

Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Division natürlicher Zahlen

von Inge Bathelt, Susanne Post und Friedhelm Padberg

Entsprechend den vorangegangenen Beiträgen zu Schülerfehlern bei der schriftlichen Subtraktion und Multiplikation basiert auch diese Arbeit auf einem umfangreichen Literaturstudium, insbesondere aber auf der Auswertung der von uns im Juni 1984 durchgeführten Untersuchungen zu Fehlern bei der schriftlichen Division. Hierbei ist zu unterscheiden zwischen einem Test, der vorwiegend Aufgaben mit einstelligem Divisor beinhaltete (197 Schüler aus 11 Klassen des 4. Schuljahres aus 6 verschiedenen Grundschulen) und einem weiteren Test, der nur Aufgaben mit zweistelligem

Divisor enthielt (296 Schüler aus 11 Klassen des 5. Schuljahres aus 5 verschiedenen Realschulen).

Die vorliegende Arbeit beginnen wir mit einigen Bemerkungen zum Komplexitätsgrad des Divisionsalgorithmus (Punkt 1.). Anschließend erläutern wir Ergebnisse bislang durchgeführter Untersuchungen zu Schülerfehlern bei der schriftlichen Division (Punkt 2.). Im letzten Teil unserer Ausführungen gehen wir auf die Ergebnisse und Schlußfolgerungen aus unseren eigenen Studien ausführlicher ein (Punkt 3.).

1

Einige Bemerkungen zum Komplexitätsgrad des Divisionsalgorithmus

Zurecht wird das Verfahren der schriftlichen Division von vielen als das schwierigste Thema aus dem Bereich der Grundschulmathematik angesehen. Da dieser Kalkül im Vergleich zu den drei anderen schriftlichen Rechenverfahren das Rechnen nicht allein auf Grundaufgaben reduziert, sondern darüber hinaus eine Vielfalt mathematischer Vorerfah-

rungen und auch eine gewisse Abstraktionsfähigkeit voraussetzt, ist seine übliche Einordnung an das Ende der Grundschulzeit verständlich und berechtigt. Um die Komplexität des in Deutschland verwendeten Normalverfahrens zu verdeutlichen, stellen wir die einzelnen Verfahrensschritte in einer Ablaufskizze dar:

Inge Bathelt, Susanne Post und Friedhelm Padberg
 Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Division natürlicher Zahlen

