Über typische Schülerschwierigkeiten in der Bruchrechnung – Bestandsaufnahme und Konsequenzen

von Friedhelm Padberg

1 Einleitende Bemerkungen

Die Bruchrechnung bereitet vielen Schülern bei ihrer systematischen Behandlung in der 6. Klasse, aber auch noch in höheren Klassen große Schwierigkeiten. Um zu einer Vergrößerung des Unterrichtserfolges zu gelangen, können idealtypisch zwei Wege beschritten werden: einmal eine sorgfältige, vergleichende Analyse verschiedener Einführungswege bezüglich des Bruchzahlbegriffs wie insbesondere auch bezüglich der Rechenoperationen aufgrund theoretischer Überlegungen, um so unter Berücksichtigung gegebener Faktoren zu einem möglichst effizienten Lehrgang zu gelangen (für nähere Details vergleiche man Padberg 1978 und Padberg 1982), oder aber eine detaillierte empirische Untersuchung der typischen Schülerschwierigkeiten in der Bruchrechnung, um so auf der Grundlage einer genauen und möglichst umfassenden Kenntnis dieser Problembereiche wirksame Maßnahmen zu ergreifen und entsprechende Konsequenzen bei der Gestaltung der Bruchrechenlehrgänge zu ziehen. Im folgenden wollen wir an dieser Stelle den zweiten Weg beschreiten, also Daten über charakteristische Schülerfehler im Bereich der Bruchrechnung erheben, diese genauer analysieren und hieraus Folgerungen ziehen. Unter den verschiedenen methodischen Möglichkeiten zur Erhebung und Analyse von Schülerschwierigkeiten (Analyse schriftlicher Arbeiten, »lautes Denken« der Schüler bei der Aufgabenbearbeitung, Beobachtung der Schüler, diagnostisches Interview; für genauere Details vgl. man z. B. Radatz 1980) haben wir uns bewußt für eine Analyse schriftlicher Schülerarbeiten entschieden, weil nur bei dieser Methode mit vertretbarem Aufwand eine hinreichend breite Basis für Aussagen über Problembereiche (in der Bruchrechnung) sichergestellt werden kann, die für einen Großteil der Schüler – und nicht nur für u. U. ziemlich singuläre Einzelfälle – bedeutsam sind. Eine anschließende Ergänzung der gewonnenen Daten durch diagnostische Interviews ist sinnvoll und wünschenswert, konnte jedoch von uns in diesem Zusammenhang bislang nur in Einzelfällen und nicht in größerem Umfang durchgeführt werden.

2 Grundlagen und Charakteristika dieser Untersuchung

Nach einer Bestandsaufnahme vorliegender deutscher und insbesondere angloamerikanischer Fehleruntersuchungen zur Bruchrechnung haben wir zwei Voruntersuchungen mit jeweils rund 200 Schülern des 7. Schuljahres im Herbst 1979 und im Herbst 1981 in jeweils sieben Realschulklassen aus drei verschiedenen Schulen durchgeführt. Die auf dieser Grundlage fußende Hauptuntersuchung, auf die wir uns in dieser Arbeit beziehen, haben wir im

Herbst 1982 in 28 Realschulklassen (aus 8 verschiedenen Schulen) mit insgesamt 861 Schülern im Bielefelder Raum durchgeführt. Um bei der Testerhebung ein Abschreiben zu verhindern, aber auch um den Test im Umfang praktikabel (Dauer: 1 Unterrichtsstunde) und dennoch in der Aufgabenstruktur je Rechenoperation möglichst breit zu halten, haben wir 2 verschiedene Testbögen (Version A und B) entworfen. Hierbei testet jede Version mit jeweils gut 10 Aufgaben bei der Addition, Subtraktion und Multiplikation sowie knapp 20 Aufgaben bei der Division zwei vollständige Rechenoperationen (mit rein rechnerischen Aufgaben, mit Text/Bildaufgaben und mit Fragen zur Regelformulierung und z. T. zur Begründung) sowie mit entsprechenden zusätzlichen Aufgaben die Subtechniken des Kürzens, Erweiterns und Einrichtens bzw. Umwandelns ab. Wir faßten jeweils 2 bis 5 Aufgaben unterschiedlichen Typs je Rechenoperation (oder Subtechnik) zu einem Block zusammen und grenzten diesen sehr deutlich vom nächsten Block ab, um so Flüchtigkeitsfehler und insbesondere irrtümliche Operationsverwechslungen durch Einstelleffekte im Sinne Luchins (vgl. Weis) zu vermeiden. Die genaue methodische Vorgehensweise der Lehrer während des Bruchrechenkurses erfaßten wir durch eine sehr ausführliche standardisierte Befragung.

Unsere Untersuchung weist darüber hinaus die folgenden Charakteristika auf:

– Wir wählten die Klassen bewußt nach den benutzten Schulbüchern so aus, daß das in gut der Hälfte (16) der zu untersuchenden Klassen benutzte Schulbuch die Bruchrechnung im Sinne des Mischkonzepts darstellte (also unter Benutzung von Komponenten des Operatorkonzepts an geeigneten Stellen, insbesondere im Bereich des Kürzens, Multiplizierens und Dividierens; für nähere Details bzgl. des Mischkonzepts wie auch des weiter unten erwähnten Größenkonzepts vgl. Padberg 1978), während das in den übrigen Klassen (12) benutzte Schulbuch zwar auch vereinzelte Andeutungen des Operatorkonzepts enthielt, aber dennoch fast ausschließlich rein auf der Basis des Größenkonzepts vorging. Hierbei bestanden zwischen der effektiven Vorgehensweise der Lehrer in der Bruchrechnung und dem globalen Konzept des benutzten Schulbuches zwar gewisse Beziehungen, genauer ergab sich jedoch: Nur wenige Benutzer des Größenkonzept-Schulbuchs gingen im Unterricht nach dem Mischkonzept vor, während durchaus eine größere Zahl von Benutzern des Mischkonzept-Schulbuchs die Bruchrechnung im Sinne des Größenkonzepts behandelte. Somit gingen in unserer Stichprobe effektiv rund die Hälfte der Klassen nach dem Größenkonzept, rund die andere Hälfte nach dem Mischkonzept vor.

– Die Aufgaben zu den Rechenoperationen wählten wir in dieser Hauptuntersuchung – aufgrund von Befunden in einer der Voruntersuchungen – gezielt so aus, daß ein Kürzen oder Umwandeln nicht erforderlich war (bis auf bewußt eine Ausnahme je Rechenoperation). Das Wissen der Schüler über das Kürzen, Erweitern und Umwandeln/Einrichten testeten wir getrennt in eigenen Aufgaben ab. Diese bewußte Isolation der Schwierigkeitsfaktoren führt zu klareren Ergebnissen und Befunden über Problembereiche als die Untersuchung komplexerer Fälle, bei denen sich eine Reihe von Ursachenfaktoren überlagern. Wegen genauerer Hinweise, wie die Schwierigkeitsmerkmale Kürzen und Umwandeln die Lösungsquoten bei Additions- und Subtraktionsaufgaben beeinflussen, verweisen wir an dieser Stelle auf entsprechende Befunde von Lörcher.

– Um den Test praktikabel zu halten, verzichteten wir bewußt auf die Einbeziehung gemischter Zahlen, klärten jedoch in der standardisierten Lehrerbefragung genau ab, in welchem Umfang und wie die Lehrer die gemischten Zahlen bei den vier Rechenoperationen einsetzten. (Nach Beobachtungen von Lörcher liegt der Lösungsprozentsatz bei der Addition gemischter Zahlen bei den von ihm untersuchten Realschulklassen bei 90 %, bei der Subtraktion bei 80 % des Standes von vergleichbaren Aufgaben zur Addition bzw. Subtraktion von Brüchen.)

– Als Untersuchungszeitpunkt wählten wir den Beginn des 7. Schuljahres, kurz nach dem Ende der Sommerferien, um so zur systematischen Behandlung der Bruchrechnung einen Abstand von mindestens einigen Monaten (bis zu einem halben Jahr) sicherzustellen. Dadurch liegen unseren Befunden die aussagekräftigeren

Langzeit-Lerneffekte zugrunde.

– Der Test wurde von den Klassen unvorbereitet geschrieben, da unsere Vorgespräche mit den Schulleitern bewußt keine Hinweise auf die Bruchrechnung enthielten. (Dies ist beim Vergleich dieser Untersuchung mit anderen Untersuchungen wie auch mit einer unserer Voruntersuchungen zu beachten.) Wir testeten darüber hinaus alle ausgewählten Klassen einer Schule jeweils an einem Tag, wobei Effekte durch die Testabfolge innerhalb einer Schule nicht feststellbar waren.

In der folgenden Darstellung der Untersuchung benutzen wir häufiger die Termini »systematische Fehler« bzw. »typische Fehler« oder »charakteristische Fehler«. Hierbei meinen wir mit der Bezeichnung »systematische Fehler« Fehler, die bei mindestens 50 % aller entsprechender Aufgaben bzw. in den (wenigen) Fällen, in denen nur zwei Aufgaben als Bezugsbasis zur Verfügung stehen, in beiden Fällen von dem einzelnen Schüler gemacht werden. Unter »typischen Fehlern« oder »charakteristischen Fehlern« verstehen wir Fehler, die bei einer Rechenoperation (aufgrund unserer Befunde) häufiger vorkommen und daher dafür typisch oder charakteristisch sind.

Bezüglich der vier Rechenoperationen gewannen wir die im folgenden dargestellten Befunde und Einsichten. Die Ergebnisse hinsichtlich des Kürzens, Erweiterns und Umwandelns können wir aus Platzgründen an dieser Stelle nicht genauer darstellen. Wir können aber hier global festhalten, daß die Schüler bei der Durchführung dieser Subtechniken nur relativ selten Schwierigkeiten hatten und beachtlich hohe Lösungsquoten erreichten.

3
Schülerschwierigkeiten bei der Addition und Subtraktion

3.1
Vorbemerkung

Unser ursprünglicher Ansatz im Bereich der Addition und Subtraktion war es, die Klassen, die die Bruchrechnung rein im Sinne des Größenkonzepts kennengelernt hatten, den Klassen gegenüberzustellen, die nach dem Mischkonzept vorgegangen waren. Unsere Auswertung ergab hierbei einen durchgängigen Vorsprung für die Größenkonzept-Gruppe. Genauere Analysen ließen uns vermuten, daß die mit dem Mischkonzept sehr häufig verbundene Voranstellung der Multiplikation im Bruchrechenlehrgang eine wesentliche Ursache hierfür sein könnte. Entsprechend unterteilten wir anschließend die Klassen nach ihrem Operationsbeginn (Addition oder Multiplikation). Hierbei bestand zwar ein deutlicher Zusammenhang zwischen diesem Operationsbeginn und dem benutzten Konzept, genauer galt jedoch: Klassen, die nach dem Mischkonzept vorgegangen waren, begannen sehr oft – aber nicht immer! – mit der Multiplikation, während die Klassen, die nach dem Größenkonzept vorgegangen waren, mit großer Mehrheit – aber längst nicht alle! – mit der Addition anfingen. Unsere Auswertung bestätigte die entscheidende Rolle des Operationsbeginns (vgl. 3.2). Entsprechend unterteilten wir im folgenden die Ergebnisse nach diesem Gesichtspunkt.

