FRIEDHELM PADBERG

Über Schülerfehler im Bereich der Bruchrechnung

Die Bruchrechnung bereitet bekanntlich vielen Schülern große Schwierigkeiten, und zwar sowohl bei der Behandlung in der Klasse 6 wie aber auch noch weithin bis in die höheren Klassen. Eine Vergrößerung des unterrichtlichen Erfolges ist daher unbedingt wünschenswert. Wichtige Grundlage hierfür ist eine sorgfältige, vergleichende Analyse von verschiedenen *Einführungswegen* bezüglich des Bruchzahlbegriffs wie insbesondere auch bezüglich der Ableitung der Rechenregeln, um so zu einem für die bestimmte Klasse möglichst „optimalen" Weg zu gelangen (für genauere Ausführungen vgl. man Padberg 1978 sowie Padberg 1982) sowie gerade auch die Analyse von *Schülerfehlern*, um so Problembereiche zu erkennen und auf dieser Basis rechtzeitig gezielt Gegenmaßnahmen oder – im späteren Unterrichtsverlauf – gezielte, individuelle Fördermaßnahmen ergreifen zu können. Im folgenden wollen wir uns genauer auf der Grundlage eigener empirischer Befunde mit der *Analyse von Schülerfehlern* beschäftigen und hieraus erste Folgerungen ziehen.

Unter den verschiedenen methodischen Möglichkeiten zur Analyse von Schülerfehlern (Analyse schriftlicher Arbeiten, „lautes Denken" der Schüler, Beobachtung der Schüler bei der Aufgabenbearbeitung, diagnostisches Interview / informelles Gespräch; man vgl. z.B. Radatz 1980) haben wir uns bewußt für eine *Analyse schriftlicher Schülerarbeiten* entschieden, um so eine breitere Basis für unsere Aussagen zur Verfügung zu haben. Nach einer Bestandsaufnahme vorliegender deutscher und insbesondere amerikanischer Fehleruntersuchungen zur Bruchrechnung sowie einer Voruntersuchung von uns im Jahre 1979 haben wir die hier zugrundegelegte Untersuchung im Herbst 1981 zu Beginn des 7. Schuljahres in sieben Klassen an drei verschiedenen Realschulen im Bielefelder Raum durchgeführt. Die untersuchten Klassen benutzten das gleiche neuere Schulbuch. Die Bruchrechnung wurde hier im Sinne des Mischkonzeptes (also Komponenten des Größen- bzw. Operatorkonzeptes werden an den jeweils hierfür geeigneteren Stellen benutzt) dargestellt, also im Sinne einer Konzeption, über die in der neueren didaktischen Diskussion innerhalb der Bundesrepublik Deutschland weitgehende Einigkeit besteht. Eine Untersuchung der genauen methodischen Vorgehensweise der beteiligten Lehrer erfolgte durch eine standardisierte Befragung. Im Test isolierten wir bewußt durch die Auswahl entsprechender Aufgaben die einzelnen Schwierigkeitsfaktoren, um so typische Fehler bei den einzelnen Rechenoperationen zu erhalten. Ferner untersuchten wir die Klassen bewußt zu *Beginn des 7. Schuljahres* unmittelbar nach den Sommerferien, um so aussagekräftigere „Langzeit"effekte feststellen zu können. Folgende Fragestellungen interessierten uns in diesem Zusammenhang:

(1) Welche fehlerhaften Strategien benutzen Schüler beim Erweitern/Kürzen, Umwandeln/Einrichten, beim Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren gerade auch in Abhängigkeit von speziellen Schwierigkeitsfaktoren? Gibt es Problembereiche, die sich bei verschiedenen Aufgaben wiederfinden? Gibt es Aufgabentypen, die von vielen Lehrern unterschätzt und vernachlässigt werden? Ist eine Konzentration der Fehler auf relativ wenige Fehlertypen feststellbar und sind daher auf dieser Basis gezielte Maßnahmen erfolgversprechend? Bestätigen die empirischen Befunde Vorteile des Mischkonzeptes gegenüber dem Größenkonzept vor allem im Bereich der Multiplikation und Division?

(2) Wieweit können die Schüler häufig benutzte Rechenregeln (Erweitern, Kürzen, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) richtig formulieren? Welche charakteristischen Schwierigkeiten treten hierbei auf? Wieweit können die Schüler die im Unterricht gegebene Begründung der Rechenregeln (Multiplikation, Division) an konkreten Beispielen reproduzieren?

(3) Wieweit hängt die Schülerleistung bei den vier Rechenoperationen von der Form der Präsentation ab (Aufgabenstellung durch Text und (erläuternde) Zeichnung – rein zahlenmäßige Aufgabenstellung)? Wieweit können die Schüler eine durch Text und (erläuternde) Zeichnung gegebene Aufgabe in die zugehörige rein zahlenmäßige Aufgabe übersetzen?