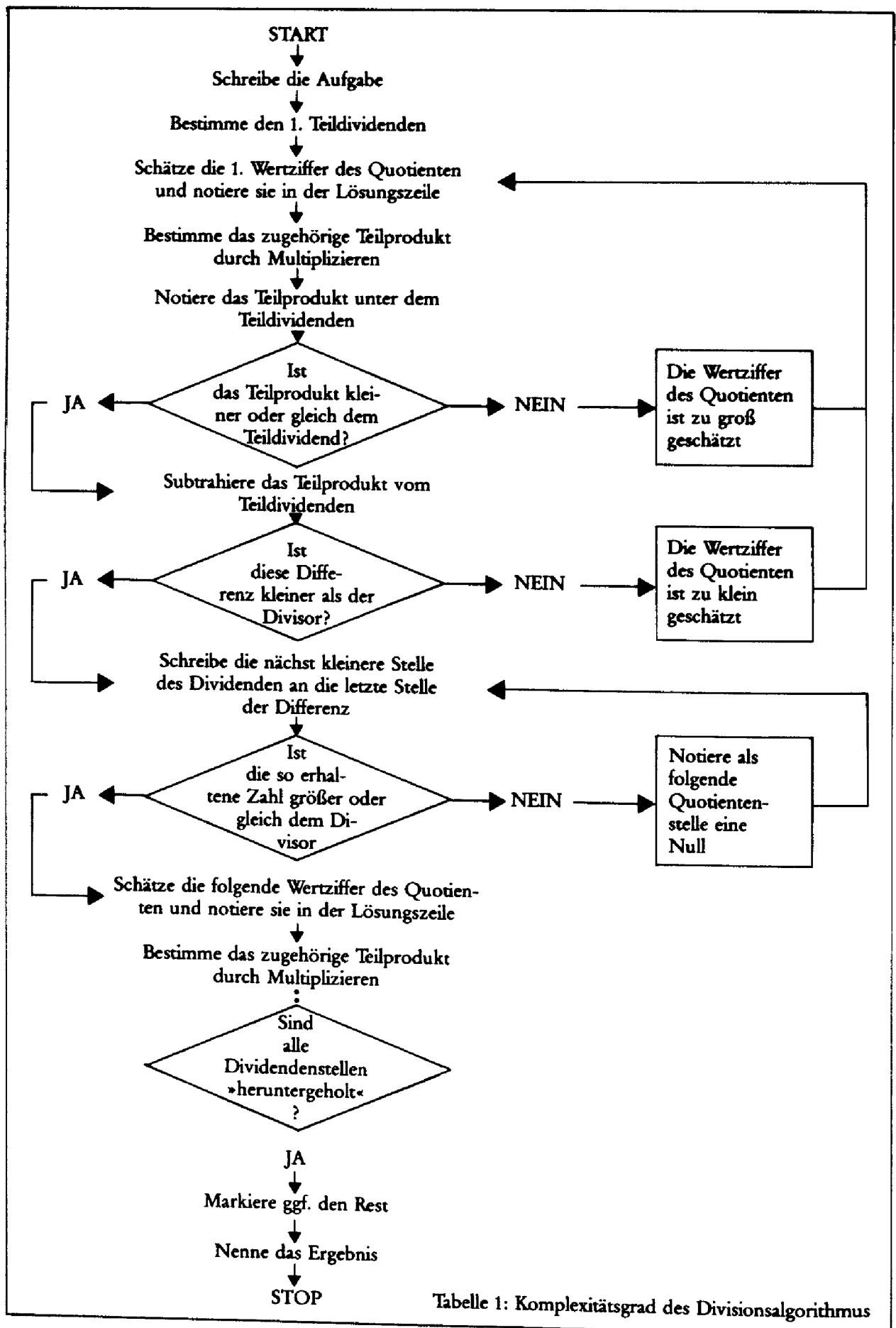


Tabelle 1: Komplexitätsgrad des Divisionsalgorithmus

Tabelle 1: Komplexitätsgrad des Divisionsalgorithmus

Die Tabelle 1 verdeutlicht klar, daß die Schüler für eine Beherrschung des Divisionskalküls neben einem guten, inhaltlichen Verständnis dieses Rechenverfahrens (einschließlich einer gründlichen Einsicht in das dezimale Stellenwertsystem) viele weitere Zwischenrechnungen beherrschen müssen. Damit diese Rechnungen während der Lösung von Aufgaben auch *nebensächlich* bleiben, muß der einzelne

Schüler möglichst schnell und sicher

- die Wertziffer des Quotienten abschätzen,
- die Teilprodukte durch Multiplikation ermitteln und
- schriftlich subtrahieren können.

– Zur Fehlerverhütung und Ergebniskontrolle wird auch der Überschlag mit großen Zahlen und die schriftliche Multiplikation als Probe gefordert.

2

Ergebnisse bislang durchgeführter Untersuchungen

Wir beginnen mit der Darstellung angloamerikanischer Untersuchungen. Bei der Bewertung dieser Arbeiten ist allerdings zu beachten, daß es dort deutliche Unterschiede zu den deutschen Verhältnissen gibt (anderer Divisionskalkül, frühere Behandlung, nämlich schon im 3. Schuljahr u. a.), so daß die Ergebnisse nicht ohne weiteres übertragen werden können und dürfen.

R. L. Whitaker und C. L. Williams (1937) berichten von einer sehr gründlich konzipierten Untersuchung, die sie u. a. bei rund 100 Viertklässlern durchgeführt haben. Hervorzuhebende Ergebnisse sind hier, daß im Durchschnitt 82 % der Fehllösungen auf Kombinationen von Fehlern beruhen. Der Anteil der Subtraktionsfehler beträgt 25 % und der der Multiplikationsfehler 9 %. Die größte Schwierigkeit bei den Schülern aller Klassenstufen zeigte sich im Umgang mit der Null. Durchschnittlich 28 % aller Fehler waren hierauf zurückzuführen (in den beiden 4. Klassen betrug die Werte 24 % und 16 %).

Die Autoren betonen, daß aber auch eine Vielzahl der Fehler letztlich auf Flüchtigkeit, mangelnder Übung oder dem Bestreben der Schüler nach einer Minimierung ihres Arbeitsaufwandes beruhen.

Insgesamt schnitten die 4. Klassen im Vergleich zu den Schülern der höheren Klassen gut ab: Von den 10 untersuchten Klassen belegten sie die Rangplätze zwei und vier, und dies obwohl in allen untersuchten Klassenstufen dieselben Aufgaben benutzt wurden. Diese

Tatsache unterstreicht die Hypothese, daß die Schwierigkeiten mit dem Divisionskalkül im Laufe der Schulzeit nicht abnehmen.

L. S. Cox referiert aus einer 1939 durchgeführten Untersuchung von F. E. Grossnickle in Klassen des 5. Schuljahres, daß bei Aufgaben mit zweistelligem Divisor allein 17 verschiedene Fehlermuster in Verbindung mit der Null entdeckt wurden. Die meisten Fehler konnten auf eine falsche Schätzung und auf unkorrekte Multiplikationen zurückgeführt werden.

Die Untersuchung von G. H. Roberts (1968) läßt darauf schließen, daß doppelt so viele Fehler auf einem fehlerhaften Algorithmus (36 %) beruhen wie auf offensichtlichen Rechenfehlern (18 %).

L. S. Cox selbst untersuchte Schülerarbeiten nach systematischen Fehlern, wobei sie im Bereich der schriftlichen Division 53 verschiedene systematisch auftretende Fehlermuster unterscheiden konnte. In den Klassen des 4. Schuljahres waren 7 % aller Divisionsfehler *systematische* Fehler. Ihre Ergebnisse lassen auch die Schwierigkeiten der Schüler mit der Null erkennen: Bei Aufgaben, die im Quotienten eine Null verlangen, beruhen allein 72 % der systematischen Fehllösungen auf dem Fehlen dieser Ziffer.