3.2
Abfolge im Schwierigkeitsgrad

Bezüglich der Addition und Subtraktion erhielten wir folgende Abfolge im Schwierigkeitsgrad:

Erwartungsgemäß wird die Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche deutlich häufiger richtig gelöst als die entsprechende Rechenoperation bei den ungleichnamigen Brüchen, bedingt durch die geringeren Anforderungen (kein Erweitern), aber auch infolge der im 1. Fall besonders hilfreichen, starken Analogie zu dem vertrauten Bereich der natürlichen Zahlen im Sinne des quasikardinalen Aspekts (vgl. Griesel). In Anbetracht der sehr leichten Grundvorstellung im Fall »natürliche Zahl plus

Bruch« aber auch »Bruch plus natürliche Zahl« überrascht auf den ersten Blick das relativ schwache Abschneiden in diesen Fällen. Erwartungsgemäß bereitet die Subtraktion (natürliche Zahl minus Bruch) spürbar mehr Schwierigkeiten als die entsprechende Addition.

1. Additionsaufgaben:

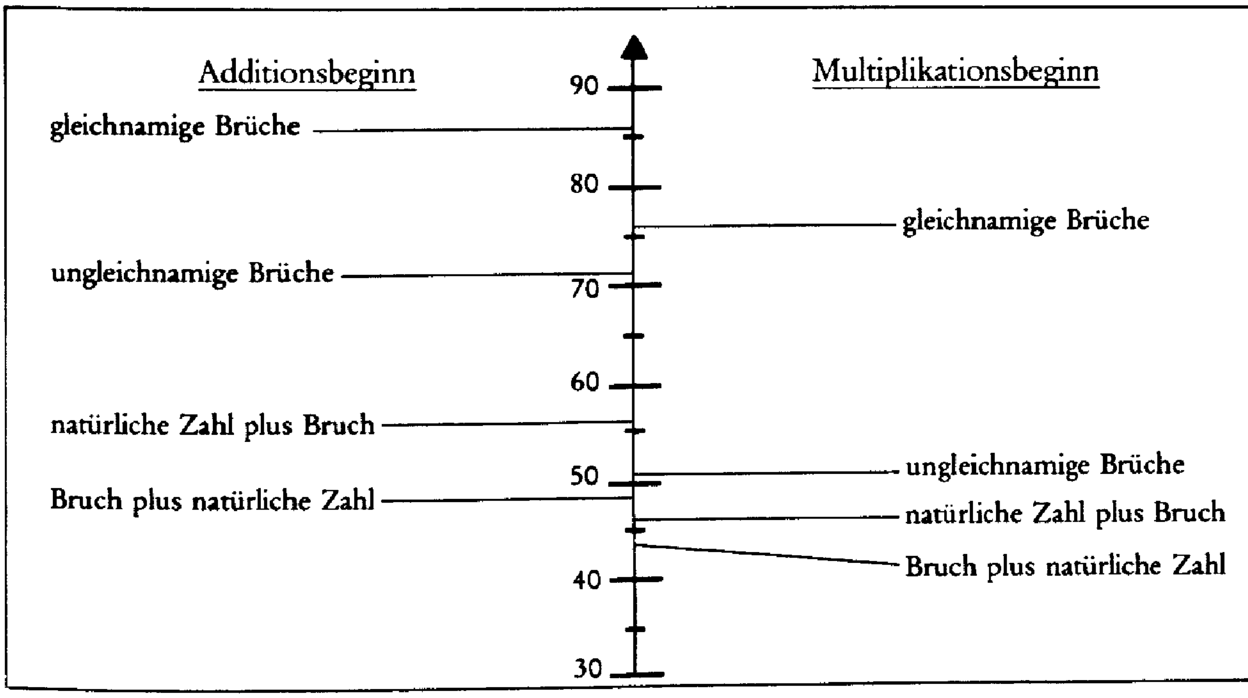


Bild 1: Prozentsatz richtig gelöster Aufgaben je Typ (Durchschnitt) bei der Addition

2. Subtraktionsaufgaben:

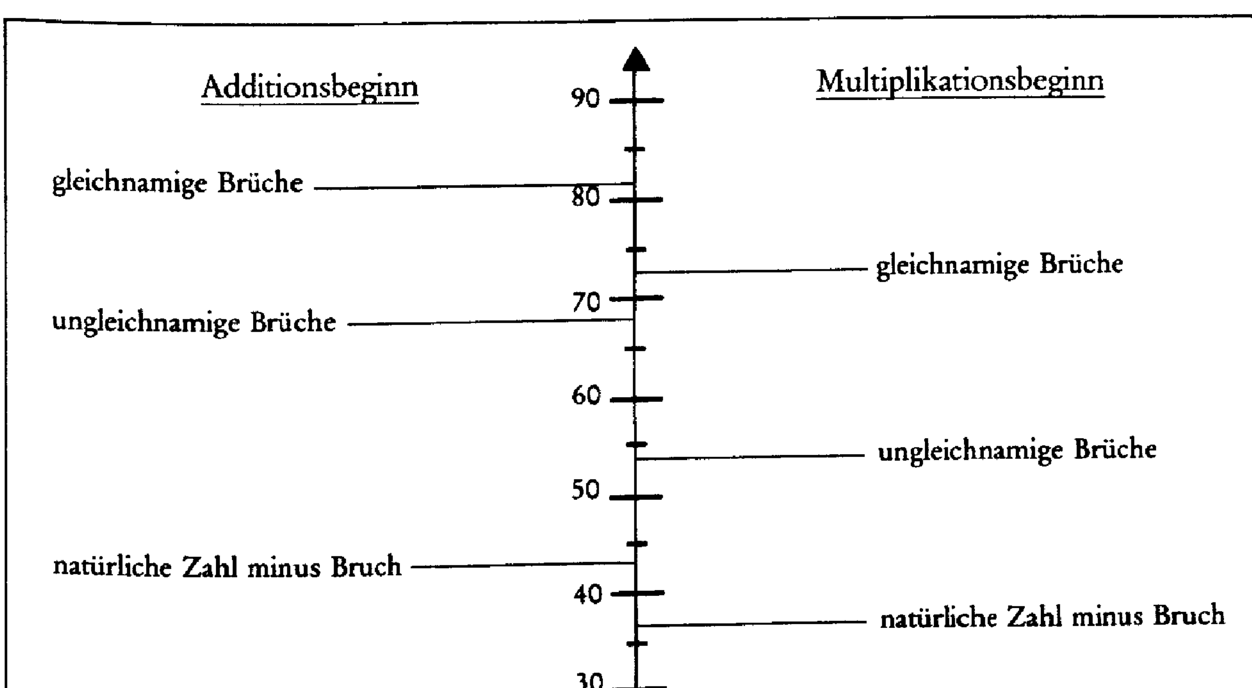


Bild 2: Prozentsatz richtig gelöster Aufgaben je Typ[1)] (Durchschnitt) bei der Subtraktion

Bei allen unterschiedenen Aufgabentypen sind klare Effekte des unterschiedlichen Operationsbeginns feststellbar.

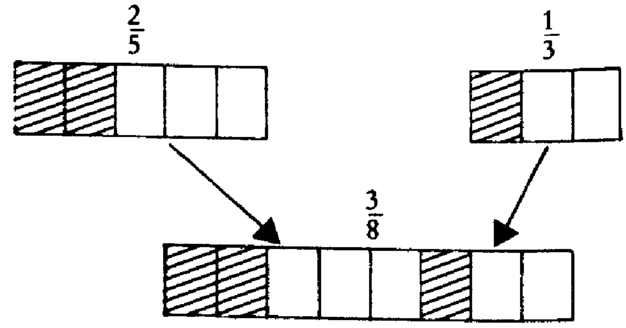
3.3
Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

Die relativ wenigen Fehler entfallen weit überwiegend auf einen Fehlertyp, nämlich bei der Addition wie Subtraktion auf das Fehlermuster $\frac{a}{b} \circ \frac{c}{d} = \frac{a \circ c}{b \circ d}$ mit »+« statt » $\circ$ « bei der Addition (Fehlermuster A 1) und »–« (ggf. mit Absolutbeträgen) bei der Subtraktion (Fehlermuster S 1), also auf ein Rechnen nach dem Motto:
Zähler plus (minus) Zähler durch Nenner plus (minus) Nenner. Mehr als 10 % der Schüler formulierten sogar die entsprechenden Rechenregeln in dieser Form aus (!), besonders häufig bei der Addition. Hierbei besteht kein wesentlicher Unterschied in der Häufigkeit der Benutzung dieses Fehlermusters zwischen der Addition und Subtraktion. Deutlichen Einfluß auf die Häufigkeit hat jedoch die Frage des Operationsbeginns: so begehen doppelt soviele Schüler diesen Fehler bei Beginn der Bruchrechnung mit der Multiplikation (13 % je Aufgabe) gegenüber einem Beginn mit der Addition.

Als Ursache für dieses Fehlermuster generell sowie speziell auch für die Häufung bei der Abfolge »erst Multiplikation, dann Addition«, kommen in Frage (vgl. auch 3.4):
– eine ungenügende Bruchvorstellung: die Zahlen im Zähler und Nenner werden als voneinander unabhängige natürliche Zahlen aufgefaßt und entsprechend getrennt addiert bzw. subtrahiert. Durch die bewußte Zerlegung der Bruchzahl beim Operatorkonzept in zwei verschiedene, weitgehend selbständige Komponenten (Multiplikationsoperatoren, Divisionsoperatoren) könnte diese Tendenz noch verstärkt werden,
– eine Übertragung des rechnerisch sehr leichten und einprägsamen Multiplikationsrahmens (oder -frame; vgl. Goffman) $\frac{a}{b} \circ \frac{c}{d} = \frac{a \circ c}{b \circ d}$ aj die Addition und Subtraktion, wobei dieser fehlerhafte Transfer bei einem Beginn der Bruchrechnung mit der Multiplikation besonders naheliegt.

3.4
Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Wie schon bei den gleichnamigen Brüchen massieren sich auch hier – nur mit noch etwas höheren Fehlerquoten – die Fehler auf ein Fehlermuster, nämlich auf $\frac{a}{b} \circ \frac{c}{d} = \frac{a \circ c}{b \circ d}$ (A 1 bzw. S 1). Hierbei unterläuft dieses Fehlermuster Schülern, die mit der Multiplikation den Bruchrechenlehrgang begonnen haben, fast doppelt so häufig wie den übrigen Schülern, nämlich der Fehler A 1 durchschnittlich 18 % und der Fehler S 1 15 % der Schüler pro Aufgabe. Der Beginn mit der Multiplikation erhöht auch die Unsicherheit gegenüber diesen Additions- und Subtraktionsaufgaben, erkennbar an der höheren Quote von Auslassungen, und reduziert die Zahl der richtigen Lösungen erheblich (vgl. Bild 1 und 2 in 3.2). Auf mögliche Ursachen für das Fehlermuster A 1/S 1 sind wir schon in 3.3 eingegangen. Ergänzend bieten sich noch folgende Gesichtspunkte an:
– die Verknüpfung von Gleichartigem (hier: die jeweilige Verknüpfung der Zahlen im Zähler sowie der Zahlen im Nenner) ist psychologisch naheliegend. Dieser Ansatz ist von den Schülern schon häufig erfolgreich praktiziert worden, so insbesondere auch beim schriftlichen Addieren und Subtrahieren im Bereich der natürlichen Zahlen (Einer zu Einer, Zehner zu Zehner usw.). Übertragen die Schüler diesen Ansatz auf die Brüche, so ergibt das – wie Gerster/Daubert zu recht herausstellen – bei der Addition und Subtraktion von Brüchen gerade das typische Fehlermuster A 1 bzw. S 1,
– auch unscharfe, anschauliche Bruchvorstellungen können das Fehlermuster A 1 (eventuell auch S 1) verursachen oder verstärken, wie das folgende Diagramm belegt (vgl. Peck/Jencks):



Die starke Dominanz der Fehlerstrategie A 1 bei der Addition belegen auch die Ergebnisse breit angelegter Repräsentativerhebungen in den USA, bei denen u. a. auch jeweils einige Aufgaben zur Bruchrechnung abgetestet wurden (vgl. Carpenter u. a.; Post). Jeweils 20 bis 30 % der Schüler machten hier bei der Addition ungleichnamiger Brüche den Fehler A 1. Ähnliche Ergebnisse bzgl. der Häufigkeit der Fehlerstrategie A 1 erbrachte auch eine breitere Untersuchung von Hart in England sowie Untersuchungen von Flade in der DDR und von Hasemann und Lörcher in der BR Deutschland. Die Tatsache, daß S 1 bei ungleichnamigen Brüchen etwas seltener vorkommt als A 1, beruht darauf, daß das Fehlermuster S 1 – im Gegensatz zum Fehlermuster A 1! – den Schülern nur bei bestimmten Beziehungen der Zahlen im Zähler wie im Nenner unterläuft, wie die folgende Auswahl von Aufgaben belegt:
Den Fehler S 1 machten bei

$\frac{5}{8} - \frac{1}{3}$ 18 %, bei $\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$ 10 % und bei $\frac{5}{3} - \frac{1}{6}$ 0 % der Schüler.

