ABHANDLUNGEN

Prüfziffern – eine praktische Anwendung von Restklassen

Von *Friedhelm Padberg* und *Friederike Bruns* in Bielefeld

Die Restklassen bilden unter der Restklassenaddition und -multiplikation einfache und überschaubare Modelle für viele wichtige algebraische Strukturen (Halbgruppe, Gruppe, Ring, Integritätsring, Körper, vgl. [1]). Sie werden unter diesem Aspekt in vielen neueren Schulbüchern für die Sekundarstufe I behandelt. Darüberhinaus lassen sich Restklassen an vielen weiteren Stellen des Unterrichts äußerst sinnvoll einsetzen, so etwa bei der Untersuchung der Lösungsmengen linearer oder quadratischer Gleichungen, bei der Erarbeitung des Lösungskalküls für Gleichungen und lineare Gleichungssysteme, zur Verdeutlichung oder Erarbeitung des Prinzips einfacher Körpererweiterungen oder auch als Modelle für affine, ebene Inzidenzgeometrien der Ordnung 2 bzw. 3, vgl. [2].

Die Restklassen eignen sich aber auch ausgezeichnet dazu, die Einsatzmöglichkeiten scheinbar rein mathematischer Begriffsbildungen und Aussagen zur Lösung *praktischer* Probleme an einem überschaubaren, leicht verständlichen und uns häufig begegnenden Sachverhalt im Unterricht eindrucksvoll zu demonstrieren, nämlich am Beispiel der Prüfziffern des Buchhandels (ISBN) und der Banken (EKONS). So kann der in den letzten Jahren zu Recht verstärkt erhobenen Forderung nach einer stärkeren Berücksichtigung von praktischen Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik im Mathematikunterricht gut Rechnung getragen werden.

1. Die Internationale Standard-Buchnummer (ISBN)

1.1. Aufbau und Aufgabe der ISBN

Betrachtet man neuere Bücher genauer, so findet man bei ihnen an gut sichtbarer Stelle – meist auf der Titel- oder Buchrückseite – Angaben etwa der folgenden Art:

ISBN 3-451-16880-4
oder
ISBN 3 528 08391 3

Hierbei vermittelt die Ziffernkombination hinter den Buchstaben ISBN folgende Informationen:

Der Ziffer 3 können wir entnehmen, daß das betreffende Buch in der Bundesrepublik Deutschland, in der Schweiz oder Österreich erschienen ist. („*Gruppennummer*" für nationale, geographische, Sprach- oder ähnliche Gruppen.) 451 bzw. 528 ist die *Verlagsnummer* (451: Herder Verlag, Freiburg; 528: Vieweg Verlag, Braunschweig) innerhalb dieser Gruppe. 16880 bzw. 08391 ist die *Titelnummer* für das einzelne Buch des betreffenden Verlages. Die Ziffer 4 bzw. 3 ist eine *Prüfziffer*.

Die ISBN ist jeweils 10-stellig. Die 4 genannten Komponenten (Gruppen-, Verlags-, Titelnummer, Prüfziffer) werden – wie auch die beiden ausgewählten Beispiele demonstrieren – entweder durch Bindestriche oder durch leere Zwischenräume voneinander abgegrenzt. Während die Gruppennummer und die Prüfziffer einstellig ist, ist die Anzahl der Stellen für die Verlagsnummer bzw. Titelnummer nicht schematisch festgelegt, beide zusammen müssen nur 8

Stellen ergeben. Hierdurch kann man Verlagen mit hoher Titelproduktion eine niedrige Verlagsnummer zuordnen, damit sie so über viele Stellen zur Benummerung ihrer Bücher verfügen.

Die Internationale Standard-Buchnummer hat die Aufgabe, jedes Buch weltweit als knappes und eindeutiges Identifikationsmerkmal unverwechselbar zu kennzeichnen. Sie ist für eine Verwendung in Computern gut geeignet und dient der Rationalisierung insbesondere des Bestell- und Rechnungswesens. Die ISBN stellt insbesondere für Verlage, Bibliotheken und Buchhandel eine große Hilfe dar und wurde in Deutschland seit 1969, in den USA seit 1968 und in England seit Ende 1967 eingeführt.