(4) Lassen sich bei der Bearbeitung von Textaufgaben (Multiplikation/Division) typische Fehlerstrategien erkennen (erste Befunde)?

1. Fehlerhafte Schülerstrategien bei den Rechenoperationen

1.1 Kürzen

Das Kürzen wie auch das Erweitern wurde in den untersuchten Klassen mit Hilfe von Rechtecken – also im Sinne des Größenkonzeptes – sowie ergänzend mittels Operatoren eingeführt. Kürzungsaufgaben („kürze soweit wie möglich“) erwiesen sich mit richtigen Lösungen von weit über 90% als völlig unproblematisch. Deutliche Abfälle ergaben sich nur bei Sonderfaktoren (Beispiele: Assoziationsfehler bei entsprechenden Aufgaben wie $\frac{9}{18} = \frac{1}{9}$, Aufgaben der Form $\frac{n}{n}$, Vorgabe großer Zahlen).

Man muß allerdings deutlich unterscheiden zwischen der Beherrschung der *Fertigkeit* des Kürzens und der *effektiven Durchführung* des Kürzens im Anschluß an eine Aufgabe. Nach Befunden von Lörcher (1982) sowie eigenen Befunden wird häufig nach dem Abschluß von Rechenoperationen das Kürzen nicht durchgeführt. Dies beruht jedoch – wie obige Ergebnisse zeigen – *nicht* auf einer mangelnden Kenntnis der Kürzungsprozedur, sondern vielmehr auf Flüchtigkeit oder dem Gefühl, mit der bisherigen Ausrechnung schon „genügend geleistet“ zu haben.

1.2 Erweitern

Das Erweitern erwies sich mit ähnlich hohen Anteilen richtiger Lösungen wie das Kürzen ebenfalls als im wesentlichen völlig problemlos. Eine gewisse Unsicherheit der Schüler wurde nur erkennbar bei den Erweiterungsaufgaben, die auf die Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen abhoben ($5 = \frac{}{3}$, $5 = \frac{}{1}$), wie hier an der relativ hohen Quote nicht bearbeiteter Aufgaben deutlich wurde.

1.3 Umwandeln/Einrichten

Das Umwandeln wie Einrichten erwies sich mit richtigen Lösungsanteilen von ebenfalls über 90 % als völlig unproblematisch. In der Literatur genannte Fehlertypen (fehlerhaftes Einrichten: (1) $\frac{4}{5} = 1\frac{1}{5}$, (2) $\frac{4}{5} = 1\frac{1}{4}$; fehlerhaftes Umwandeln $2\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$) spielten keine Rolle.

1.4 Addition/Subtraktion

Die Addition und Subtraktion wurde in den untersuchten Klassen nach dem Größenkonzept behandelt. Aufgaben des Typs Bruchzahl ± Bruchzahl (also $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}$) wurden sehr weitgehend richtig gelöst, ungleichnamige Aufgaben wegen der zusätzlichen Hauptnennerbestimmung etwas seltener als gleichnamige Aufgaben (80 % gegenüber 90 % richtig). Die wenigen Fehler lassen sich gut gezielt bekämpfen, da sie sich bei Addition wie Subtraktion jeweils stark (zu rund 50 %) auf einen Hauptfehlertyp konzentrieren:

Addition: Beispiel: $\frac{3}{8} + \frac{2}{5} = \frac{5}{13}$, also: $\frac{\text{Zähler} + \text{Zähler}}{\text{Nenner} + \text{Nenner}}$,

Subtraktion: Beispiel: $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$, also: $\frac{|\text{Zähler} - \text{Zähler}|}{|\text{Nenner} - \text{Nenner}|}$

Diese Fehler wurden von den entsprechenden Schülern meist systematisch gemacht (also bei *mehreren* der entsprechenden Aufgaben; „systematischer Fehler"), teilweise wurde sogar eine entsprechende fehlerhafte Regel an der entsprechenden Teststelle ausformuliert. So machten durchschnittlich vier Schüler je Klasse obigen Additionsfehler als systematischen Fehler, während der Subtraktionsfehler nur stärker in einer Klasse massiert auftrat.

Beide genannten Fehlertypen lassen sich naheliegend durch eine ungenügende Bruchvorstellung erklären (die Zahlen im Zähler wie im Nenner werden als völlig getrennte Zahlen aufgefaßt) oder – bei vorhergehender Behandlung der Multiplikation – durch einen falschen Transfer von der Multiplikation her. Die Fehler traten häufiger bei ungleichnamigen Brüchen auf als bei gleichnamigen Brüchen. Der in der Literatur (Brückner 1928, Lankford 1972, Flade 1976) ebenfalls häufiger genannte systematische Fehler der Addition bzw. Subtraktion von Bruchzahlen unter Beibehaltung eines der Nenner (Beispiel: $\frac{5}{7} + \frac{3}{9} = \frac{5+3}{9}$ bzw. $\frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \frac{5-3}{8}$) spielte in unseren Untersuchungen keine Rolle.