Das Fehlermuster S 1 unterläuft den Schülern also nur, wenn sie die Zahlen im Zähler sowie die Zahlen im Nenner jeweils in »gleicher« Richtung subtrahieren können (wobei der Fehler S 1 am häufigsten vorkommt, wenn die Schüler die Zahlen im Zähler wie im Nenner »normal« von links nach rechts subtrahieren können). Ist jedoch ein »gleichsinniges« Subtrahieren – wie im Fall $\frac{5}{3} - \frac{1}{6}$ – nicht möglich, so lösen die Schüler den kognitiven Konflikt (meist) durch Auslassen der Aufgabe bzw. (seltener) durch Ausweichen auf eine andere Fehlerstrategie, nämlich etwa auf die Strategie, die Zähler wie gewohnt zu subtrahieren und bei den Nennern einen der beiden Nenner als Nenner des Ergebnisses zu verwenden.

Neben dem dominanten Fehlermuster A 1/S 1 spielen folgende charakteristischen Fehler nur noch eine sehr untergeordnete Rolle (jeweils 2 bis 3 % der Schüler je Aufgabe) bei der Addition bzw. Subtraktion ungleichnamiger Brüche:
– Addition bzw. Subtraktion der ursprünglichen Zähler bei korrekter Bildung des Hauptnenners oder bei Benutzung des Nennerprodukts als gemeinsamen Nenner (Beispiel: $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3-1}{10}$), möglicherweise verursacht durch die Regelkurzformulierung: »erst gleichnamig machen, dann die Zähler addieren (subtrahieren)«
– Multiplikation statt Addition.

3.5
Addition und Subtraktion im kombinierten Fall (Bruch und natürliche Zahl)

3.5.1 Addition im Fall »natürliche Zahl plus Bruch«/»Bruch plus natürliche Zahl«

Bei diesem Aufgabentyp ist der deutliche Kontrast zwischen dem sehr leichten Grundverständnis dieser Aufgaben und ihrem sehr schlechten Abschneiden (mit deutlichem Abstand an letzter Stelle von allen Additionsaufgabentypen) äußerst frappierend (man vgl. auch die ähnlichen Ergebnisse von Wearne/Hiebert bzgl. der Dezimalbrüche in diesem Heft!). Überraschend auch der nur geringe Vorsprung von Aufgaben des Typs »natürliche Zahl plus Bruch« vor Aufgaben vom Typ »Bruch plus natürliche Zahl«. Die Fehler – mehr an der Zahl als im Fall der Addition von Brüchen – massieren sich auf einen Fehlertyp, nämlich $n \circ \frac{a}{b} = \frac{n \circ a}{b}$ bzw. $\frac{a}{b} \circ n = \frac{a \circ n}{b}$ (A 2) mit »+« für »∘«. Zum Teil unterläuft den Schülern hier zusätzlich noch der aus der Addition natürlicher Zahlen bekannte Fehler $n + 1 = n$. Im Durchschnitt machen rund 20 % (!) der Schüler je Aufgabe den Fehler A 2, dabei die Schüler mit Multiplikationsbeginn – nicht überraschend – etwas häufiger. Neben A 2 sind nur noch Einbettungsfehler von Bedeutung, also Fehler im Zusammenhang mit der Einbettung der natürlichen Zahlen in die Menge der Bruchzahlen. Drei fehlerhafte Strategien sind hier zu beobachten, nämlich $n = \frac{n}{n}$ (am häufigsten) oder $n = \frac{1}{n}$ oder $n = \frac{n}{m}$ zu setzen, wobei m der Nenner des nächsten Bruches in der Aufgabe ist (die letztere falsche Einbettung und A 2 lassen sich aufgrund der Schüleraufzeichnungen nicht immer genau auseinanderhalten).

Die Schwierigkeiten der Schüler mit diesem eigentlich sehr einfachen Aufgabentyp basieren nach unserer Einschätzung auf folgenden Ursachen:
– einer Unterschätzung dieses Aufgabentyps

durch die Lehrer (»völlig trivial«) und entsprechend eine weitgehende oder völlige Vernachlässigung im Unterricht (vgl. auch Brueckner und Lörcher). Infolgedessen rechnen die Schüler diesen Aufgabentyp sehr häufig äußerst formal. Statt durch Rückgriff auf anschauliche Bruchvorstellungen direkt $3 + \frac{1}{5} = 3\frac{1}{5}$ zu rechnen, wird vielfach äußerst umständlich

$$3 + \tfrac{1}{5} = \tfrac{3}{1} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{15}{5} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{16}{5} = 3\tfrac{1}{5}$$

gerechnet mit diversen Fehlermöglichkeiten bei der Einbettung, dem Erweitern sowie dem Einrichten,

– einer fehlerhaften Übertragung des eingängigen Multiplikationsrahmens $n \circ \frac{a}{b} = \frac{n \circ a}{b}$ auf den Bereich der Addition (A 2),

– einer nicht hinreichend gründlichen und anschaulichen Behandlung der Einbettung der natürlichen Zahlen in die Menge der Bruchzahlen.

3.5.2 Subtraktion im Fall »natürliche Zahl minus Bruch«

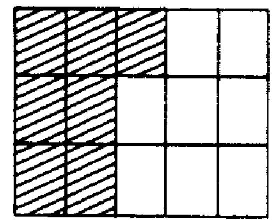
Die Beobachtungen in diesem Fall decken sich weitgehend mit den entsprechenden Befunden bezüglich der Addition (3.5.1) mit folgenden beiden kleineren Abweichungen:

– die Quote richtig gelöster Aufgaben liegt erwartungsgemäß noch niedriger als im additiven Fall (wir finden hier die schwächsten Ergebnisse bezüglich der Addition und Subtraktion insgesamt), obwohl auch hier sämtliche Aufgaben (Beispiele: $1 - \frac{7}{15}$, $5 - \frac{1}{3}$) rein aufgrund von anschaulichen Bruchvorstellungen ohne jeden formalen Kalkül gelöst werden konnten. Diese Daten belegen klar deutliche Defizite in den anschaulichen Bruchvorstellungen (s. u.!) sowie möglicherweise eine mangelnde Flexibilität der Schüler (stattdessen herrscht ein stures Abarbeiten sämtlicher Aufgaben nach starren Schemata vor),

– eine besonders große Unsicherheit der Schüler, erkennbar an der höchsten Quote von Auslassungen bezüglich der gesamten Addition und Subtraktion.

Die starken Defizite in den anschaulichen Bruchvorstellungen belegt auch klar die folgende Aufgabe:

»Von einer Tafel Schokolade wurden 7 Stücke gegessen (siehe Zeichnung). Welcher Bruchteil bleibt noch übrig?« . . .



Kannst du die obige Aufgabe auch rechnerisch lösen? Wie lautet die Rechenaufgabe? . . .«

Nur die Hälfte der Schüler gibt den Bruchteil richtig an, einige weitere Fehler lassen sich möglicherweise durch Flüchtigkeit und Mißverständnisse erklären (Angabe des anderen Bruchteils, Angabe der Kästchenzahl), jedoch weit über ein Drittel der Schüler gibt den Bruchteil völlig falsch an bzw. gibt keine Antwort, und dies trotz einer Position dieser Aufgabe fast ganz zu Beginn des Tests. Das Auffinden der zugehörigen Rechenaufgaben bereitet den Schülern große Schwierigkeiten: rund die Hälfte der Schüler läßt diese Teilaufgabe ganz aus und nur gut ein Viertel löst sie völlig richtig (während weitere 11 % diese Aufgabe als Subtraktionsaufgabe mit Kästchen im Bereich der natürlichen Zahlen formulieren).

Wegen der zusätzlichen leichten Lösungsstrategie (Abzählen, Bruchteilauffassung) finden wir bei dieser zeichnerischen Aufgabenstellung (etwas) mehr richtige Lösungen als bei der – an einer anderen Stelle des Tests stehenden – Rechenaufgabe $1 - \frac{7}{15}$.

Als Fehlermuster finden wir auch hier sehr dominant den Rahmen $n \circ \frac{a}{b} = \frac{n \circ a}{b}$ (S 2) mit »–« statt »∘« (und ggf. Absolutbeträgen) sowie die typischen Einbettungsfehler $n = \frac{n}{n}$ und $n = \frac{n}{m}$ (vgl. 3.5.1).

Im Durchschnitt je Aufgabe stolpert jeder 5. Schüler hierüber, überwiegend über das Fehlermuster S 2.

Ursachen für diese massiven Schwierigkeiten der Schüler dürften auch hier die schon in 3.5.1 genannten Gesichtspunkte sein.

3.6 Einige Folgerungen

Eine gezielte und effektive Bekämpfung der Schülerfehler bei der Addition und Subtraktion ist aufgrund der Massierung auf nur wenige verschiedene Fehlermuster gut möglich. Insbesondere sollten hierbei die folgenden Gesichtspunkte berücksichtigt werden:

– Schreibt man die Brüche anfangs entsprechend unserer Sprechweise (also z. B. 2 Drittel, 3 Fünftel), so ist bei der Addition und Subtraktion insbesondere gleichnamiger Brüche die starke Analogie zu dem – den Schülern sehr vertrauten – Rechnen mit natürlichen Zahlen und Größen sehr hilfreich (vgl. auch Payne). Diese Betonung des quasikardinalen Aspekts durch Schreibweisen wie 2 Fünftel + 1 Fünftel = 3 Fünftel (analog bei der Subtraktion) zu Beginn der Behandlung im Unterricht müßte helfen, ein hohes Widerstandsniveau bei den Schülern gegen den charakteristischen Fehler A 1/S 1 aufzubauen, wie auch eine gute Merkhilfe für die entsprechende Additions- bzw. Subtraktionsregel darstellen.

– Die Rechnungen bei $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}$ und $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ sollten gezielt miteinander verglichen und gegeneinander abgesetzt werden, um so eine fehlerhafte Übertragung des sehr einprägsamen und rechentechnisch viel leichteren Multiplikationsrahmens $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ auf die Addition und Subtraktion mit dem hieraus resultierenden Fehlermuster A 1/S 1 möglichst zu verhindern und um so eine möglichst umfassende Immunität gegen die $\mathbb{N}$-Verführer im Sinne Streeflands (vgl. den Beitrag von Streefland in diesem Heft) aufzubauen.

– Die Fälle $n \pm \frac{a}{b} | \frac{a}{b} + n$, die von vielen Lehrern offenkundig in ihrem Schwierigkeitsgrad völlig unterschätzt werden, sollten bewußt berücksichtigt werden, um so unerwartet große Schwierigkeiten der Schüler an dieser Stelle zu vermeiden.

– Unter inhaltlichen Gesichtspunkten leichte Aufgaben – wie z. B. die gerade erwähnten Fälle – sollten auf der Grundlage anschaulicher Grundvorstellungen über die Brüche und auf keinen Fall formal anhand eines Kalküls gelöst werden, um so die Schüler zu mehr Flexibilität und zur Vermeidung der sturen Benutzung starrer Schemata und Kalküle zu erziehen.

