in Mathematics Education 6 (1975), S. 202-220

Gerster, H.-D.: Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie. Freiburg 1982

Anschriften:

Susanne Stiewe

Wienkeweg 1

4938 Schieder-Schwalenberg 2

und

Prof. Dr. Friedhelm Padberg

Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik

Universitätsstr.

4800 Bielefeld 1

Wenn's um Ihren Unterricht und Ihre Termine geht. Der UT-Planer von Klett.

Der »**Unterrichts- und Terminplaner**«, Klettbuch **80005**, im Format DIN A 4, enthält neben Jahresübersichtskalendern, Ferienübersichten, Stunden-, Klassen- und Klassenarbeitsplänen, Anschriften der Schulbuchverlage etc.

☞ einen **umfangreichen Terminkalender** (mit Uhrzeitleisten) jeweils für die Zeit vom Juli eines Jahres bis zum Ende des Folgejahres – für die Schulmonate des Schuljahres jeweils doppelseitig.

☞ **Übersichtsseiten** für die Eintragung von **Lerninhalten** (Stoffverteilung), von Hausaufgaben und Medienbereitstellungen je Klasse und Fach für das ganze Schuljahr sowie

☞ **übersichtliche, doppelseitige Notenverzeichnisse** für das erste und zweite Schulhalbjahr je Klasse und Fach – geordnet nach Klassenarbeiten, Übungen/Tests, mündlicher Mitarbeit und Hausaufgaben.

Registerstreifen und die beiden »**Lesebänder**« ermöglichen ein rasches Auffinden und Aufschlagen der gewünschten Klasseiten.

Unterrichts- u. Terminplaner 1986/87

Klettbuch **80005**, DM 19,50

zuzüglich Versandkosten.

Preis freibleibend. Stand 1.1.1986.



Ernst Klett Verlag
Postfach 809
7000 Stuttgart 1