Darüber hinaus konnte sie den Nachweis erbringen, daß systematische Fehler keinesfalls vorübergehender Natur sind: 23 % der Schüler machten nach einem Jahr noch immer systematische Fehler. ($\frac{3}{5}$ von ihnen denselben, $\frac{2}{5}$ einen neuen).

R. A. Laing und R. A. Meyer (1982) haben bei der Auswertung von schriftlich gelösten Divisionsaufgaben feststellen können, daß das Hauptproblem der Schüler nicht auf mangelnden Vorkenntnissen bei der Subtraktion und Multiplikation beruht.

Im Gegensatz zu den USA gibt es in der BR Deutschland kaum empirische Untersuchungen, die sich mit der schriftlichen Division beschäftigen.

Die 1971 publizierte Untersuchung von A. Mitschka über Rechenleistungen der Schüler zu Beginn der Hauptschule umfaßt insgesamt nur 4 Aufgaben zur schriftlichen Division, dar-

unter sogar nur 1 Aufgabe mit zweistelligem Divisor.

Den hohen Schwierigkeitsgrad des Divisionsverfahrens für viele Schüler belegen u. a. auch die Befunde von H.-D. Gerster (1982). So lösten die 230 von ihm untersuchten Schüler des 5. Schuljahres nur 53 % der vorgelegten 6 Divisionsaufgaben mit einziffrigem Divisor richtig, die 221 von ihm getesteten Schüler des 6. Schuljahres lösten sogar nur 39 % der ihnen vorgelegten 6 Divisionsaufgaben mit zweiziffrigem Divisor korrekt (und dies ohne die Berücksichtigung fehlerhafter Schreibweisen bei der Division mit Rest als Fehler!).

3

Ergebnisse und Schlußfolgerungen aus unseren Untersuchungen

Wie einleitend schon kurz erwähnt, ist bei den folgenden Ausführungen zwischen zwei unabhängigen Tests zu differenzieren:

Der eine Test wurde an 6 verschiedenen Grundschulen in 11 Klassen des 4. Schuljahres mit insgesamt 197 Schülern durchgeführt. Dieser Test umfaßt 17 Aufgaben mit einstelligem Divisor und 5 mit zweistelligem. Letzte bleiben im folgenden jedoch unberücksichtigt.

Der andere Test wurde an 5 verschiedenen Realschulen in 11 Klassen des 5. Schuljahrs von 296 Schülern bearbeitet und beinhaltet 18 Divisionsaufgaben mit ausschließlich zweistelligem Divisor.

3.1

Zum Aufbau der beiden Tests

Die ersten Anregungen zum Aufbau der Tests erhielten wir durch die diagnostischen Tests zur schriftlichen Division von H.-D. Gerster sowie aus der Analyse von Schulbüchern und verschiedenen Mathematikdidaktiken. Auf dieser Grundlage erstellten wir folgende Liste von Schwierigkeitsmerkmalen:

- Aufgaben mit einziffrigem Divisor:
- Größe des Divisors (kleiner oder gleich 5 bzw. größer 5)
- Größe der Quotientenziffern (kleiner oder gleich 5 bzw. größer 5)

- Anzahl der Überträge pro Aufgabe
 - Anzahl der Zehnerüberschreitungen beim Bestimmen der Teildifferenzen
 - Relation der Anzahl der Dividendenstellen zur Anzahl der Quotientenstellen (gleiche Anzahl bzw. größer)
 - Wiederholtes Herunterholen derselben Ziffer oder der Null
 - Null im Quotienten (mittig oder am Ende) als Folge einer »aufgegangenen« Teildivision sowie des anschließenden »Herunterholens« einer Ziffer, die kleiner als der Divisor ist
 - Wiederholt gleicher Rechenschritt
 - Mit bzw. ohne Rest
 - Aufgaben mit zweiziffrigem Divisor: Neben den bei den einziffrigen Divisoren genannten Schwierigkeitsdimensionen spielt hier nur zusätzlich die Größe des Divisors eine wichtige Rolle.
 - Der Wert des Divisors liegt zwischen 10 und 20
 - Der Divisor ist eine reine Zehnerzahl:
 - Der Divisor ist eine gemischte Zehnerzahl
 - zehnernah
 - nicht zehnernah und kleiner als 50
 - nicht zehnernah und größer als 50
- Das prinzipielle Problem beim Erstellen der Tests liegt jedoch darin, daß wir aus Grün-

Inge Bathelt, Susanne Post und Friedhelm Padberg
Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Division natürlicher Zahlen

den des Testumfangs nicht von jedem Aufgabentyp mehrere gleichschwere Aufgaben in den Test aufnehmen konnten. So haben wir versucht, Aufgaben zusammenzustellen, die fehlerauslösende Schwierigkeitsmerkmale noch genügend oft beinhalteten, um zufällige von systematischen Fehlern unterscheiden zu können.