– Die Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen sollte sorgfältig und anschaulich behandelt und eingeübt werden, um die in vielen Bereichen der Bruchrechnung von uns beobachteten fehlerhaften Einbettungsstrategien zu vermeiden.

– Die Rechnungen in den Fällen $n \pm \frac{a}{b}$ und $n \cdot \frac{a}{b}$ sollten – wie schon im Fall »Bruch plus Bruch« – bewußt kontrastiert werden, um so bei den Schülern Abwehrmechanismen gegen das häufig benutzte Fehlermuster $n \circ \frac{a}{b} = \frac{n \circ a}{b}$ (A 2/S 2) aufzubauen.

– Aufgrund unserer Befunde ist ein Beginn des Bruchrechenlehrgangs mit der Addition wesentlich weniger fehlerträchtig als ein Einstieg mit der Multiplikation und von daher unbedingt zu empfehlen.

4 Schülerschwierigkeiten bei der Multiplikation

4.1 Abfolge im Schwierigkeitsgrad

Im Bereich der Multiplikation haben wir aufgrund unserer Voruntersuchungen vier Aufgabentypen unterschieden (vgl. Bild 3). Drei Stufen im Schwierigkeitsgrad sind deutlich zu erkennen:

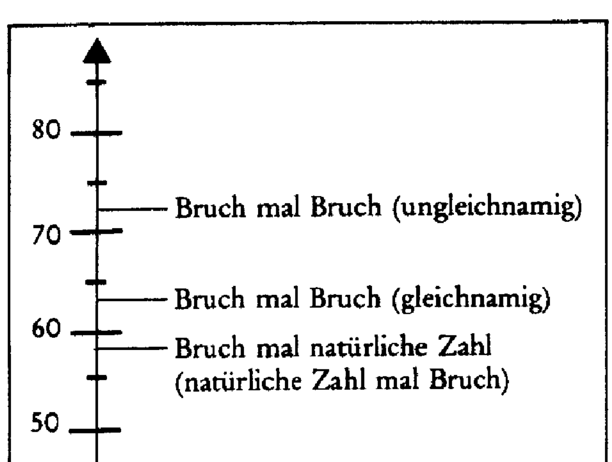


Bild 3: Prozentsatz richtig gelöster Aufgaben je Typ (Durchschnitt) bei der Multiplikation

Hierbei ist auf den ersten Blick sicher die Unterteilung nach gleichnamigen und ungleichnamigen Brüchen im Bereich der Multiplikation ungewohnt und überraschend. Abweichend von den Verhältnissen bei der Addition, Subtraktion und z. T. auch der Division ist nämlich der Sonderfall der Multiplikation gleichnamiger Brüche keineswegs vorstellungsmäßig leichter, daher sind hier bei oberflächlicher Betrachtungsweise auch keine anderen Richtigkeitsquoten als im allgemeinen Fall zu erwarten. Der deutliche Abfall ergibt sich jedoch durch zwei charakteristische Fehlerstrategien, die speziell bei gleichnamigen Brüchen besonders naheliegen und daher dort gehäuft auftreten (vgl. 4.2). Die Kombination von Bruch und natürlicher Zahl bereitet auch hier – wie schon bei der Addition und Subtraktion – den Schülern die meisten Schwierigkeiten, und dies – überraschenderweise! – unabhängig von der Reihenfolge.

4.2
Multiplikation gleichnamiger Brüche

Bei der Multiplikation gleichnamiger Brüche ist ein Hauptfehlertyp klar zu identifizieren, der in praktisch allen untersuchten Klassen gehäuft auftritt und auf den sich über die Hälfte aller Schülerfehler massiert. Viele Schüler übertragen den von der Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche her vertrauten Rahmen oder »frame« fälschlich auf die Multiplikation gleichnamiger Brüche und rechnen beispielsweise fehlerhaft $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7} = \frac{15}{7}$ bzw. allgemein $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$ (M 1). Dieser Fehler unterläuft 17 % der Schüler, also jedem 6. Schüler, mindestens einmal. Meist handelt es sich hierbei um einen Flüchtigkeitsfehler, der dann besonders gehäuft auftritt, wenn vorher Additions- oder Subtraktionsaufgaben zu lösen sind, und wenn die betreffende Aufgabe ziemlich am Ende des Tests steht und daher die Aufmerksamkeit schon etwas reduziert ist. Nur 4 % der Schüler machen diesen Fehler systematisch in beiden Aufgaben. Eine theoretisch denkbare stärkere Häufung dieses Fehlers bei den Schülern, die die Bruchrechnung mit der Addition begonnen haben und daher diesen Additionsrahmen besonders gut verinnerlicht haben, wird durch unsere Untersuchung nicht bestätigt.

Einen weiteren Fehlertyp, der bei der Multiplikation gleichnamiger Brüche häufiger auftritt, illustriert die folgende Rechnung: $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{14}$, also allgemein $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b + b}$ (M 2). Die Tatsache, daß der entsprechende Fehler auch im Sonderfall gleicher Zähler auftritt (vgl. 4.3), belegt, daß hier vermutlich eine Verwechslung von b^2 und $2b$ die Ursache ist. Diese Schüler rechnen also statt $b \cdot b = b^2$ fälschlich $b \cdot b = 2b$. Eigenartigerweise tritt dieser Fehler bei $7 \cdot 7$ (Primzahl) deutlich häufiger auf als bei $8 \cdot 8$ (zusammengesetzte Zahl). 8 % der Schüler begehen diesen Fehler mindestens einmal, allerdings fast immer nur aus Gedankenlosigkeit und fast nie systematisch.

Diese beiden fehlerhaften Schülerstrategien, die bei der Multiplikation gleichnamiger Brüche besonders naheliegen und daher sehr viel häufiger benutzt werden als im allgemeinen Fall (vgl. 4.3) bewirken hier die höhere Fehlerquote.

Daneben dividieren einige wenige Schüler statt zu multiplizieren. Dies geschieht nur selten aus Flüchtigkeit, sondern in diesen wenigen Fällen fast immer systematisch (2 % der Schüler).

4.3
Multiplikation ungleichnamiger Brüche

Die Multiplikation ungleichnamiger Brüche bereitet den Schülern von allen Aufgabentypen der Multiplikation am wenigsten Schwierigkeiten, sie fällt ihnen leichter als die entsprechenden Additions-, Subtraktions- und Divisionsaufgaben. Dies beruht nicht auf einem besonders gründlichen, inhaltlichen Verständnis der Multiplikation (vgl. 4.5 und 4.6!), sondern darauf, daß die Multiplikationsregel memotechnisch besonders einfach und einprägsam ist und die Multiplikation deshalb sehr leicht rein mechanisch ohne jegliches Verständnis kalkülmäßig richtig durchgeführt werden kann. Das »Zuschlagen« der $\mathbb{N}$-Verführer im Sinne Streeflands ist hier äußerlich nicht erkennbar, da es in diesem Fall zu rechnerisch richtigen Ergebnissen führt. Eine frühzeitige Gewöhnung an diese $\mathbb{N}$-Falle bzw. an diesen

Multiplikationsrahmen durch einen Beginn der Bruchrechnung mit der Multiplikation – und damit verbunden mangelnde Resistenz hiergegen – erhöht, wie wir im 3. Abschnitt gesehen haben, stark die Fehlerquoten im Bereich der Addition und Subtraktion.

Der Hauptfehlertyp M 1 bei der Multiplikation gleichnamiger Brüche spielt hier – wegen des höheren Schwierigkeitsgrades durch das erforderliche Erweitern auf einen Hauptnenner nicht überraschend – eine deutlich geringere Rolle. Die (wenigen) Schüler, denen er unterläuft, machen ihn meist systematisch (3 % der Schüler). Bei »günstigen« Nennern (Beispiel $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10}$) erhöht sich allerdings die Fehlerquote spürbar. 4 % der Schüler – und damit mehr als im Sonderfall gleichnamiger Brüche – dividieren systematisch statt zu multiplizieren, ein Fehler, der auch schon bei der umfangreichen amerikanischen Untersuchung von Brueckner vor fast 60 Jahren der wichtigste Verständnisfehler bei der Multiplikation von Brüchen war und der auch nach den Untersuchungen von Flade für die DDR und von Lörcher eine wichtige Rolle spielt. Der in diesen Untersuchungen ebenfalls genannte Fehler der Invertierung des Multiplikators mit anschließender Multiplikation (also: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{b \cdot c}{a \cdot d}$) spielt bei unseren Untersuchungen keine Rolle.

Vergleichbar häufig wie im Fall gleichnamiger Brüche tritt auch hier speziell bei den Aufgaben mit gleichen Zählern ($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$; $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10}$) der zu M 2 analoge Fehler auf, der vermutlich auf einer nur ungenügenden Unterscheidung (Diskrimination) von a^2 und $2a$ beruht.

4.4 Natürliche Zahl mal Bruch / Bruch mal natürliche Zahl

Die Schülerleistungen sind in diesem Sonderfall die schwächsten von allen untersuchten Multiplikationsfällen. Dies steht zumindest beim Aufgabentyp natürliche Zahl mal Bruch im eklatanten Widerspruch zu dem vom begrifflichen Aufwand her wesentlich geringeren Schwierigkeitsgrad dieses Aufgabentyps verglichen mit dem allgemeinen Fall (Bruch mal Bruch); denn hier wird bei der Multiplikation nur die schon für den Bruchzahlbegriff grundlegende Vorstellung des Vervielfachens von Bruchteilen benötigt. Unsere Untersuchung belegt jedoch, daß dieser Sonderfall (Kombination von natürlicher Zahl und Bruch) generell bei allen vier Rechenoperationen fehlerträchtiger ist als der Standardfall (Bruch kombiniert mit Bruch).

Ursache hierfür ist generell eine gewisse Unsicherheit und Hilflosigkeit der Schüler in diesen Fällen, kombiniert mit typischen Ausweichreaktionen. Dies ist am deutlichsten und häufigsten im Bereich der Multiplikation zu beobachten, wo rund 2 Drittel aller Schülerfehler auf ein dominantes Fehlermuster entfallen, und dies durchgängig in praktisch allen Klassen. So begeht jeder vierte(!) Schüler systematisch den Fehler: $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$ bzw. $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ (M 3), erweitert also formal statt zu multiplizieren. Hierbei besteht zwischen den beiden – von den zugrundeliegenden inhaltlichen Vorstellungen her äußerst verschiedenen – Fällen (Bruch mal natürliche Zahl bzw. natürliche Zahl mal Bruch) kein Unterschied in den Richtigkeitsquoten. Dies ist auf den ersten Blick überraschend und bedeutet, daß die Schüler in diesem Stadium weithin rein formal durch Rückgriff auf die Regeln – und nicht durch Rückgriff auf anschauliche Grundvorstellungen – diese Aufgaben lösen.