1.2. Die Prüfziffer in der ISBN

Wird eine Buchbestellung irrtümlich mittels einer fehlerhaften ISBN übermittelt, so bewirkt dies u.U. sehr viel überflüssige, zeitaufwendige und kostenintensive Arbeit. Um das Risiko derartiger Fehler zu minimieren, hat man die ISBN mit einer Prüfziffer ausgestattet, und zwar dient – wie schon erwähnt – die letzte Ziffer als Prüfziffer. Hierbei gewinnt man diese Prüfziffer folgendermaßen aus den übrigen Ziffern der ISBN, vgl. [3], S. 8.
Man multipliziert die – von links – erste Ziffer mit 10 [1]), die zweite mit 9, die dritte mit 8 und entsprechend weiter mit 7, 6, 5, 4, 3 bzw. 2 und addiert die so erhaltenen Produkte:

IBSN 3-451-16880(-4)

$$10\cdot 3+9\cdot 4+8\cdot 5+7\cdot 1+6\cdot 1+5\cdot 6+4\cdot 8+3\cdot 8+2\cdot 0=205.$$

Man ergänzt die Summe (hier: 205) auf die nächste durch 11 teilbare Zahl (hier: 209) und gewinnt durch die entsprechende Differenz (hier: 4) die zugehörige Prüfziffer.

Ist die Summe der Produkte selbst schon durch 11 teilbar, so ordnen wir 0 als Prüfziffer zu. Statt 10 benutzt man aus Gründen der Eindeutigkeit den Buchstaben X in Anlehnung an das einstellige römische Zahlzeichen X, wie z.B. in der folgenden Buchnummer:

ISBN 3-451-18611-X.

Hierbei läßt sich die Berechnung bzw. Überprüfung der Prüfziffer sehr rasch maschinell mittels Prüfziffergeräten durchführen. Ergibt sich hierbei, daß die errechnete Prüfziffer nicht mit der angegebenen Prüfziffer übereinstimmt, so ist die ISBN-Angabe mit Sicherheit fehlerhaft. Natürlich läßt sich mittels der Prüfziffer nicht die irrtümliche Angabe einer unrichtigen, aber existenten ISBN aufdecken. Dieser Fehler kann offenkundig durch kein Prüfziffernsystem verhindert werden.

1.3. Der Zusammenhang zwischen Prüfziffern und Restklassen

Um die Möglichkeiten, aber auch Grenzen des Prüfziffernverfahrens exakt ausleuchten zu können, müssen wir zunächst auf den Zusammenhang zwischen Prüfziffern und Restklassen modulo 11 genauer eingehen [2]), vgl. auch [1], S. 56ff. Betrachten wir das oben genannte Beispiel (ISBN 3-451-16880(-4)), so läßt dort 205 bei Division durch 11 den Rest 7, d.h. 205 liegt in der Restklasse $\bar{7}$ [3]). Als Prüfziffer wählt man jedoch nicht 7, sondern den kleinsten nichtnegativen Repräsentanten der hierzu bezüglich der Restklassenaddition *inversen* Restklasse, also 4. Das

[1]) Wir verzichten hier und im folgenden auf die zwar exakte, jedoch sehr schwerfällige Sprechweise: wir multiplizieren die durch die erste Ziffer dargestellte Zahl mit 10 usw.

[2]) In dem ISBN-Leitfaden findet man zwar auch den Terminus „Modulus 11". Die im folgenden abgeleiteten Überlegungen sind dort jedoch *nicht* zu finden.

[3]) Restklassen kennzeichnen wir durch einen entsprechenden Querstrich.

folgende Prüfziffern-Berechnungsverfahren liefert stets *dieselbe* Prüfziffer wie das schon geschilderte Verfahren. Da es jedoch direkt mit den Restklassen (statt mit den Inversen der Restklassen) arbeitet, werden wir es im folgenden stets benutzen:

Wir multiplizieren hierbei die – von links – erste Ziffer mit 1, die zweite mit 2, die dritte mit 3 und entsprechend die folgenden Ziffern mit 4, 5, 6, 7, 8 bzw. 9 und addieren die so erhaltenen Produkte:

ISBN 3-451-16880(-4)

$$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 1+5\cdot 1+6\cdot 6+7\cdot 8+8\cdot 8+9\cdot 0=191.$$

191 läßt bei Division durch 11 den Rest 4 und liegt damit in der Restklasse $\overline{4}$. Den kleinsten nichtnegativen Repräsentanten dieser Restklasse, nämlich 4, verwenden wir als Prüfziffer.