Die folgenden beiden Tabellen vermitteln einen ersten groben Überblick über die in den beiden Tests enthaltenen Schwierigkeitsmerkmale. Ein vollständiger Überblick über sämtliche in den Tests benutzten Aufgaben befindet sich am Ende dieser Arbeit.

	Der Quotient besitzt gleich viele Stellen wie der Dividend	Der Quotient besitzt weniger Stellen als der Dividend
keine Null	$9548 : 7 = 1364$ $\begin{array}{r} 7 \\ \underline{25} \\ 21 \\ \underline{44} \\ 42 \\ \underline{28} \\ 28 \\ \underline{0} \end{array}$	$34884 : 4 = 8721$ $\begin{array}{r} 32 \\ \underline{28} \\ 28 \\ \underline{08} \\ 8 \\ \underline{04} \\ 4 \\ \underline{0} \end{array}$
Null im Dividend	$6030 : 3 = 2010$ $\begin{array}{r} 6 \\ \underline{00} \\ 0 \\ \underline{03} \\ 3 \\ \underline{00} \end{array}$	$63049 : 7 = 9007$ $\begin{array}{r} 63 \\ \underline{00} \\ 0 \\ \underline{4} \\ 0 \\ \underline{49} \\ 49 \\ \underline{0} \end{array}$
Null inmitten des Quotienten	$9408 : 9 = 1045 \text{ R } 3$ $\begin{array}{r} 9 \\ \underline{04} \\ 0 \\ \underline{40} \\ 36 \\ \underline{48} \\ 45 \\ \underline{3} \end{array}$	$4035 : 5 = 807$ $\begin{array}{r} 40 \\ \underline{03} \\ 0 \\ \underline{35} \\ 35 \\ \underline{0} \end{array}$
Null am Ende des Quotienten	$5722 : 4 = 1430 \text{ R } 2$ $\begin{array}{r} 4 \\ \underline{17} \\ 16 \\ \underline{12} \\ 12 \\ \underline{02} \\ 0 \\ \underline{2} \end{array}$	$5225 : 6 = 870 \text{ R } 5$ $\begin{array}{r} 48 \\ \underline{42} \\ 42 \\ \underline{05} \\ 0 \\ \underline{5} \end{array}$

Tabelle 2a: Grobe Übersicht über die im Divisionstest (Aufgaben mit einstelligem Divisor) enthaltenen Schwierigkeitsmerkmale

Inge Bathelt, Susanne Post und Friedhelm Padberg
 Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Division natürlicher Zahlen

	1. Teildividend ist zweistellig	1. Teildividend ist dreistellig
keine Null	$439299 : 19 = 23121$ $\begin{array}{r} 38 \\ \underline{59} \\ 57 \\ \underline{22} \\ 19 \\ \underline{39} \\ 38 \\ \underline{19} \\ 19 \\ \underline{0} \end{array}$	
Null im im Dividend	$65960 : 18 = 3664 \text{ R } 8$ $\begin{array}{r} 54 \\ \underline{119} \\ 108 \\ \underline{116} \\ 108 \\ \underline{80} \\ 72 \\ \underline{8} \end{array}$	$1249600 : 53 = 23577 \text{ R } 19$ $\begin{array}{r} 106 \\ \underline{189} \\ 159 \\ \underline{306} \\ 265 \\ \underline{410} \\ 371 \\ \underline{390} \\ 371 \\ \underline{19} \end{array}$
Null inmitten des Quotienten	$810011 : 67 = 12089 \text{ R } 48$ $\begin{array}{r} 67 \\ \underline{140} \\ 134 \\ \underline{601} \\ 536 \\ \underline{651} \\ 603 \\ \underline{48} \end{array}$	$231246 : 33 = 7007 \text{ R } 15$ $\begin{array}{r} 231 \\ \underline{246} \\ 231 \\ \underline{15} \end{array}$
Null am Ende des Quotienten	$55004 : 44 = 1250 \text{ R } 4$ $\begin{array}{r} 44 \\ \underline{110} \\ 88 \\ \underline{220} \\ 220 \\ \underline{4} \end{array}$	$2817180 : 47 = 59940$ $\begin{array}{r} 235 \\ \underline{467} \\ 423 \\ \underline{441} \\ 423 \\ \underline{188} \\ 188 \\ \underline{00} \end{array}$

Tabelle 2b: Grobe Übersicht über die im Divisionstest (Aufgaben mit zweistelligem Divisor) enthaltenen Schwierigkeitsmerkmale

3.2

Zur Schwierigkeitshierarchie
 der Testaufgaben

Schülern die größten Schwierigkeiten bereiten, die als letzte Quotientenziffer eine Null haben und bei denen gleichzeitig noch ein Rest auftritt, wie die folgende Tabelle 3a deutlich belegt.