Ein besonders deutliches Indiz hierfür ist die Tatsache, daß die unter semantischen Gesichtspunkten extrem leichte Aufgabe $4 \cdot \frac{1}{7}$ nicht häufiger richtig gelöst wird als die Aufgabe $\frac{2}{11} \cdot 5$! Dies ist nicht durch »Einstelleffekte« im Sinne Luchins zu erklären; denn die Aufgabe $4 \cdot \frac{1}{7}$ steht ganz zu Beginn eines entsprechenden Aufgabenblocks (nach einer Aufgabe vom Typ Bruch mal Bruch). Diese Beobachtung belegt, daß für die richtige Lösung dieses Aufgabentyps nicht die semantische Ebene, sondern rein die syntaktische Ebene – auf der offensichtlich kein Unterschied zwischen beiden Aufgabentypen besteht – entscheidend ist. Zur Ursachenerklärung für das dominante Fehlermuster M 3 bietet sich folgendes Bündel von sich überlagernden und gegenseitig verstärkenden Faktoren an: Schwierigkeiten der Schüler mit der Einbettung der natürlichen Zahlen in den Bereich der Bruchzahlen (häufiger Fehler: $n = \frac{n}{n}$), mangelnde Diskrimination der Regel des Erweiterns und des Multiplizierens sowie eine Übergeneralisierung der vertrauten Multiplikationsregel »Zähler mal Zähler durch Nenner mal Nenner« auch auf diesen Sonderfall: »Notgedrungen« – da nichts anderes zur Verfügung steht – multipliziert man in möglichst starker Anlehnung an diese Regel den Zähler und den Nenner mit der gegebenen natürlichen Zahl. Schüler, die die Bruchrechnung mit der Addition begonnen haben, begehen den Fehler M 3 etwas häufiger. Die stärkere Einprägung des Erweiterns bei diesen Schülern wegen ihrer häufigen Benutzung zu Beginn kann hierfür ebenso die Ursache sein wie insbesondere eine stärkere Betonung dieser Aufgabe als Grundaufgabe bei den Schülern, die mit der Multiplikation begonnen und die diesen Teil der Bruchrechnung – dies trifft für den größten Teil zu – dann mit Operatoren behandelt haben.

Neben dem extrem stark vorherrschenden Fehlermuster M 3 spielt nur noch ein weiterer Fehler eine Rolle, nämlich die Invertierung eines der beiden Faktoren (meist wird unabhängig von ihrer Position die natürliche Zahl genommen) mit anschließender Multiplikation, also im Sonderfall der Invertierung des 2. Faktors die Division. Etwa 4 % der Schüler begehen diesen Fehler systematisch.

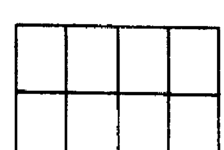
4.5
Regelformulierung und Begründung

Die sehr leicht zu merkende Multiplikationsregel für den allgemeinen Fall wird von allen vier Rechenregeln mit deutlichem Abstand am häufigsten richtig formuliert, und zwar von gut der Hälfte der Schüler. Zwei Beobachtungen sind in diesem Zusammenhang allerdings bemerkenswert: 1. Wesentlich mehr Schüler wenden die Regel effektiv richtig an als sie hier explizit formulieren können oder wollen. 2. Die beiden wichtigsten Fehlerstrategien, nämlich M 1 und die irrtümliche Division, werden häufiger auch explizit als Regel ausformuliert – M 1 sogar von 5 % der Schüler –, ein weiteres Beleg dafür, wie stark diese Schüler die entsprechenden fehlerhaften Strategien schon verinnerlicht haben.

In den untersuchten Klassen legten die betreffenden Lehrer zurecht großen Wert auf eine sorgfältige Ableitung der Multiplikationsregel. Durch die folgende Aufgabe sollte das – rund ein halbes Jahr später – noch vorhandene Wissen über die Begründung der Multiplikationsregel getestet werden: »Einer deiner Mitschüler war krank, als in der Schule die Multiplikation von Bruchzahlen behandelt wurde. Nenne ihm die Multiplikationsregel. Zu Recht fragt dein Mitschüler: »Warum multipliziert man Bruchzahlen gerade auf diese Art?« Begründe dies am Beispiel $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$.« [Als Hilfe war auf dem Testbogen im Anschluß an die Aufgabe ein Karomuster – wie in Rechenheften üblich – aufgetragen worden.] Selbst eine derartige konkrete, beispielgebundene Begründung der Multiplikationsregel schaffte, unabhängig von den benutzten Ableitungswegen (über Gleichungsketten, Anwendungen von Operatoren auf Größen, Verkettungen von Operatoren oder Flächeninhalten), kein einziger der untersuchten Schüler. Obwohl uns bewußt war, daß diese Aufgabe recht komplex ist, überraschte uns dennoch dieses derartig eindeutige Ergebnis.

4.6
Über Probleme bei der rechnerischen Umsetzung von »von«-Situationen

Bei den anwendungsbezogenen Fragestellungen, bei denen wir die Multiplikation von Bruchzahlen zur Lösung benötigen, spielen »von«-Situationen die entscheidende Rolle. Die folgende Aufgabe zeigt deutliche Probleme der Schüler bei der rechnerischen Umsetzung konkreter »von«-Situationen in die entsprechenden Multiplikationsaufgaben auf.
Aufgabe: »Schraffiere zunächst die Hälfte des Rechtecks. Färbe anschließend ein Viertel des schraffierten Teils schwarz. Welchen Bruchteil des ganzen Rechtecks hast du schwarz gefärbt? . . . Löse die Aufgabe auch rein rechnerisch (ohne Zeichnung)! Welche Rechenoperation mußt du benutzen? [. . .]. Wie lautet die Rechenaufgabe?«



Ergebnisse:

(1) Zeichnung richtig: 72 % (Der Hauptfehler: statt $\frac{1}{4}$ des schraffierten Teils wurde häufiger $\frac{1}{4}$ der Gesamtfläche gewählt.)

(2) Zahlenangabe richtig: 52 %

(3) Richtige Angabe der Rechenaufgabe $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ (oder ähnlich): 1 % der Schüler.

Neben den Defiziten in den anschaulichen Bruchvorstellungen – dokumentiert durch den deutlichen Abfall von (1) nach (2), aber auch durch andere Aufgaben des Tests – überrascht vor allem die sehr geringe Anzahl von Schülern, die erkennen, daß die vorstehende Aufgabe rechnerisch durch eine Multiplikation zu lösen ist. Dieses Ergebnis deckt sich mit neueren Befunden von Payne, wonach – entgegen seinen ersten Erwartungen – viele Schüler Schwierigkeiten hatten, Bruchteilbildung und Multiplikation in Beziehung zu setzen. Wir können also nicht erwarten, daß Schüler ohne Vorarbeiten spontan »von«-Situationen durch eine Multiplikation lösen, zumal hier deutliche Unterschiede zwischen den vertrauten natürlichen Zahlen und den Bruchzahlen zu beobachten sind (2 von 3; $\frac{2}{3}$ von 12). Entsprechende Vorarbeiten sind also unbedingt erforderlich. Ein wichtiger Gesichtspunkt ist in diesem Zusammenhang der benutzte Weg zur Ableitung der Multiplikationsregel. Hierbei fiel auf, daß in keiner der untersuchten Klassen die Multiplikation explizit über einen entsprechenden »von«-Ansatz eingeführt wurde. Bei den benutzten Ableitungswegen über Gleichungsketten und Flächeninhalt ist eine direkte Verbindung zum »von«-Ansatz offenkundig nicht vorhanden, aber auch bei den beiden Operatorableitungswegen (Operatorverkettung, Anwendung von Operatoren auf Größen) kommt offenbar die von-Auffassung der Multiplikation infolge der vielfach rigiden Formalisierungen – entgegen den ursprünglichen Intentionen! – nicht mehr zum Tragen. Daher ist eine stärkere Betonung der »von«-Auffassung bei der Behandlung der Multiplikation erforderlich, und zwar in umgangssprachlicher Formulierung und nicht in der formalisierten Operatorsymbolik. Dagegen ist der andere Einsatzbereich der Multiplikation von Bruchzahlen, nämlich die Berechnung von Flächeninhalten, nicht mit entsprechenden Problemen befrachtet, da hier ein Transfer vom Bereich der natürlichen Zahlen her möglich und sinnvoll ist.

4.7 Einige Folgerungen

Eine gezielte Bekämpfung der Schülerfehler bei der Multiplikation ist wegen ihrer starken Massierung auf nur wenige Typen sicher erfolgversprechend. Insbesondere empfehlen sich folgende konkreten Maßnahmen (vgl. auch 6):

– ein bewußtes Kontrastieren von Aufgaben zur Addition und Multiplikation gleichnamiger Brüche, um so den falschen Transfer M 1 zu verhindern bzw. wieder abzubauen,

– ein gezieltes Gegenüberstellen von Multiplikations- und Divisionsaufgaben, da hier von beiden Seiten her systematisch Regelverwechslungen erfolgen,

– eine Betonung des quasikardinalen Aspekts im Fall »natürliche Zahl mal Bruch« und damit ein Rückgriff auf die vertrauten – und hier hilfreichen! – Analogien zum Bereich der natürlichen Zahlen, um so den Fehler M 3 zu reduzieren, ebenso wie durch ein bewußtes Gegenüberstellen von Aufgaben zum Erweitern und Multiplizieren,

– eine gründliche und anschauliche Einübung der Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen; bei der Multiplikation von Bruchzahlen sollte abschließend nur eine Regel formuliert werden mit expliziter Erwähnung der Einbettung $n = \frac{n}{1}$,

– eine Betonung der »von«-Auffassung der Multiplikation in umgangssprachlicher – und nicht in formalisierter – Fassung.

5
Schülerschwierigkeiten bei der Division

5.1
Abfolge im Schwierigkeitsgrad

Bei der Division haben wir in unserer Untersuchung 5 Aufgabentypen unterschieden (vgl. Bild 4). Wir erhielten folgende Abfolge im Schwierigkeitsgrad:[2)]

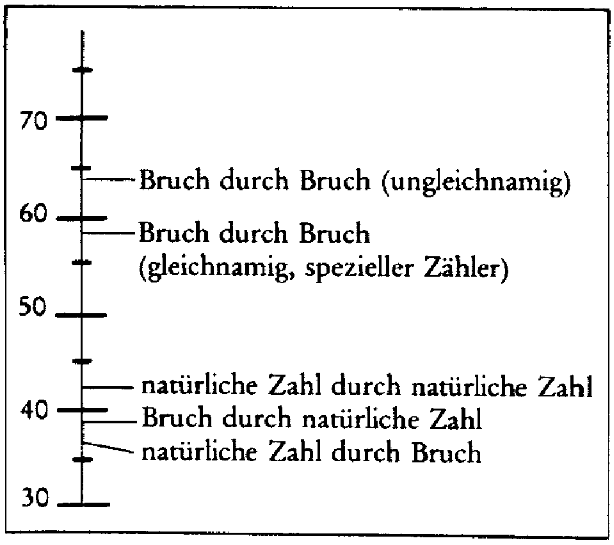


Bild 4: Prozentsatz richtig gelöster Aufgaben je Typ bei der Division

Zwei Schwierigkeitsstufen sind deutlich erkennbar: einmal der Fall Bruch durch Bruch, sodann auf deutlich niedrigerem Niveau – und zwar krasser als bei der Multiplikation! – der Fall bei dem Brüche und natürliche Zahlen kombiniert bzw. natürliche Zahlen allein vorkommen.

5.2
Bruch durch Bruch

Bei der Division gleichnamiger Brüche benutzen die Schüler sehr häufig den schon bei den entsprechenden Multiplikationsaufgaben beobachteten Additions-/Subtraktionsrahmen und rechnen z. B. fehlerhaft $\frac{9}{10} : \frac{3}{10} = \frac{9:3}{10} = \frac{3}{10}$ (D 1).

Im Unterschied zur Multiplikation kann hier dieser Fehler jedoch nur in Sonderfällen auftreten, falls nämlich speziell der zweite Zähler ein Teiler des ersten Zählers ist. In diesem Fall unterläuft fast jedem 5. Schüler quer durch beinahe alle Klassen dieser Fehler mindestens einmal, jedoch passiert dies nur 4 % der Schüler systematisch bei beiden Aufgaben.

Die ursprüngliche Erwartung, daß die Schüler diese unter dem Gesichtspunkt des Messens extrem leichten Aufgaben wie $\frac{4}{5} : \frac{2}{5}$ durch Rückgriff auf diese anschauliche Grundvorstellung rein intuitiv – ohne formale Rechnungen – hochprozentig richtig lösen würden, hat sich also nicht erfüllt. Ein theoretisch denkbarer, verstärkter fehlerhafter Transfer in Richtung D 1 bei Beginn der Bruchrechnung mit der Addition ist auch hier – wie schon bei der Multiplikation – nicht festzustellen.