In unserem Beispiel haben wir bei beiden Berechnungswegen dieselbe Prüfziffer erhalten. Daß dies *stets* der Fall ist, sieht man folgendermaßen unmittelbar ein:

Jede ISBN hat die Form

ISBN a – b c d e f g h i – Prüfziffer

Beim ersten Weg wird der kleinste nichtnegative Repräsentant der Restklasse

$$\overline{-(10a+9b+8c+7d+6e+5f+4g+3h+2i)},$$

beim zweiten Weg der kleinste nichtnegative Repräsentant der Restklasse

$$\overline{a+2b+3c+4d+5e+6f+7g+8h+9i}$$

als Prüfziffer berechnet. Da die beiden genannten Restklassen jedoch gerade invers zu der Restklasse

$$\overline{10a+9b+8c+7d+6e+5f+4g+3h+2i}$$

in der Restklassenmenge modulo 11 bzgl. der Restklassenaddition sind, sind sie identisch, also stimmen auch die kleinsten nichtnegativen Repräsentanten dieser Restklassen, also die Prüfziffern, stets überein.

1.4. Grenzen und Möglichkeiten des Prüfziffernverfahrens

Wir können jetzt leicht exakt begründen, welche häufig vorkommenden Fehler das geschilderte ISBN-Prüfziffernverfahren modulo 11 mit hundertprozentiger Sicherheit ausschließt, aber auch leicht einige andere Fehlertypen nennen, die durch dieses Prüfziffernverfahren nicht *völlig* ausgeschlossen werden.

1.4.1. Verwechselung einer Ziffer in der ISBN

Verwechselt man bei der Angabe der ISBN irrtümlich eine Ziffer – gibt man also etwa statt der gewünschten ISBN 3-451-16880-4 irrtümlich 3-452-16880-4 an –, so wird dies durch das Prüfziffernverfahren stets aufgedeckt; denn kürzen wir den bei der Summenbildung in beiden Fällen gleichbleibenden Teil mit s ab, bezeichnen wir die richtige Ziffer mit z_1 und die irrtümlich dafür gewählte Ziffer mit z_2 und benennen wir schließlich den Faktor, mit dem z_1 und z_2 multipliziert werden, mit n, so gilt:

$$\overline{s+z_1 n}=\overline{s+z_2 n} \leftrightarrow z_1=z_2,$$

d.h. wir erhalten nur genau dann die gleiche Prüfziffer, wenn *keine* Verwechselung vorliegt.

Begründung:

$$
\begin{aligned}
& \overline{s+z_1 n} = \overline{s+z_2 n} \\
\longleftrightarrow\ & s+z_1 n \equiv s+z_2 n \pmod{11} \\
\underset{(*)}{\longleftrightarrow}\ & 11 \mid (z_1-z_2)n \\
\underset{(**)}{\longleftrightarrow}\ & 11 \mid (z_1-z_2) \\
\underset{(***)}{\longleftrightarrow}\ & z_1 = z_2
\end{aligned}
$$

Hierbei greifen wir an der Stelle (*) auf die Definition der Kongruenzrelation „≡" mit Hilfe der Teilbarkeitsrelation („|") zurück, vgl. [1], S. 57.

An der Stelle (**) nutzen wir aus, daß $1 \leqq n \leqq 9$ gilt und daher 11 und n teilerfremd sind. Wegen $0 \leqq z_1, z_2 \leqq 9$ gilt $|z_1 - z_2| \leqq 9$, also: $11 \mid z_1 - z_2 \leftrightarrow z_1 - z_2 = 0$, d.h. wenn gilt $z_1 = z_2$.