Die Ergebnisse des Tests für einziffrige Divisoren ergeben eindeutig, daß die Aufgaben den

Aufgabe	Anzahl der Schüler mit fehlerhafter Lösung (in %)	besondere Schwierigkeitsmerkmale der Aufgabe
44405 : 6	25	– mit Rest; die vorletzte und die letzte Quotientenstelle ist eine Null
7854 : 5	25	– mit Rest; die letzte Quotientenstelle ist eine Null
5225 : 6	19	– mit Rest; die letzte Quotientenstelle ist eine Null
9408 : 9	17	– mit Rest; Null mitten im Quotienten, bedingt durch eine Teildivision, die »aufgeht«, sowie durch das anschließende »Herunterholen« einer Ziffer, die kleiner als der Divisor ist.
63049 : 7	15	– zwei Nullen im Quotienten, bedingt durch eine Teildivision, die aufgeht, und durch das anschließende »Herunterholen« zunächst einer Null und dann einer Ziffer, die kleiner als der Divisor ist.

Tabelle 3a: Die schwierigsten Aufgaben aus dem Test mit einstelligen Divisoren

Tabelle 3b enthält die Aufgaben mit zweiziffrigen Divisoren, die den Schülern die meisten Schwierigkeiten bereiteten. Wir haben aller-

dings nur die ersten 14 (von insgesamt 18) Aufgaben berücksichtigt, da nur diese von über der Hälfte der Schüler bearbeitet wurden.

Aufgabe	Anteil an der Gesamtfehlerzahl (in %)	besondere Schwierigkeitsmerkmale der Aufgaben
65960 : 18	10	– – –
245895 : 39	9	– Null mitten im Quotienten
266789 : 36	9	– mit Rest; die letzte Quotientenstelle ist eine Null
55004 : 44	9	– mit Rest; die letzte Quotientenstelle ist eine Null, zwei Nullen nacheinander im Dividenden
2188698 : 31	8	– mit Rest; Nullen mitten im Quotienten, bedingt u. a. durch eine Teildivision, die aufgeht, und durch das anschließende »Herunterholen« einer Ziffer, die kleiner als der Divisor ist
231246 : 33	7	– zwei Nullen im Quotienten, bedingt durch eine Teildivision, die aufgeht, und durch das anschließende erforderliche mehrfache »Herunterholen« von Ziffern, bis wir eine Zahl erhalten, die größer als der Divisor ist.

Tabelle 3b: Die schwierigsten Aufgaben aus dem Test mit zweistelligen Divisoren

Es ist überraschend, daß die nach der Tabelle 3b schwierigste Aufgabe bei der Testkonstruktion als leicht eingestuft wurde. Untersucht man die Fehler dieser Aufgabe genauer, so stellt man fest, daß gerade die Rechenfehler hier zahlreicher auftreten als in allen anderen Aufgaben, obwohl es sich in den Zwischenschritten um kleine, leicht überschaubare Werte handelt.

Sieht man von dieser Ausnahme ab, so wird auch hier deutlich, daß der Umgang mit Nullen im Ergebnis den Schülern erhöhte Schwierigkeiten bereitet.

3.3

Die häufigsten Fehler

In den Schülerlösungen konnten wir 38 (Klasse 4) bzw. 40 (Klasse 5) verschiedene Fehlermuster mit sehr unterschiedlichen Häufigkeiten identifizieren. Folgende Fehler zeigten sich dabei am häufigsten:

Fehlermuster	Anteil an der Gesamtfehlerzahl (in %)
– Endnull fehlt	15
– Fehler in der Staffel, jedoch ohne Einfluß auf das Ergebnis	10
– Fehlerhaft subtrahiert	10
– Zwischennull fehlt	9

Tabelle 4a: Die häufigsten Fehlermuster im Test mit einstelligen Divisoren

Fehlermuster	Anteil an der Gesamtfehlerzahl (in %)
– Subtraktionsfehler	14
– Zwischennullfehler	12
– Multiplikationsfehler	10
– Endnull fehlt	7
– Fehlen des letzten Divisions-schrittes, da der letzte Teildividend sofort und nur als Rest identifiziert wird	6

Tabelle 4b: Die häufigsten Fehlermuster im Test mit zweistelligen Divisoren

Hierbei sind in der Zeile »Subtraktionsfehler« sämtliche Fehler bezüglich dieser Rechenart enthalten, wohingegen bei der Multiplikation nur die Fehler aufgeführt sind, bei denen das Teilprodukt trotz eines richtigen Quotienten falsch ist. Während bei Aufgaben mit zweiziffrigem Divisor der Anteil dieser Multiplikationsfehler an der Gesamtfehlerzahl bei 10 % liegt, ist der Anteil bei Aufgaben mit einziffrigem Divisor – erwartungsgemäß – mit rund 4 % Anteil deutlich geringer.

Zwischennullfehler treten besonders leicht bei folgenden Konstellationen auf:

- Die vorhergehende Teildivision geht auf und die »heruntergeholte« Ziffer ist kleiner als der Divisor.
- Die vorhergehende Teildivision liefert eine Null als Quotientenziffer und die »heruntergeholte« Ziffer ist kleiner als der Divisor (2 Nullen hintereinander).
- Die vorhergehende Teildivision läßt einen Rest, der kleiner als der Divisor ist, und die »herunterzuholende« Ziffer Null wird einfach ignoriert.