Der Abstand der Richtigkeitsquote zwischen diesem Sonderfall und dem allgemeinen Divisionsfall ist nur relativ gering, da die hohe Fehlerquote bezüglich D 1 im Sonderfall gleichnamiger Nenner weitgehend wieder wettgemacht wird durch die besonders einfache Rechnung in diesem Fall.

Mit Ausnahme des Fehlers D 1, der im allgemeinen Fall nicht zu erwarten ist, gibt es keinen Unterschied im Fehlerprofil und in der Fehlerhäufigkeit zwischen dem allgemeinen Fall und dem Spezialfall gleichnamiger Nenner. So spielt in beiden Fällen von den drei naheliegenden fehlerhaften Varianten der Divisionsregel (j j Multiplikation, Kehrwert des 1. Bruches, Kehrwert beider Brüche und Multiplikation) nur die Multiplikation eine größere – mit der irrtümlichen Division bei der Multiplikation vergleichbare – Rolle. (3 % der Schüler begehen diesen Fehler systematisch, allerdings massiert in nur einigen Klassen, während die beiden Kehrwertfehler deutlich seltener vorkommen.)

5.3 Bruch durch natürliche Zahl / natürliche Zahl durch Bruch

Auch bei der Division ist der kombinierte Fall (Bruch und natürliche Zahl) – in Übereinstimmung mit theoretischen Analysen und praktischen Befunden von Klauer – für die Schüler deutlich fehlerträchtiger und – wie die gehäuften Auslassungen erkennen lassen – schwerer als der Fall »Bruch durch Bruch«. Trotz deutlicher Unterschiede unter inhaltlichen Gesichtspunkten liegt die Fehlerquote in den beiden Fällen »Bruch durch natürliche Zahl« und »natürliche Zahl durch Bruch« gleich hoch. Entscheidend ist auch hier offenbar wiederum die syntaktische Ebene; denn hier sind die beiden Fälle gleich schwer. Während nämlich im Fall »Bruch durch natürliche Zahl« sich an die schwierigen Inversenbildung der natürlichen Zahl nur noch die Anwendung der leichten Multiplikationsregel anschließt, muß im Fall »natürliche Zahl durch Bruch« nach der leichteren – da viel öfter geübten! – Inversenbildung des Bruches anschließend die deutlich schwierigere Aufgabe der Multiplikation eines Bruchs mit einer natürlichen Zahl gelöst werden (vgl. 4.4).

Zwei charakteristische Hauptfehlerstrategien sind im Fall »Bruch durch natürliche Zahl« zu beobachten: so multiplizieren 10 % aller Schüler quer durch praktisch alle Klassen systematisch bei diesem Aufgabentyp statt zu dividieren, vermutlich durch Probleme bei der Kehrwertbildung natürlicher Zahlen (»geht nicht«) bedingt[3)], während zusätzlich 6 % systematisch rechnen $\frac{a}{b} : n = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ (»erweitern«), vermutlich – wie auch in 4.4 – als Folge von Schwierigkeiten mit der Einbettung der natürlichen Zahlen in die Menge der Bruchzahlen ($n = \frac{n}{n}$!). Daneben ist die Bildung des Kehrwertes des 1. Bruches mit anschließender Multiplikation als Fehler nur von untergeordneter Bedeutung (2 % der Schüler, praktisch immer systematisch).

Bei speziellen Zahlen kann man auch häufiger »Folgeschäden« der gesonderten Regelformulierung für den Aufgabentyp »Bruch durch natürliche Zahl« beobachten, wie es die beiden Fehlerbeispiele $\frac{3}{5} : 9 = \frac{9 : 3}{5} = \frac{3}{5}$ sowie $\frac{3}{10} : 2 = \frac{3}{10 : 2} = \frac{3}{5}$ deutlich belegen.

Im Fall »Natürliche Zahl durch Bruch« sind folgende charakteristische Fehlerstrategien (nach der Häufigkeit angeordnet) zu beobachten:

- ein fehlerhafter Transfer von der Multiplikation (Beispiel: $2 : \frac{2}{3} = \frac{2 : 2}{3} = \frac{1}{3}$) bzw. die implizite Benutzung einer Art Kommutativgesetz
- Einbettungsprobleme ($n = \frac{n}{n}$) mit entsprechenden Fehlerstrategien (»Erweitern«)
- Multiplikation (ohne Kehrwertbildung)
- Kehrwertfehler

Die erstmals größere Anzahl verschiedener, häufiger vorkommender Fehlertypen bei diesem Fall fällt auf. Eine Verbreiterung der Untersuchungsbasis bei diesem Aufgabentyp ist allerdings wünschenswert, da wir hierzu nur zwei besonders einfache Aufgaben, nämlich $2 : \frac{2}{3}$ und $1 : \frac{1}{5}$, bei unserer Untersuchung zugrundelegen konnten. Obwohl beide Aufgaben sehr einfach ohne formale Rechnungen im Sinne des Messens lösbar sind, wurde dieser Weg von den Schülern hier offenbar nur selten beschritten (vgl. auch 5.6).

5.4 Natürliche Zahl durch natürliche Zahl

Die hier untersuchten Aufgaben wie z. B. 4 : 5 beziehen sich auf eine der beiden Grundvorstellungen über Brüche, nämlich auf die Vorstellung von Brüchen als Teil mehrerer Ganzer (vgl. Padberg 1978). Die Ergebnisse offenbaren starke Defizite der Schüler hinsichtlich dieser Grundvorstellung. Trotz der Wahl der Nenner 5 in den Aufgaben und der damit verbundenen leichten Ausweichmöglichkeit auf Dezimalbrüche lösen im Durchschnitt nur 41 % der Schüler die entsprechenden Aufgaben richtig (und zwar 25 % mit Bruch- und 16 % mit Dezimalbruchnotation). An der sehr hohen Quote von Auslassungen – der höchsten überhaupt bei allen Rechenoperationen – wird die große Unsicherheit der Schüler bezüglich dieser Aufgaben sichtbar. Die (schwachen) Befunde decken sich im übrigen mit Ergebnissen einer breiten empirischen Untersuchung von Hart in England, wo in der vergleichbaren

Altersgruppe nur 30–35 % der Schüler die Aufgaben 3 : 5 richtig lösen konnten.

Einige Schüler weichen in unserer Untersuchung von der für sie unlösbaren Aufgabe wie z. B. 4 : 5 systematisch auf die für sie lösbare »umgekehrte« Aufgabe 5 : 4 aus. Andere (jeweils rund 2 %) straucheln bei der Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen und rechnen systematisch z. B. $2 : 5 = \frac{2}{2} : \frac{5}{5} = \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 5}$ ($n = \frac{n}{n}$!).

Die Hinzufügung einer Größeneinheit bei der 1. Zahl, also z. B. durch Übergang von 2 : 5 zu 2 m : 5, reduziert deutlich die Zahl der Auslassungen und erhöht die Richtigkeitsquote im Durchschnitt um gut 10 %, vor allem durch den zusätzlichen, leichteren Rechenweg im Bereich der natürlichen Zahlen durch Übergang zu kleineren Maßeinheiten (Beispiel: 2 m : 5 = 200 cm : 5 = 40 cm).

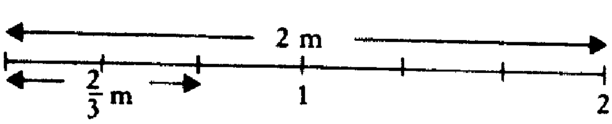
5.5
Regelformulierung und Begründung

Die Beobachtungen decken sich weitgehend mit den Ausführungen zur Multiplikation. Die Regel wird wegen ihres größeren Schwierigkeitsgrades allerdings seltener richtig formuliert, eine (auch nur annähernd richtige) beispielgebundene Begründung der Divisionsregel schafft auch hier <u>kein</u> Schüler.

5.6
Praktische Anwendung der Division von Brüchen

Die Division von Brüchen bzw. die Division durch Brüche spielt bei praktischen Anwendungen in zwei Ausprägungen eine Rolle, nämlich als Messen bzw. Teilen. In diesem Zusammenhang enthielt unser Test je eine Aufgabe.

<u>Aufgabe 1 (Messen):</u>
»Ein Brett ist 2 m lang. <u>Wieviele</u> Stücke von jeweils $\frac{2}{3}$ m Länge kannst du hiervon absägen?«



Wesentlich mehr Schüler, nämlich 77 %, lösten diese Aufgabe richtig als die entsprechende reine Rechenaufgabe $2 : \frac{2}{3}$, die an einer anderen Stelle unseres Tests stand (dort nur 37 % richtig). Ursache hierfür ist die Benutzung von zusätzlichen, sehr einfachen Rechenstrategien bei obiger Textaufgabe, die bei der reinen Rechenaufgabe nicht zum Tragen kommen, nämlich die Lösung durch wiederholte Addition bzw. Subtraktion oder sogar durch einfaches Abgreifen oder Abzählen.

Der Zusammenhang zwischen Messen und Dividieren ist hierbei wesentlich mehr Schülern bekannt als der entsprechende Zusammenhang zwischen »von«-Situationen und Multiplikation. So konnte knapp die Hälfte der Schüler obiger Meßsituation richtig die Aufgabe $2 : \frac{2}{3}$ zuordnen, ein Prozentsatz, der durch das bewußte Ansprechen des Messens im Zusammenhang mit der Division — dies erfolgte nur in wenigen der untersuchten Klassen! — sicher noch gesteigert werden könnte. Hilfreich ist hierbei die völlige Analogie des Messens im Bereich der natürlichen Zahlen und der Bruchzahlen.

<u>Aufgabe 2 (Teilen):</u>
»Zwei Schüler teilen eine $\frac{3}{10}$ l-Dose Limonade. Wieviel Limonade bekommt jeder, wenn sie <u>gerecht</u> teilen?«

Abweichend von den Verhältnissen bei Aufgabe 1 liegen die Richtigkeitsquoten bei dieser Textaufgabe um rund 10 % <u>unter</u> den Werten bei der entsprechenden reinen Rechenaufgabe. Dies beruht <u>nicht</u> darauf, daß das Teilen für die Schüler vorstellungsmäßig schwieriger ist als das Messen. Es beruht vielmehr darauf, daß diese Textaufgabe <u>keine</u> zusätzlichen, einfachen Rechenstrategien nahelegt, dafür aber die zunächst erforderliche Übersetzung des Aufgabentextes in die zugehörige Rechenaufgabe den Schülern zusätzliche Schwierigkeiten und Fehlermöglichkeiten beschert.

Daß dennoch auch reine Textaufgaben (ohne bildliche Veranschaulichungshilfen wie im Beispiel 1) für Schüler sehr hilfreich sein können, belegt das folgende Beispiel von Hart: »Bei einem Stafettenlauf ist jede Etappe $\frac{1}{8}$ km lang. Jeder Läufer läuft 1 Etappe. Wieviel Läufer benötigen wir für die Gesamtstrecke von $\frac{3}{4}$ km?« Deutlich mehr Schüler lösten diese Textaufgabe in der Untersuchung von Hart richtig als die entsprechende reine Rechenaufgabe $\frac{3}{4}:\frac{1}{8}$. Entscheidend ist hierbei, daß die Textaufgabe eine zusätzliche, leichte Lösungsstrategie nahelegte, nämlich eine Lösung durch wiederholte Addition, die offenkundig bei der entsprechenden reinen Rechenaufgabe von den Schülern nicht angewandt wird.