Bei Aufgaben, in denen speziell einer der beiden Summanden oder der Minuend eine *natürliche Zahl* war ($n \pm \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} + n$), war – für uns zunächst überraschend – die Quote richtiger Lösungen *niedriger* als im gerade besprochenen Fall. Typisch hier und mitverantwortlich für die Höhe der Fehlerquote war die oft sehr formale Vorgehensweise: $\frac{1}{3} + 4 = \frac{1}{3} + \frac{4}{1} = \frac{1}{3} + \frac{12}{3} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$. Eine Lösung durch Rückgriff auf die Bruchvorstellung ohne formalen Kalkül erfolgte nur relativ selten. Auch hier massierten sich die Fehler auf zwei Haupttypen:

(1) Fehler im Zusammenhang mit der Einbettung der natürlichen Zahlen in die Menge der Bruchzahlen. So wurde häufig gesetzt: $5 = \frac{5}{5}$, allgemein $n = \frac{n}{n}$ bzw. $5 = \frac{5}{m}$, wobei m der nächste in der Aufgabe vorkommende Nenner war.

(2) Beispiel: $5 + \frac{2}{3} = \frac{5+2}{3}$ bzw. $5 - \frac{2}{3} = \frac{5-2}{3}$, also $\frac{\text{Zahl + Zähler}}{\text{Nenner}}$ bzw. $\frac{|\text{Zahl} - \text{Zähler}|}{\text{Nenner}}$.
Wir vermuten – in Übereinstimmung mit Lörcher und Brückner – als Ursache für diese Fehler eine Unterschätzung des Schwierigkeitsgrades und daher Vernachlässigung dieses Aufgabentyps durch die Lehrer („völlig trivial").

1.5 Multiplikation

Die Multiplikation wurde bei dem vorliegenden Konzept dominant im Sinne des Anwendens eines Operators auf eine Größe eingeführt, sowie bei einem Teil der Klassen noch *zusätzlich* über die Verkettung von Operatoren.

Im Fall *Bruchzahl mal Bruchzahl* ($\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$) lösten im Mittel rund zweidrittel der Schüler gleichnamige (!), dagegen rund dreiviertel der Schüler die ungleichnamigen Aufgaben richtig. Der auf den ersten Blick überraschende Unterschied zwischen gleich- und ungleichnamigen Brüchen bei der Multiplikation (!) erklärt sich leicht durch den Hauptfehlertyp, auf den sich rund die Hälfte *aller* Multiplikationsfehler dieses Aufgabentyps massierten:

Beispiel: $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{18}{10}$, also: 1. Hauptnennerbestimmung,
2. $\frac{\text{Zähler} \cdot \text{Zähler}}{\text{Hauptnenner}}$.

Während bei gleichnamigen Brüchen im Mittel 3 bis 4 Schüler je Klasse vorstehenden systematischen Fehler machten, waren es bei ungleichnamigen Brüchen im Mittel nur 2 Schüler je Klasse. Nach unseren bisherigen Befunden könnte die Abfolge „erst Multiplikation, dann Addition" die Entstehung dieses Fehlers begünstigen (bei den Klassen, die die umgekehrte Reihenfolge wählten, trat der Fehler kaum auf). Im Vergleich zu anderen Untersuchungen lagen die Lösungsquoten im Bereich der Multiplikation bei unserer Untersuchung ausgesprochen hoch. Dies könnte mit dem gewählten Konzept zusammenhängen (man vgl. auch 1.7). Die bei Untersuchungen in Klassen, die auch im Bereich der Multiplikation nach dem Größenkonzept vorgingen, häufiger zusätzlich genannten Fehler (z.B. Kehrwertfehler, Verwechslungen mit der Division) spielten in unserer Untersuchung keine Rolle.

Im Fall *Bruchzahl mal natürliche Zahl bzw. natürliche Zahl mal Bruchzahl* ($\frac{a}{b} \cdot n$ bzw. $n \cdot \frac{a}{b}$) massierten sich ebenfalls die relativ wenigen Fehler rund zur Hälfte auf einen Fehlertyp:

Beispiel: $\frac{2}{11} \cdot 5 = \frac{2 \cdot 5}{11 \cdot 5} = \frac{10}{55}$.