Endnullfehler basieren im wesentlichen auf folgenden Ursachen:

- Der letzte Divisionsschritt wird nicht durchgeführt, da der letzte Teildividend sofort und nur als Rest notiert wird (Hauptursache).
- Der Dividend besitzt als letzte Stelle eine Null, diese wird nicht heruntergeholt.

Neben den in den Tabellen 4a und 4b erwähnten Fehlermustern spielen noch folgende Fehler eine größere Rolle:

- Mehrere Ziffern werden beim Kalkül fälschlich gleichzeitig heruntergeholt (4. Klasse/einziffriger Divisor: 7 %, 5. Klasse/zweiziffriger Divisor: 1 % aller Fehler).
- In derselben Stellenwertspalte wird fälschlich mehrmals dividiert, und zwar bedingt durch folgende Situationen:
 - Die berechnete Teildifferenz ist größer oder gleich dem Divisor, daher erfolgt eine erneute Division innerhalb dieser Spalte (4. Klasse: 2 %, 5. Klasse 3 %).
 - Die berechnete Teildifferenz ist größer oder gleich dem Divisor, dennoch wird rein formal die nächste Ziffer »heruntergeholt« mit dem Effekt, daß der so berechnete Teilquo-

tient zweiziffrig wird (4. Klasse: 1 %, 5. Klasse: 2 %).

- Die berechnete Teildifferenz ist kleiner als der Divisor, dennoch wird diese Differenz nochmals durch den Divisor dividiert und liefert so eine zusätzliche Null im Quotienten (4. Klasse: 1 %, 5. Klasse: 4 %).

3.4

Die wichtigsten systematischen Fehler

Die Kenntnis systematischer Schülerfehler ist für Therapiemaßnahmen besonders wichtig. Hierbei werteten wir in dieser Untersuchung einen Fehler als systematisch, wenn er im Rahmen unseres Tests von einem einzelnen Schüler mindestens dreimal gemacht wurde. In diesem Sinn unterliefen 22 % aller Schüler der 4. Klassen und 25 % aller Schüler der 5. Klassen

mindestens ein systematischer Fehler. Mehr als zwei verschiedene systematische Fehler kamen äußerst selten vor. Allerdings ist der Anteil der Schüler, die systematische Fehler begehen in den einzelnen Klassen stark unterschiedlich, und zwar schwankt der Anteil bei den Klassen des 4. Schuljahres zwischen 6 und 50 %, bei den Klassen des 5. Schuljahres zwischen 10 und 44 %.

Rund die Hälfte der von uns identifizierten 38 bzw. 40 verschiedenen Fehlermuster wurde auch systematisch gemacht. Zwischen den im vorigen Abschnitt dargestellten häufigsten Schülerfehlern und den häufiger gemachten systematischen Fehlern besteht ein enger Zusammenhang, wie man der folgenden Tabelle entnehmen kann. In dieser Tabelle werden Fehler im Zusammenhang mit der Subtraktion und Multiplikation nicht berücksichtigt.

Fehlermuster	Anteil der Schüler mit dem jeweiligen systematischen Fehler (in %)	
	4. Klassen / einziffriger Divisor	5. Klassen / zweiziffriger Divisor
– Endnull fehlt	9	7
– Fehlen des letzten Divisionsschrittes, da der letzte Teildividend sofort und nur als Rest identifiziert wird (wichtige Ursache für Endnull Fehler)	4	5
– Zwischennullfehler, bedingt durch:		
– die vorhergehende Teildivision liefert eine Null und die »herunterzuholende« Ziffer ist kleiner als der Divisor (2 Nullen hintereinander)	3	4
– die vorhergehende Teildivision geht auf und die »heruntergeholte« Ziffer ist kleiner als der Divisor	5	2
– die vorhergehende Teildivision läßt einen Rest, der kleiner als der Divisor ist und die »herunterzuholende« Ziffer Null wird einfach ignoriert	1	5
– mehrere Ziffern werden gleichzeitig heruntergeholt	8	0
– mehrmalige Division in derselben Stellenwertspalte, obwohl die Teildifferenz kleiner als der Divisor ist (Effekt: zusätzliche Null im Quotienten)	1	3

Tabelle 5: Die häufigsten systematischen Fehler

3.5

Zur Restschreibweise

Die traditionelle Restschreibweise (Beispiel: $15 : 7 = 2 \text{ Rest } 1$ oder kürzer $15 : 7 = 2 \text{ R } 1$) wurde bekanntlich meist Anfang der 70er Jahre mit dem Argument mathematischer Fehlerhaftigkeit aus den Grundschulen verbannt und zum Beispiel in Nordrhein-Westfalen durch die multiplikative Zerlegungsschreibweise (Beispiel: $15 = 7 \cdot 2 + 1$) ersetzt. In den 80er Jahren neu konzipierten Richtlinien haben diese multiplikative Zerlegungsweise meist wieder aufgegeben, so z. B. in Nordrhein-Westfalen die erst kürzlich (mit dem Schuljahr 1985/6) in Kraft getretenen neuen Grundschulrichtlinien, die folgende Restschreibweise propagieren: $15 : 7 = 2 + 1 : 7$. Hierbei erfolgt die Abkehr von der multiplikativen Zerlegungsschreibweise zu Recht, wie auch unsere Befunde belegen.