Im Zusammenhang mit praktischen Anwendungen der Division sollte man daher bei der Auswahl von Textaufgaben bewußt darauf achten, daß die ausgewählten Aufgaben zusätzlich (anschauliche) Lösungsstrategien nahelegen, um so die Schüler flexibler in ihrem oft sehr rigiden Lösungsverhalten zu machen.

5.7
Unterrichtserfolg und benutzte Methode

Während bei der Multiplikation von Brüchen die drei in der Schulrealität der untersuchten Klassen häufiger benutzten Methoden (Verkettung von Operatoren, Anwendung eines Operators auf eine Größe, Weg über Gleichungsketten) trotz des deutlich höheren Zeitaufwandes insbesondere beim Weg über die Verkettung von Operatoren zu keinen signifikanten Unterschieden in den Schülerleistungen führten, sind die Unterschiede bei der Division in Abhängigkeit von den benutzten Einführungswegen sehr erheblich. Aus dem breiten Spektrum möglicher Ableitungswege der Divisionsregel (die entsprechenden Schulbücher bieten jeweils mindestens 3 Wege an) sind in der Schulwirklichkeit nur zwei Methoden von Bedeutung, und zwar der Weg über Gleichungsketten (GL) sowie der Weg über den Gegenoperator (GOP). Die folgenden drei Vergleichsdaten belegen eindeutig die starken Unterschiede in der Effizienz dieser beiden Methoden, verdeutlicht am zentralen Bereich der Division von Brüchen, nämlich am Fall »Bruch durch Bruch«:

1. Vergleich: Spitzengruppen gegen Schlußlicht

Zur »Spitzengruppe« faßten wir die 6 besten, zum »Schlußlicht« die 6 schlechtesten Klassen (hier bezüglich des Rechenfalls »Bruch durch Bruch«) zusammen.

Wir erhielten folgendes Ergebnis:

	GL	GOP	andere Methoden
Spitzengruppe (6 Klassen)	4	1	1
Schlußlicht (6 Klassen)	1	3	2

Tabelle 1: Verteilung der Klassen der Spitzengruppe und des Schlußlichts auf die verschiedenen Methoden

2. Vergleich: Erfolgsquote, Auslassungen und typische Fehler

	GL	GOP
richtig (%)	67	48
Auslassungen (%)	19	31

Tabelle 2: Erfolgsquote und Auslassungen in Abhängigkeit von den benutzten Methoden

Während wir bei der GL-Methode nur minimal typische Fehler vorfanden, macht bei der GOP-Methode im Durchschnitt jeder 10. Schüler bei jeder Aufgabe einen typischen Fehler (Multiplikation, Kehrwert vom 1. Bruch oder zweimalige Kehrwertbildung), und zwar besonders häufig die fälschliche Multiplikation. Diese Probleme mit den verschiedenen Komponenten der Divisionsregel ((Multiplikation, Kehrwertbildung) bei der GOP-Methode basiert nicht auf Unterschieden in der Regelformulierung.

3. Vergleich: Erfolgsquoten der einzelnen Klassen und benutzte Methode

Für diesen Vergleich betrachten wir exemplarisch die Aufgabe $\frac{2}{3}:\frac{5}{7}$:

Betrachten Sie hierzu bitte Bild 5 auf der folgenden Seite.

Die Daten belegen eindeutig einen großen Vorsprung der GL-Methode (wesentlich mehr richtige Lösungen, wesentlich seltener Auslassungen). Hierbei deckt die Untersuchung der einzelnen Klassen klar auf, daß der deutliche Vorsprung von GL nicht auf einzelnen »Ausreißern« beruht, sondern auf durchgängig besseren Ergebnissen der GL-Klassen. Die große Schwankungsbreite innerhalb der einzelnen Methoden weist auf die zusätzliche, große Bedeutung der Lehrerpersönlichkeit (und auch der spezifischen Situation der einzelnen Klassen) hin.

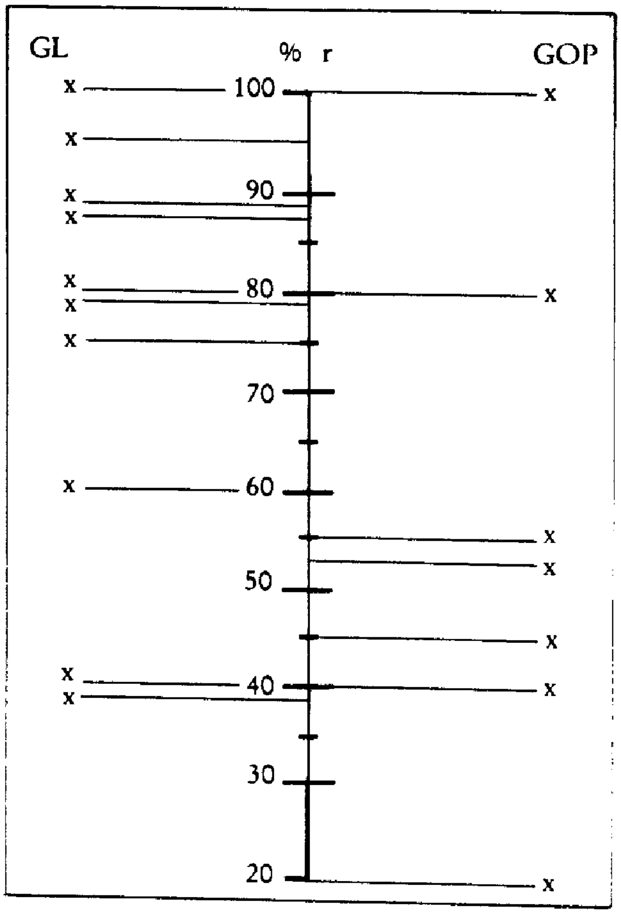


Bild 5: Erfolgsquoten der einzelnen Klassen und benutzte Methode

Mit der Gleichungskettenmethode haben also wesentlich mehr Lehrer wesentlich größere Erfolge bei den Schülern als mit der Gegenoperatormethode. Die Befunde belegen nicht, daß die Gegenoperatormethode schlecht ist, sie belegen nur, daß die Lehrer in der Schulrealität mit der Gleichungskettenmethode wesentlich besser zurechtkommen. (Bei der standardisierten Befragung fielen uns bei der Gegenoperatormethode die wesentlich größeren Unsicherheiten der Lehrer auf, ein Punkt, der für den Unterrichtserfolg möglicherweise von großer Bedeutung ist; man vgl. in diesem Zusammenhang auch die interessanten Ausführungen von Lester.) Übrigens lassen sich bei einer sorgfältigen Behandlung der Division im Sinne der Gleichungskettenmethode sehr gut Verbindungen zu den wichtigen Grundvorstellungen und auch Anwendungen der Division, nämlich zum Messen und Teilen, herstellen, und zwar zum Messen bei den anschaulichen Vorarbeiten für die GL-Methode im Bereich der natürlichen Zahlen sowie zum Teilen bei der entscheidenden Argumentation im Bereich der rationalen Zahlen. Weitere vergleichende Untersuchungen zwischen GL und anderen Methoden sind zur Ergänzung und Abrundung des Bildes sehr wünschenswert.

5.8 Einige Folgerungen

Wie schon bei den übrigen Rechenoperationen ist auch bei der Division eine starke Häufung der Schülerfehler bei jeweils nur einigen wenigen Fehlertypen feststellbar. Daher ist eine gezielte Bekämpfung bzw. Vorbeugung erfolgversprechend. Folgende konkreten Maßnahmen empfehlen sich (wegen allgemeiner Hinweise vgl. 6):

– eine stärkere Betonung der anschaulichen Grundvorstellungen (Messen, Teilen) der Division sowie ein stärkerer Rückgriff hierauf bei der Lösung von einfachen Aufgaben wie $\frac{4}{5} : 2$, $1 : \frac{1}{5}$ oder $\frac{4}{5} : \frac{2}{5}$, besonders ausgiebig vor der Regelformulierung, aber bewußt auch noch später, um die Schüler flexibler zu machen und ein stures, rein schematisches Aufgabenlösen (etwas) zu verhindern,

– eine breitere, anschauliche Einübung und Behandlung der Vorstellung eines Bruches als Teil mehrerer Ganzer,

– ein gezieltes Kontrastieren von Aufgaben zur Addition und Division (spezieller) gleichnamiger Brüche, um so bei den Schülern mehr Widerstand gegen den naheliegenden – meist nur auf Flüchtigkeit beruhenden – fehlerhaften Transfer zu D 1 aufzubauen,

– ein bewußtes Gegenüberstellen von Multiplikations- und Divisionsaufgaben im allgemeinen Fall, wie schon in 4.7 ausgeführt, aber insbesondere auch im Fall »Bruch durch natürliche Zahl«,

– eine sorgfältige Behandlung des fehlerträchtigen Falles »Bruch durch natürliche Zahl«[4]: Neben anschaulichen Lösungen mit Hilfe des quasikardinalen Aspekts auf der Grundlage des Teilens (ohne Regelformulierung) sollte in diesem Fall wiederum die Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen bewußt angesprochen werden,

– Ausformulierung nur einer Regel zur Division (vgl. auch Klauer), um fehlerhafte Überlagerungen und Verwechslungen mit den Regeln im Fall »Bruch durch natürliche Zahl« zu vermeiden; ausdrückliche Erwähnung der Einbettung $n = \frac{n}{1}$ sowie Benutzung einer präzisen – jedoch noch griffigen – Regelformulierung, die durch entsprechende klare Angaben Kehrwertfehler (kein Kehrwert, Kehrwert vorne, zweimal Kehrwert) bei der Division möglichst verhindert.

6
Einige abschließende Bemerkungen

(1) Die von uns im Bereich der Bruchrechnung analysierten Schülerfehler waren nur selten zufällig und regellos, sondern wiesen sehr häufig eine bestimmte Regelstruktur auf und wurden oft sogar systematisch gemacht. Die hierbei beobachtete starke Konzentration der Fehler auf nur einige wenige dominante Fehlertypen erleichtert gezielte Maßnahmen. Zwei äußerst fehlerträchtige Fehlerrahmen oder -frames sind deutlich zu erkennen, und zwar einmal der Multiplikationsrahmen $\frac{a}{b} \circ \frac{c}{d} = \frac{a \circ c}{b \circ d}$ bzw. $n \circ \frac{a}{b} = \frac{n \circ a}{b}$, der bei der Addition und Subtraktion von Brüchen bzw. von natürlichen Zahlen und Brüchen für einen Großteil der Fehler verantwortlich ist (A 1, A 2, S 1, S 2) sowie der Additionsrahmen $\frac{a}{b} \circ \frac{c}{b} = \frac{a \circ c}{b}$, der entsprechend bei der Multiplikation und in Sonderfällen auch bei der Division gleichnamiger Brüche eine sehr große Rolle spielt (M 1, D 1), während er bei der Multiplikation ungleichnamiger Brüche (natürlich) in seiner Bedeutung als Fehlerquelle deutlich zurücktritt. Die Betonung des quasikardinalen Aspekts der Bruchzahlen (bei den entsprechenden Additions- und Subtraktionsaufgaben) sowie ein bewußtes Kontrastieren der Additions-/Subtraktionsaufgaben mit den entsprechenden Multiplikationsaufgaben kann helfen, die Schüler gegen die fälschliche Anwendung des Additions- und des Multiplikationsrahmens resistenter zu machen. (Für weitere Gesichtspunkte vergleiche insbesondere auch (3)).

(2) Bei allen vier Rechenoperationen bereiten die »gemischten Fälle« (Bruch und natürliche Zahl kombiniert) wesentlich mehr Schwierigkeiten als die Standardfälle (beide Zahlen Brüche). Neben deutlichen Defiziten in den anschaulichen Grundlagen (vgl. (3)) und einer Unterschätzung und entsprechend einer Vernachlässigung dieser Fälle speziell bei der Addition und z. T. auch bei der Subtraktion durch die Lehrer sind hierfür vor allem Schwierigkeiten der Schüler mit der Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen verantwortlich. Daher ist eine gründliche und anschauliche Behandlung dieser Einbettung unter gleichzeitiger Beachtung der fehlerhaften Standardstrategien $n = \frac{n}{n}$ bzw. $n = \frac{n}{m}$ (wobei m der nächste »greifbare« Nenner in der Aufgabe ist) äußerst wichtig.