Durchschnittlich zwei Schüler je Klasse begingen diesen Fehler als systematischen Fehler. Ursächlich hierfür ist u.E. aufgrund der im Test erkennbaren Zwischenschritte nicht ein Verwechseln mit dem Erweitern (wie es mehrfach in der Literatur behauptet wird), sondern sind wiederum Schwierigkeiten mit der Einbettung von den natürlichen Zahlen in die Menge der Bruchzahlen. So wurde auch hier häufig gesetzt $n = \frac{n}{n}$.

1.6 Division

Die Division von Bruchzahlen wurde in allen untersuchten Klassen über das Anwenden eines Gegenoperators auf eine Größe eingeführt (vgl. Padberg 1982).

Im Fall *Bruchzahl : Bruchzahl* ($\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$) fanden wir mit im Mittel rund 70 % richtiger Lösungen eine mit der Multiplikation vergleichbare hohe Quote, die im Vergleich zu in der Literatur beschriebenen Untersuchungen – die allerdings fast immer auch bei der Division das *Größen*konzept benutzten – ausgesprochen günstig war (man vgl. auch 1.7).

Bei gleichnamigen (!) Brüchen massierten sich die Fehler zu dreiviertel auf nur 2 Fehlertypen:

(1) Beispiel: $\frac{4}{5} : \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$, also: $\frac{\text{Zähler : Zähler}}{\text{Nenner}}$.

(2) Beispiel: $\frac{4}{5} : \frac{2}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5}$, also: irrtümlich Bildung des Kehrwertes des ersten Bruches.

Der erste Fehlertyp trat nur bei geeigneten Zahlen auf. Offensichtlich erfolgte hier ein falscher Transfer vom Bereich der Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche. Beide Fehlertypen waren stark lehrerabhängig und traten nur in einigen der untersuchten Klassen gehäufter als systematischer Fehler auf (bei im Mittel 4 Schülern je Klasse dort). Eine andere Schreibweise – nämlich statt $\frac{4}{5}$ ausführlicher zunächst 4 Fünftel – könnte Analogien zu den vertrauten Größen mit natürlichen Zahlen als

Maßzahlen aufzeigen und diese Fehler abbauen helfen (man vgl. auch Griesel (1981): „quasikardinaler Aspekt").

Bei ungleichnamigen Brüchen massierten sich die Fehler zu rund einem Drittel auf den obigen Fehlertyp (2).

Bei unserer Untersuchung spielten die in der Literatur auch genannten Fehler (es handelte sich dort allerdings im allgemeinen um das Größenkonzept!) „Multiplikation statt Division" oder „zweimalige Kehrwertbildung" keine Rolle.

Der Fall *Bruchzahl durch natürliche Zahl bzw. umgekehrt* (also $\frac{a}{b}$: n bzw. n : $\frac{a}{b}$) bereitete den Schülern etwas mehr Kopfzerbrechen, wie an den niedrigeren Lösungsquoten erkennbar wurde. Die beiden Hauptfehler waren hier:

(1) Kehrwertbildung der 1. Zahl (analog wie oben),
(2) Unsicherheit bei der Einbettung der natürlichen Zahlen in die Menge der Bruchzahlen (also fehlerhafte Gleichsetzung $n = \frac{n}{n}$).

1.7 Gegenüberstellung: Größenkonzept – Mischkonzept

Das untersuchte Mischkonzept (in der Tabelle mit M abgekürzt) sowie das (traditionelle) Größenkonzept (G) unterscheiden sich am stärksten im Bereich der Multiplikation und Division. In unserer Voruntersuchung untersuchten wir ebenfalls zu Beginn des 7. Schuljahrs sieben Realschulklassen, die allerdings – abweichend von der hier geschilderten Untersuchung – nach dem *Größenkonzept* unterrichtet wurden. Die folgenden Aufgaben waren bei beiden Untersuchungen identisch. Die Prozentangaben in der Tabelle geben den Prozentsatz von Schülern an, die die Aufgaben jeweils im Mittel richtig lösten.

Gegenüberstellung: Größenkonzept (G) – Mischkonzept (M)

(1) Multiplikation

	G	M
1) $\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n}$ (2 Aufg.)	32,5 %	66,3 %
2) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ (2 Aufg.)	60,7 %	72,3 %
3) $\frac{a}{b} \cdot c$ (1 Aufg.)	57,4 %	79,3 %

(2) Division

	G	M
1) $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ (1 Aufg.)	44,2 %	74,0 %

2)	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ (1 Aufg.)	50,0 %	70,8 %
3)	$\frac{a}{b} : c$ (2 Aufg.)	20,9 %	58,4 %
4)	$a : \frac{b}{c}$ (2 Aufg.)	32,6 %	63,6 %
5)	$m : n$ (1 Aufg.)	41,0 %	66,7 %

Die jeweils deutlich höheren Werte zugunsten des Mischkonzepts im Bereich der Multiplikation und Division – bei vergleichbaren Werten im Bereich der Addition/Subtraktion – könnten darauf hindeuten, daß die Ausnutzung der Stärken des Größen- wie Operatorkonzepts an den jeweils geeigneten Stellen im Sinne des Mischkonzepts zu einer deutlichen Verbesserung der Schülerleistungen im Bereich der Bruchrechnung führen kann.