In den von uns untersuchten Grundschulklassen hatten die Lehrer nämlich noch weit überwiegend – in 8 von 11 Fällen – entsprechend dem benutzten Schulbuch und den zum Zeitpunkt der Testdurchführung noch gültigen Richtlinien die multiplikative Zerlegungsschreibweise eingeführt.

In unserem Test bei Aufgaben zur Division mit Rest benutzten 75 % der Grundschüler eine korrekte Notation, 7 % führten den Rest nur am Ende des Staffelschemas, aber nicht mehr extra in der Lösungszeile auf, während 18 % eine fehlerhafte Schreibweise bei mindestens 3 Aufgaben ihres Tests verwendeten. Darüber hinaus benutzten deutlich mehr Schüler mal vereinzelt bei einer Aufgabe eine fehlerhafte Schreibweise. Hierbei erwies sich die Zerlegungsschreibweise als besonders fehleranfällig: 22 % dieser Schüler verwendeten eine fehlerhafte Schreibweise, und zwar in rund 90 % der Fälle die Schreibweise: $15 : 7 = 2 + 1$.

Die Untersuchung in den Realschulklassen des 5. Schuljahres zeigte ähnliche Ergebnisse. Obwohl einige Lehrer angaben, daß neben der traditionellen Restschreibweise die Zerlegungsschreibweise ihren Schülern geläufig sei, wurde diese Schreibweise nur von weniger als 1 % der untersuchten Schüler richtig benutzt. Auch hier konnten wir eine Vielzahl fehlerhafter Mischformen beobachten, wobei auch hier die Schreibweise $15 : 7 = 2 + 1$ absoluter Spitzenreiter war.

4

Abschließende Bemerkungen

Nach unseren Erfahrungen, die wir u. a. im Zusammenhang mit unserer Untersuchung gewonnen haben, sollten folgende Gesichtspunkte bei der Behandlung der schriftlichen Division besonders berücksichtigt werden:

Die Vielzahl der von uns beobachteten Stellenwertfehler – also der Fehler, die eine Veränderung in der Anzahl der Ziffern im Quotienten bewirken – macht deutlich, daß ein Großteil der untersuchten Schüler keine wirklich fundierten Kenntnisse über das von uns benutzte *dezimale Stellenwertsystem* besitzt bzw. die eventuell vorhandenen Kenntnisse nicht anwendet oder nicht anwenden kann. Dieses dezimale Stellenwertsystem ist aber die Grundlage allen schriftlichen Rechnens. Fehlt bereits diese Basis, so kann ein Rechenverfahren nicht einsichtig vermittelt werden. Daher

ist eine sehr anschauliche Erarbeitung des dezimalen Stellenwertsystems unbedingt notwendig. Hierbei sollte gerade auch die Rolle und Funktion der Null besonders betont werden.

Die *Verbindung* zwischen dem formalen *Kalkül* und den zugrundeliegenden inhaltlichen *Begründungen* der einzelnen Teilschritte muß bei den Schülern zunächst sehr anschaulich hergestellt und insbesondere auch im späteren Verlauf durch das Einstreuen entsprechender Aufgaben bzw. Fragestellungen erhalten bleiben. Das rein formale Abarbeiten eines Kalküls ohne die Möglichkeit des Rückgriffs auf inhaltliche Begründungen leistet nämlich (systematischen) Fehlern Vorschub und verhindert eine Entdeckung und Bekämpfung dieser Fehler durch den einzelnen Schüler.

Daher sollte für schwächere Schüler auch später noch die Möglichkeit offenbleiben, bei der Lösung von Divisionsaufgaben beispielsweise die Stellenwerttabelle zu verwenden. Beim Vorrechnen von Aufgaben sollte ferner während der Einführungsphase im 4. Schuljahr bewußt auf eine exakte und ausführliche sprachliche Formulierung geachtet werden. Hilfreich für ein vertieftes Verständnis des Divisionskalküls sind auch sogenannte »Klecks«-Aufgaben, in denen einige Ziffern, die durch Kleckse unlesbar gemacht sind, bestimmt werden müssen.

Bei der Ableitung und späteren Einübung des Divisionskalküls sollten die Bereiche, die stark fehleranfällig sind, besonders sorgfältig behandelt werden. Entsprechend unseren Befunden sollte daher gezielt auf

- die Rolle der Null inmitten des Quotienten,
- die Rolle der Null am Ende des Quotienten (insbesondere in Verbindung mit einem auftretenden Rest),
- das Abschätzen der Quotientenziffern und
- das genaue Einhalten der einzelnen Verfahrensschritte eingegangen werden, wobei auch die verschiedenen Formen der einzelnen Fehlermuster in der Auswahl der Aufgaben berücksichtigt werden sollten.