(3) Beim Lösen von Aufgaben der Bruchrechnung gehen viele Schüler sehr mechanisch und formal vor, wie unsere Fehleranalysen belegen. Ihr Lösungsweg ist oft sehr starr und nur wenig flexibel. Krasse Beispiele hierfür sind die sehr häufig extrem formalen und deshalb oft fehlerträchtigen Rechnungen bei Aufgaben wie $3 + \frac{1}{5}$, $5 - \frac{1}{3}$ $4 \cdot \frac{1}{7}$ oder $1 : \frac{1}{5}$ anstelle einer Lösung durch unmittelbaren Rückgriff auf anschauliche Bruchvorstellungen. Ein Beleg hierfür ist aber auch, daß unter semantischen Gesichtspunkten deutlich unterschiedlich schwere Aufgaben wie $4 \cdot \frac{1}{7}$ und $\frac{2}{11} \cdot 5$ praktisch gleich häufig richtig bzw. falsch gelöst werden, daß also vielfach für die Lösungshäufigkeit nur rein die syntaktische Ebene – auf der kein Unterschied zwischen den beiden vorstehenden Aufgaben besteht – entscheidend ist. Deutliche Defizite bei den Bruchvorstellungen offenbaren aber auch die sehr schwachen Ergebnisse

bei Aufgaben wie 3 : 5. Daher ist es äußerst wichtig, daß bei den Schülern vor dem Rechnen anhand von Regeln zunächst sorgfältig anschauliche Bruchvorstellungen aufgebaut werden und diese auch bewußt beim Lösen von Aufgaben – besonders zu Beginn, aber auch immer wieder mal später nach der Regelformulierung! – eingesetzt werden. Wichtig ist aber auch, daß die Schüler dazu angehalten werden zu prüfen, ob ein gefundenes Ergebnis von der Größenordnung her überhaupt stimmen kann. Dieses Abschätzen muß ganz bewußt eingeübt werden, da sonst die Schüler hiermit große Schwierigkeiten haben, wie die von Post geschilderten Ergebnisse einer amerikanischen Repräsentativerhebung eindrucksvoll belegen.

(4) Zur Vermeidung von rein formalen Regelanwendungen ist eine sorgfältige und nicht zu frühzeitige Regelableitung unbedingt erforderlich. Dieses Vorgehen ermöglicht ein besseres Verständnis, eine bessere langfristige Rückerinnerung und eine bessere Rekonstruktion der Regel im Falle des Vergessens. Wichtig ist aber auch, daß die Rechenregeln und die inhaltlichen Bruchvorstellungen zueinander in Beziehung gesetzt werden, und nicht im Kopf der Schüler – wie häufiger zu beobachten – isoliert und unabhängig voneinander existieren. Im Verlauf des Bruchrechenlehrgangs sollten nur möglichst wenige, einprägsame Rechenregeln formuliert werden (vgl. auch 4.7, 5.3 und 5.8).

(5) Unsere Befunde sprechen massiv für einen Beginn der Bruchrechnung mit der Addition und gegen einen Beginn mit der Multiplikation. Während im Bereich der Multiplikation keine signifikanten Unterschiede zwischen den Lösungsquoten bestehen, fanden wir bei der Addition, Subtraktion und auch bei der Division (dort bedingt durch unterschiedliche Methoden) krasse Unterschiede zugunsten eines Beginns mit der Addition (vgl. 3.2 und 5.7). Eine wichtige Ursache hierfür ist die häufigere Übertragung des Multiplikationsrahmens auf die Addition und Subtraktion durch die Schüler, die mit der Multiplikation begonnen haben, wogegen der Additionsrahmen schon wegen seines hohen Komplexitätsgrades bei beiden Gruppen vergleichbar häufig bei der Multiplikation und Division fehlerhaft verwandt wird.

Neben diesen empirischen Befunden sprechen aber auch eine Reihe anderer Argumente für den Additionsbeginn: So erfolgt z. B. dann die Abfolge der Rechenoperationen entsprechend dem »gesunden Menschenverstand« (Kirsch), brauchen die einfachen und alltäglichen Sachaufgaben mit Additions- oder Subtraktionsstruktur nicht gekünstelt bis fast an das Ende des Lehrgangs geschoben zu werden, stehen die zur Vereinfachung einer Reihe von Aufgaben und für Größenvorstellungen notwendigen gemischten Zahlen frühzeitig zur Verfügung oder kann man so gut gestuft schrittweise die Multiplikation einführen.

(6) Nach unseren Befunden bringt der Einsatz von Operatoren in der Bruchrechnung – in der bei uns üblichen formalisierten Form – in der Schulrealität massive Nachteile und kaum Vorteile mit sich. So können wir trotz des erhöhten Stoff- und Zeitumfangs bei den drei Gebieten, wo ggf. Operatoren eingesetzt werden, nämlich beim Kürzen, Multiplizieren und Dividieren, keine Vorteile des Operatoreinsatzes insgesamt erkennen. Genauer gilt: während beim Kürzen und Multiplizieren keine signifikanten Vorteile erkennbar sind, beobachten wir im Fall der Division in der Schulrealität für viele Lehrer massive Nachteile (vgl. 5.7). Der mit dem Operatoreinsatz stark verknüpfte Beginn des Bruchrechenlehrgangs mit der Multiplikation bringt – wie im vorigen Absatz belegt – massive Nachteile bei der Addition und Subtraktion mit sich, ebenso wie die Zerlegung der Bruchzahlen bei Operatorkonzepten in zwei recht selbständige Teilkomponenten nach unserer Einschätzung die Benutzung des Multiplikationsrahmens bei der Addition und Subtraktion begünstigt. Auch zahlt sich das formale Arbeiten mit Operatoren offenbar unter Anwendungsgesichtspunkten nicht aus (vgl. 4.6). Wegen weiterer Probleme im Zusammenhang mit dem Einsatz von Operatoren sei an dieser Stelle auf eine entsprechende Arbeit von Schwartze verwiesen.

(7) Bei unserer Untersuchung konnten wir häufiger das Phänomen beobachten, daß einige Fehler in manchen Klassen gehäuft auftraten, während sie wiederum in anderen Klassen nur eine sehr geringe oder keine Rolle spielten, und dies trotz einer – nach den erhobenen Daten zu

urteilen – praktisch gleichen Vorgehensweise dieser Lehrer. Hierfür könnte nach unserer Einschätzung von entscheidender Bedeutung sein, ob und wieweit die betreffenden Lehrer typische Schwierigkeiten und Fehlerstrategien der Schüler in der Bruchrechnung kennen und hieraus bewußt Konsequenzen für die Gestaltung ihres Unterrichts ziehen. Die vorliegende Arbeit will hierzu entsprechende Hilfen und Anregungen bereitstellen.

Literatur

Brueckner, L. J.: Analysis of errors in fractions. In: Elementary School Journal, 1928, S. 760–770

Brüning, A./Spallek, K.: Einführung der Brüche ohne Operatoren. In: Didaktik der Mathematik, 2/1981, S. 116–130

Carpenter, Th. P. u. a.: Notes from National Assessment: addition and multiplication with fractions. In: Arithmetic Teacher, Febr. 1976, S. 137–141

Daubert, K./Gerster, H.-D.: Differenzierende Maßnahmen zur Vorbeugung und zur Behebung von Schülerfehlern beim Rechnen mit Brüchen. In: Pädagogische Welt, 1983, S. 758–763

Flade, L.: Zur Entwicklung der Rechenfertigkeiten und zu einigen typischen Schülerfehlern. In: Mathematik in der Schule, 1976, S. 371–376

Goffman, E.: Frame Analysis. Cambridge, Mass., Harvard University Press 1974

Griesel, H.: Der quasikardinale Aspekt in der Bruchrechnung. In: Der Mathematikunterricht, 4/1981, S. 87–95

Hart, K.: The Understanding of fractions in the secondary school. In: Proceedings of the second International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Osnabrücker Schriften zur Mathematik, 1978, S. 177–183

Hasemann, K.: On difficulties with fractions. In: Educational Studies in Mathematics, 1981, Heft 1, S. 71–87

Kirsch, A.: Gehört die Multiplikation vor die Addition? Zur Operatormethode in der Bruchrechnung und möglichen Alternativen. In: Der Mathematikunterricht, 1/1975, S. 7–18

Klauer, K. J.: Kognitive Prozesse bei der Multiplikation und Division von Brüchen. Eine Lehrzielanalyse. In: Zeitschrift für Empirische Pädagogik und Pädagogische Psychologie, 8, 1984, S. 77–90

Lester, F. K.: Preparing Teachers to Teach Rational Numbers. In: Arithmetic Teacher, 1984, Number 6, S. 54–56

Lörcher, G. A.: Diagnose von Schülerschwierigkeiten beim Bruchrechnen. In: Pädagogische Welt, März 1982, S. 172–180

Padberg, F.: Didaktik der Bruchrechnung, Freiburg 1978

Padberg, F.: Wege zur Ableitung der Divisionsregel der Bruchrechnung. Bestandsaufnahme – Beurteilung – Folgerungen. In: Journal für Didaktik der Mathematik, 1/1982, S. 67–88

Payne, J. N.: Curricular Issues: Teaching Rational Number. In: Arithmetic Teacher, Febr. 1984, S. 14–17

Peck, D. M./Jencks, St. M.: Conceptual issues in the teaching and learning of fractions. In: Journal for Research in Mathematics Education, 1981, S. 339–348

Post, Th. R.: Fractions: Results and Implications from National Assessment. In: Arithmetic Teacher, May 1981, S. 26–31

Postel, H.: Größen- oder Operatorkonzept in der Bruchrechnung? In: Der Mathematikunterricht, 4/1981, S. 16–46

Radatz, H.: Fehleranalysen im Mathematikunterricht, Braunschweig 1980

Schwartze, H.: Zur Problematik der Einführung von Addition und Multiplikation in Q durch Operatorverkettungen. In: Der Mathematikunterricht, 4/1978, S. 75–89

Seyfferth, S.: Bruchrechnung und natürliche Sprache. In: Der Mathematikunterricht, 1/1975, S. 35–47

Weis, V.: Mechanisierung beim Lösen mathematischer Aufgaben und Möglichkeiten zu ihrer Vermeidung. In: Schule und Psychologie, 1970, S. 57–74

Anschrift:
Prof. Dr. Friedhelm Padberg, Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, Universitätsstraße, 4800 Bielefeld 1

Anmerkungen

1) Fehlendes Einrichten bei der umständlichen Berechnung der Aufgaben vom Typ $n - \frac{a}{b}$ wurde hier <u>nicht</u> als Fehler gewertet.

2) Zur Vermeidung von Verfälschungen des Ergebnisses infolge von Unterschieden in den Aufgabenpositionen haben wir je Typ jeweils nur Aufgaben auf vergleichbaren Positionen ausgewählt. Aus demselben Grund haben wir bei der Division gleichnamiger Brüche und beim Aufgabentyp »natürliche Zahl durch Bruch« eventuell fehlendes Kürzen bzw. Einrichten nicht als Fehler gewertet.

3) Im umgekehrten Fall, nämlich »Natürliche Zahl durch Bruch«, wird deutlich seltener dieser Fehler gemacht, da die Kehrwertbildung eines Bruches unproblematischer ist.

4) Der Fall »Natürliche Zahl durch Bruch« muß ähnlich sorgfältig behandelt werden. Genauere Untersuchungen sind hier noch wünschenswert.