2. Regeln

In unseren Tests verfolgten wir in Bezug auf die Regeln zwei Zielsetzungen:

a) Wieweit beherrschen die Schüler die Regelformulierung bezüglich der vier Rechenoperationen sowie bezüglich des Kürzens und des Erweiterns?

b) Wieweit können Schüler die Begründung der Regeln (exemplarisch für die Multiplikation bzw. Division), die im Schulbuch und durch die Lehrer sorgfältig gebracht wurden, wiedergeben?

Nur rund ein Drittel bis maximal gut die Hälfte (bei der memotechnisch leichten Multiplikationsregel) konnten die Regeln im großen und ganzen korrekt formulieren. Bei den falschen Antworten formulierten einige Schüler auch explizit die benutzten falschen Rechenstrategien aus, am häufigsten bei der Additionsregel. Ein Vergleich des Prozentsatzes richtiger Regelnennungen mit dem Prozentsatz richtiger Lösungen entsprechender Aufgaben zeigte einen klaren Kontrast auf zwischen der korrekten *Formulierung* einer Regel und ihrer korrekten *Anwendung*. Die Versprachlichung einer automatisierten, weithin fehlerfrei beherrschten Tätigkeit ist also selbst noch in 7. Klassen von Realschulen problematisch. (Hierbei standen die Fragen nach den Regelformulierungen bewußt ziemlich am Ende des Tests, *nach* den entsprechenden Aufgaben jeweils. Diese Position war allerdings nicht die Ursache für die nur mäßige Beantwortung.) Im folgenden einige krasse Beispiele:

Kürzen: ... Teiler und Nenner durch ein gleichgroßes Vielfaches kürzt,

... den gemeinsamen Teiler durch die beiden Zahlen dividiert und das Ergebnis neben die durchgestrichene Zahl schreiben,

... die obere Zahl des ersten Bruches und die untere Zahl des zweiten Bruches anguckt und versucht sie zu kürzen.

Multiplikation: ... Die Hauptnenner und Nenner malnehmen. Haupt mal Haupt und Nenner mal Nenner,

... sie zunächst gleichnamig macht und dann Zähler minus Zähler nimmt und den Nenner beibehält.

Division: ... multipliziert durch den Kehrwert. Dann schreibt man auf einen Bruchstrich,

... den Zähler mit dem Nenner multipliziert und den Nenner mit dem Zähler,

... zunächst sie gleichnamig macht, dann auf einen Bruchstrich schreibt und nun zusammenzieht.

Die Beispiele verdeutlichen klar Schwachstellen der Schüler: Unbeholfenheit bei den Formulierungen, Erwähnung von unwichtigen Nebensächlichkeiten, Unsicherheit bzw. Verwechslung von Fachtermini, Verwechslung der Regeln.

Im entsprechenden Schulbuchkonzept wurde zurecht ein großer Wert auf sehr sorgfältige Regel*ableitungen* gelegt, die auch laut eigener Aussage von allen Lehrern entsprechend im Unterricht erarbeitet wurden. Durch folgende Aufgabe versuchten wir das – rund ein halbes Jahr später – noch vorhandene Wissen über die *Begründung* der Multiplikationsregel (analog auch der Divisionsregel) zu testen:

„Einer deiner Mitschüler war krank, als in der Schule die Multiplikation von Bruchzahlen behandelt wurde. Nenne ihm die Multiplikationsregel. ... Zurecht fragt dein Mitschüler: ‚*Warum* multipliziert man Bruchzahlen *gerade auf diese Art*?‘ Begründe dies am Beispiel $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$."

Eine auch nur annähernde Wiedergabe der Begründung leistete kein einziger der im Test untersuchten Schüler. Sofern die Aufgabe bearbeitet wurde, rechneten die Schüler im wesentlichen nur das genannte Beispiel durch.

Die von uns gegebene Aufgabe war zweifelsohne recht komplex und – wie die Ergebnisse zeigten – vermutlich zu schwer für diese Schülergruppe. Andere Möglichkeiten zum Abtesten wie die Zerlegung der Regelableitung in Einzelschritte und das Abtesten der Kenntnis dieser Einzelschritte oder aber auch das Vorgeben von mehreren – richtigen wie falschen – Begründungen der entsprechenden Regel und das Ankreuzen des oder der richtigen Wege schienen uns an dieser Stelle nicht sinnvoll zu sein.