Hilfreich sind auch fehlerhaft gelöste Aufgaben, in denen die Schüler nach den Fehlern suchen und die Ursache für diese Fehler finden sollen. Ferner ist es sinnvoll, auf die verkürzte Schreibweise, bei der die Zwischenschritte, die eine Null im Quotienten liefern, nicht mehr mitgeschrieben werden, bei der Einführung so lange wie möglich zu verzichten. Das Fehlen einer Null im Ergebnis ergibt sich nämlich bei einziffrigen Divisoren häufiger als Folge des Fehlermusters »mehrere Stellen gleichzeitig heruntergeholt«. Den Schülern sollte daher zumindest klar gemacht werden, daß hier eine potentielle Fehlerquelle liegt.

Die *Überschlagsrechnung* sollte bei der schriftlichen Division als Hilfe und zur Selbstkontrolle in großem Umfang verwandt werden. Ein gezieltes Einüben und Anwenden des Überschlags ist hierbei besonders wichtig, da das planmäßige Runden und Überschlagen in diesem Fall besonders schwierig ist. Viele Stellenwertfehler können durch einen sinnvollen

Überschlag rechtzeitig aufgedeckt werden, so insbesondere auch die häufigen Fehler mit fehlenden Zwischen- oder Endnullen im Quotienten.

Unsere Untersuchungen bestätigen insgesamt die Effektivität der Fehleranalyse für die mathematische Unterrichtspraxis. Hierbei weisen die deutlichen Unterschiede zwischen den einzelnen Klassen eindrucksvoll auf die Notwendigkeit hin, die erforderlichen Maßnahmen gezielt auf die einzelnen Klassen und Schüler abzustimmen. Hierfür sind diagnostische Tests und Befunde über typische fehlerhafte Schülerstrategien sowie über ihre Ursachen unentbehrliche Voraussetzungen und Hilfen.

Übersicht über sämtliche Testaufgaben

Test für die 4. Grundschulklassen

	Gruppe A	Gruppe B
1)	6396 : 3	8628 : 2
2)	16884 : 4	12996 : 3
3)	34884 : 4	17886 : 2
4)	9548 : 7	9996 : 7
5)	44405 : 6	59206 : 8
6)	8002 : 2	80004 : 4
7)	4035 : 5	6432 : 8
8)	27846 : 7	87867 : 9
9)	54420 : 6	45350 : 5
10)	62811 : 9	34111 : 7
11)	6030 : 3	9060 : 3
12)	54224 : 8	23334 : 6
13)	63049 : 7	63054 : 9
14)	7854 : 5	5722 : 4
15)	9408 : 9	6204 : 6
16)	5225 : 6	7658 : 9
17)	4786 : 8	5218 : 6
18)	12030 : 30	20080 : 40
19)	257555 : 40	247915 : 30
20)	84112 : 14	69112 : 16
21)	7600 : 31	9600 : 41
22)	190827 : 47	231389 : 46

Inge Bathelt, Susanne Post und Friedhelm Padberg
 Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Division natürlicher Zahlen

Test für die 5. Realschulklassen

	Gruppe A	Gruppe B
1)	439299 : 19	615699 : 29
2)	9130 : 22	1740 : 12
3)	65960 : 18	74620 : 28
4)	245895 : 39	196412 : 39
5)	62424 : 12	93654 : 18
6)	2188698 : 31	1664889 : 41
7)	84602 : 70	84409 : 60
8)	90060 : 30	60040 : 20
9)	231246 : 33	231278 : 77
10)	109650 : 15	180250 : 25
11)	266789 : 36	274189 : 37
12)	800200 : 20	900300 : 30
13)	55004 : 44	67001 : 54
14)	1249600 : 53	1454100 : 43
15)	180090 : 36	170050 : 34
16)	2817180 : 47	2547450 : 37
17)	760210 : 84	607170 : 86
18)	810011 : 67	1200489 : 57

Literatur

Cox, L. S.: Systematic Errors in the Four Vertical Algorithms in Normal and Handicapped Populations. In: Journal Res. Math. Ed., 4, 1975, S. 202-220

Gerster, H.-D.: Schülerfehler bei den schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie von Rechenfehlern. Freiburg 1982

Laing, R. A.; Meyer, R. A.: Transitional Division Algorithms. In: Arithmetic Teacher, Mai 1982, S. 10-12

Mitschka, A.: Schülerleistungen im Rechnen zu Beginn der Hauptschule. Hannover 1971

Roberts, G. H.: The failure strategies of third grade arithmetic pupils. In: Arithmetic Teacher 1968, S. 442-446

Padberg, F.: Didaktik der Arithmetik. Mannheim 1986

Whitaker, R. L.; Williams, C. L.: Diagnosis of Arithmetic Difficulties. In: Elementary School Journal 1937, S. 592-600

Anschriften:

Inge Bathelt
 Zum Sundern 50
 4740 Oelde 1

Susanne Post
 Am Fischhaus 12
 4835 Rietberg 1

Prof. Dr. Friedhelm Padberg
 Universität Bielefeld
 Fakultät für Mathematik
 Universitätsstr.
 4800 Bielefeld 1