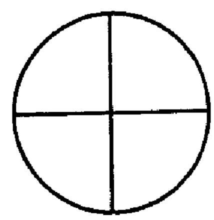
3. Schülerleistungen und Präsentationsform

Im Test wurde jeweils eine mathematisch identische Aufgabe zu den 4 Rechenoperationen einmal rein rechnerisch sowie – getrennt an *anderer* Stelle des Tests – in Form von bildlicher/textlicher Aufgabenstellung gegeben (man vgl. auch Hart [1978] und Hasemann [1981]). Konkret handelte es sich um folgende 4 Aufgaben:

(1) Addition:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

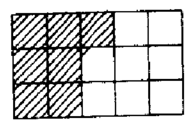
b) Färbe die Hälfte des Kreises, dann anschließend noch ein Viertel des Kreises dunkel. Welchen *Bruchteil* des Kreises hast du *insgesamt* dunkel gefärbt?



(2) Subtraktion:

a) $1 - \frac{7}{15}$

b) Von einer Tafel Schokolade werden 7 Stücke gegessen (s. Zeichnung). Welcher Bruchteil bleibt noch übrig?

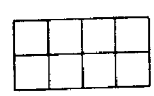


(3) Multiplikation:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$

b) Schraffiere (////) *zunächst die Hälfte* des Rechtecks, färbe anschließend *ein Viertel des schraffierten Teils* schwarz.

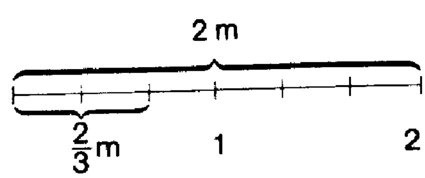
Welchen *Bruchteil* des *ganzen* Rechtecks hast du schwarz gefärbt?



(4) Division: (Aspekt des Messens):

a) $2 : \frac{2}{3}$

b) Ein Brett ist 2 m lang. *Wieviele* Stücke von jeweils $\frac{2}{3}$ m Länge kannst du hiervon absägen?



Vergleicht man die Höhe richtiger Lösungen jeweils bei den beiden Versionen der Aufgabe, so stellt man fest, daß in Übereinstimmung mit Befunden von Hart (1978) für Großbritannien die Quote richtiger Lösungen bei der zeichnerischen Aufgabenstellung (bei der Subtraktion bzw. Division werteten wir hier die dort verlangte Angabe des Bruchteils bzw. der Anzahl der Teilstücke, bei der Addition/Multiplikation die Richtigkeit der Zeichnung) vergleichbar hoch oder höher war als bei der rein rechnerischen Aufgabe. Hierbei muß man allerdings beachten, daß die Subtraktionsaufgabe u. U.

durch ein Rechnen mit natürlichen Zahlen (Anzahl der Kästchen) sowie durch Angabe des erhaltenen Bruchteils gelöst werden konnte und daß auch die Divisionsaufgabe durch wiederholte Addition bzw. Subtraktion lösbar war und damit in diesen beiden Fällen (zusätzliche) Wege zur Verfügung standen, die auf der rein rechnerischen Ebene nicht unbedingt naheliegend und verfügbar waren.

Besonders interessant ist in diesem Zusammenhang die Frage, wieweit Schüler die 4 *zeichnerisch* vorgegebenen Aufgaben in die entsprechenden *rechnerischen* Aufgaben *übersetzen* können. An dieser Stelle wurden aufgrund der relativ hohen Quote von Auslassungen bei diesen Aufgaben, die zwischen 20 % (Division) und knapp 40 % (Subtraktion) schwankten, deutliche Unsicherheiten der Schüler erkennbar. Die korrekte zugehörige Angabe der Additions- bzw. Subtraktionsaufgabe schafften jeweils ein Drittel der Schüler, wobei jedoch bei der Addition häufig als Fehler (oder Mißverständnis?) eine *neue* Aufgabe angegeben wurde, die das Endergebnis der vorgegebenen Aufgabe (nämlich $\frac{3}{4}$) besaß. Mit Abstand am seltensten wurde die entsprechende Multiplikationsaufgabe genannt. Sicher war das völlige Fehlen von Schlüsselwörtern im Text („schraffiere zunächst die Hälfte des Rechtecks. Färbe anschließend ein Viertel des schraffierten Teils schwarz") hierfür mitverantwortlich. Dagegen fiel das Dividieren im speziellen Sinne des Messens – durch die Aufgabe (4) abgetestet – den Schülern besonders leicht. Diese Aufgabe wurde mit Abstand am häufigsten richtig als Divisionsaufgabe genannt.

4. Textaufgaben

Die Textaufgaben waren als „Zeitpuffer" gedacht, daher wurden sie nur von denen erreicht, die die Aufgaben am schnellsten bearbeiteten, im Schnitt von etwa einem Drittel (die letzte Aufgabe sogar nur von einem Fünftel) der Schüler. Dies muß bei der Interpretation der Daten bedacht werden.

Folgende Aufgaben umfaßte der Test:

1. Butter hat einen Wassergehalt von etwa $\frac{4}{25}$ des Gewichts. Berechne den Wassergehalt von $\frac{3}{4}$ kg Butter.
2. Ein Schöpfgefäß faßt $\frac{3}{8}$ l Wasser. Wie oft muß man mit diesem Gefäß schöpfen, um einen Topf mit $3\frac{3}{4}$ l Inhalt zu füllen?
3. An einer Abstimmung beteiligten sich $\frac{4}{5}$ *aller* Schüler einer Schule. *Davon* stimmten $\frac{2}{3}$ mit „ja". Welcher Teil hat mit „ja" gestimmt?
4. Ein Gefäß von unbekanntem Volumen enthält $\frac{4}{5}$ l Apfelsaft. Der Apfelsaft füllt dieses Gefäßt zu $\frac{2}{3}$. Wieviel Liter faßt dieses Gefäß?

Es handelte sich also um 2 Aufgaben zur Multiplikation sowie um 2 Aufgaben zur Division. Bei den Lösungen wurden die relativ großen Schwierigkeiten, die Textaufgaben bereiten, offenkundig.

Die Multiplikationsaufgabe Nr. 1 lösten nur knapp ein Viertel der Schüler, die sie bearbeiteten, richtig. Häufigster Fehler war der Versuch der Lösung durch eine Division, also vermutlich eine fehlerhafte Deutung der Aufgabe im Sinne des Messens. Am häufigsten wurde gerechnet $\frac{3}{4} : \frac{4}{25}$ – also größere Zahl dividiert durch die kleinere Zahl; eine Anordnung, die bei einer naiven Vorstellung vom Messen naheliegend ist –, deutlich seltener $\frac{4}{25} : \frac{3}{4}$, also unter Zugrundelegung der Reihenfolge der Zahlen, wie sie im Text vorgegeben war („Linearität" bei der Aufgabenbearbeitung). Die mit Abstand schwierigste Aufgabe war die 2. Multiplikationsaufgabe (Nr. 3). Nur ein (!) Schüler löste sie richtig. In Folge der offensichtlichen Unsicherheit hielten sich die Schüler bei dieser Aufgabe an „bewährte" Strategien: Abfolge der Zahlen wie im Text bzw. – dies fiel hier in diesem Beispiel hiermit zusammen – Abfolge nach der Größe oder Auswahl der Rechenoperation nach (vermeintlichen) „Schlüsselwörtern" im Text. Dies führte als häufigster Fehler zu der Divisionsaufgabe $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$ (Abfolge / Größe: $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$; Schlüsselwort: Welcher *Teil*) bzw. zu der Subtraktionsaufgabe $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$ (Abfolge / Größe: $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$; Schlüsselwort: ... davon ...).

Die Divisionsaufgabe (Nr. 2) wurde am häufigsten von allen Schülern bearbeitet und auch gut zur Hälfte richtig gelöst. Es handelte sich um eine Aufgabe im Sinne des Messens, bei der wir auch im vorigen Abschnitt die günstigsten Ergebnisse vorfanden. Gehäufte typische Fehlerstrategien waren hier nicht erkennbar. Zu dem günstigen Ergebnis mag hier zusätzlich beigetragen haben, daß diese Aufgabe als einzige original aus dem im vorigen Schuljahr bei der Bruchrechnung benutzten Schulbuch stammte.

Die 2. Divisionsaufgabe (Nr. 4), die letzte Aufgabe des Tests, konnten nur noch wenige Schüler bearbeiten. Zwei fehlerhafte Ansätze wurden hier am häufigsten gemacht: $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$ bzw. $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$. Hierbei wurden die Zahlen entsprechend der Anordnung im Text (und auch der Größe nach) genommen.

5. Zusammenfassung

Bezüglich des untersuchten *Mischkonzepts* in der Bruchrechnung können wir zusammenfassend folgende Ergebnisse festhalten:

(1) Völlig problemlos mit einer Quote richtiger Lösungen von jeweils über 90 % beherrschten die Schüler das Kürzen, Erweitern und Umwandeln/Einrichten. Fehler in diesem Bereich bei komplexeren Aufgaben waren *nicht* bedingt durch eine mangelnde Beherrschung dieser Techniken, sondern eher durch Flüchtigkeit bzw. Nachlässigkeit.

(2) Ein Problembereich war die Einbettung der natürlichen Zahlen in die Menge der Bruchzahlen. Bei entsprechenden Aufgaben zur Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit natürlichen Zahlen ($n + \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} + n$, $n - \frac{a}{b}$, $n \cdot \frac{a}{b}$, $n : \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} : n$) verwendeten die Schüler zwei hauptsächliche fehlerhafte Strategien: Sie setzten $n = \frac{n}{n}$ oder aber übernahmen einfach für n den Nenner m des nächsten Bruches, also $n = \frac{n}{m}$. Diesem Bereich muß mehr Aufmerksamkeit gewidmet werden (mehr Übung / Gegenbeispiele).

(3) Aufgaben des Typs $n + \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} + n$ und $n - \frac{a}{b}$ wurden offensichtlich von den Lehrern unterschätzt (zu trivial?) und daher vernachlässigt. Nur wenige Schüler lösten diese Aufgaben durch Rückgriff auf die Bruchvorstellung (ohne formale Rechnung).

(4) Die – verglichen mit Untersuchungen bezüglich anderer Bruchrechenkonzepte – *relativ* wenigen Fehler bezüglich der 4 Rechenoperationen massierten sich jeweils auf *wenige* Typen, gezielte Maßnahmen hiergegen sind also vielversprechend (Gegenbeispiele; Bewußtmachen der Fehler; bei der Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche: Betonung des quasikardinalen Aspekts). Hierbei ist wichtig, daß viele der untersuchten Fehler nicht zufällig auftraten, sondern meist aufgrund systematischer fehlerhafter Strategien, wie man durch Untersuchung der übrigen Aufgaben desselben Typs – die an verschiedenen Stellen des Tests standen – leicht belegen kann.

(5) Die Befunde legten den Verdacht nahe, daß einige Fehler lehrerabhängig waren (wie das gehäufte Auftreten einiger Fehler in manchen Klassen und das völlige Fehlen dieser Fehler in anderen Klassen nahelegte). Die Kenntnis typischer Fehlerstrategien kann (diese) Lehrer sensibilisieren für mögliche Effekte ihres Mathematikunterrichts (die bei einer normalen Korrektur mit Angabe nur von richtig und falsch nicht sichtbar werden) und kann generell Lehrern gute Diagnosemittel für gezielte Therapiemaßnahmen in die Hand geben.

(6) In Übereinstimmung mit Beobachtungen von Lörcher fielen auch in diesem Test eine größere Zahl charakteristischer Fehler bei Rechenoperationen mit der Zahl 1 im Bereich der natürlichen Zahlen auf ($n + 1 = n$, $n - n = 1$, $1 - n = n$, $n \cdot 1 = n + 1$).

(7) Der deutliche Unterschied in den Schülerleistungen zwischen der richtigen Formulierung einer Regel und ihrer korrekten Anwendung zeigte, daß die Versprachlichung einer automatisierten, weithin fehlerfrei beherrschten Tätigkeit selbst noch in 7. Klassen große Schwierigkeiten bereitet. Noch sehr viel schwerer fiel den Schülern die schriftliche Wiedergabe der Begründung für diese Rechenregeln.

(8) Die Umsetzung von vorgegebenen Informationen (Text/Bild) in die entsprechenden mathematischen Aufgaben bereitete offensichtlich vielen Schülern Schwierigkeiten. Gängige Schülerstrategien zur Lösung waren: Anordnung der Zahlen wie im Text, Anordnung nach der Größe (bei Subtraktion und Division), Rechenoperationen entsprechend wirklichen oder vermeintlichen Schlüsselwörtern.

(9) Ein Vergleich von Fehlerquoten zwischen Größenkonzept und Mischkonzept gab Hinweise auf eine starke Reduzierung von Fehlern bei Benutzung dieses Konzepts im Bereich der Multiplikation und Division.

Literatur

Brueckner, L. J.: Analysis of errors in fractions. Elementary School Journal, 1928, S. 760–770.

Flade, L.: Zur Entwicklung von Rechenfertigkeiten und zu einigen typischen Schülerfehlern. Mathematik in der Schule, 1976, S. 371–376.

Griesel, H.: Der quasikardinale Aspekt in der Bruchrechnung. Der Mathematikunterricht, 4/1981, S. 87–95.

Hart, K.: Understanding of fractions in the secondary school. Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe D, Band 1, 1978.

Hasemann, K.: On difficulties with fractions. Educational Studies in Mathematics, 1/1981, S. 71–87.

Lörcher, G.A.: Diagnose von Schülerschwierigkeiten beim Bruchrechnen. Pädagogische Welt, 3/1982, S. 172–180.

Padberg, F.: Didaktik der Bruchrechnung. Freiburg 1978.

Ders.: Wege zur Ableitung der Divisionsregel der Bruchrechnung. Bestandsaufnahme – Beurteilung – Folgerungen. Journal für Mathematikdidaktik, 1/1982, S. 67–88.

Radatz, H.: Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Braunschweig 1980.