Den Schluß (**) können wir nur durchführen, weil 11 zu allen n mit $1 \leqq n \leqq 9$ teilerfremd ist, also insbesondere, weil 11 eine *Primzahl* größer als 9 ist. Offensichtlich ist gerade 11 die *kleinste* natürliche Zahl (>1) mit der verlangten Eigenschaft.

1.4.2. Vertauschung zweier Ziffern der ISBN („Drehfehler")

Das Prüfziffernverfahren deckt aber auch stets auf, wenn man bei der ISBN-Anzeige irrtümlich zwei Ziffern miteinander vertauscht, also beispielsweise statt 3-451-16880-4 etwa 3-451-61880-4 (Vertauschung zweier unmittelbar benachbarter Ziffern) oder auch 3-154-16880-4 (Vertauschung zweier nicht unmittelbar benachbarter Ziffern) schreibt. Kürzen wir nämlich den bei der Summenbildung in beiden Fällen gleichbleibenden Teil wiederum mit s ab, die beiden Ziffern mit z_1 und z_2 und die beiden zugehörigen Faktoren mit m und n, so gilt:

$$\overline{s+z_1 \cdot m + z_2 \cdot n} = \overline{s+z_1 \cdot n + z_2 \cdot m} \leftrightarrow z_1 = z_2,$$

d.h. wir erhalten nur genau dann die gleiche Prüfziffer, wenn *keine* Vertauschung vorliegt.

Begründung:

$$
\begin{aligned}
& \overline{s+z_1 m + z_2 n} = \overline{s+z_1 n + z_2 m} \\
\longleftrightarrow\ & s+z_1 m + z_2 n \equiv s+z_1 n + z_2 m \pmod{11} \\
\longleftrightarrow\ & 11 \mid [z_1(m-n) + z_2(n-m)] \\
\longleftrightarrow\ & 11 \mid (z_1-z_2)(m-n) \\
\underset{(*)}{\longleftrightarrow}\ & 11 \mid (z_1-z_2) \\
\longleftrightarrow\ & z_1 = z_2
\end{aligned}
$$

Wegen $1 \leqq m, n \leqq 9$ und $m \neq n$ gilt $|m-n| \leqq 9$ und $m-n \neq 0$, also sind 11 und $m-n$ teilerfremd, folglich gilt (*). Auch hier ist – wie schon in *1.4.1.* – die Primzahl 11 die *kleinste* natürliche Zahl (>1) mit der erwünschten Eigenschaft.

1.4.3. Grenzen des ISBN-Prüfziffernverfahrens

In diesem Abschnitt wollen wir einige Fehlertypen aufzeigen, die durch das Prüfziffernverfahren *nicht* mehr *stets* – allerdings ebenfalls noch in der weit überwiegenden Zahl der Fälle! – aufgedeckt werden:

(1) So wird die *Verwechslung zweier* (oder mehrerer) *Ziffern* in der ISBN (Verallgemeinerung von *1.4.1.*; *Beispiel:* statt 3-435-16880-3 schreibt man etwa irrtümlich: 3-423-16880-3) nicht mehr stets aufgedeckt (so etwa auch in diesem konstruierten Beispiel nicht). Es gilt nämlich (wenn wir entsprechende Abkürzungen wie bislang benutzen):

$$\overline{s+z_1 m+z_2 n}=\overline{s+z_3 m+z_4 n}$$
$$\leftrightarrow 11 \mid (z_1-z_3)m+(z_2-z_4)n.$$

Diese Aussage gilt jedoch *nicht* mehr nur genau dann, wenn $z_1=z_3$ und $z_2=z_4$, wie man leicht überprüft (*Gegenbeispiel:* $z_1=3$, $z_3=2$, $m=3$, $z_2=5$, $z_4=3$, $n=4$).

(2) Auch das *zweimalige* (oder mehrmalige) *Vertauschen* je zweier Ziffern der ISBN (Verallgemeinerung von *1.4.2.*; *Beispiel:* statt 3-451-98611-6 schreibt man etwa irrtümlich 3-541-89611-6) wird nicht mehr stets aufgedeckt.

Wir begründen dies für den – im Beispiel angesprochenen – Fall der Vertauschung je zweier Nachbarziffern (die Argumentation verläuft für den allgemeinen Fall ähnlich):

$$\overline{s+z_1 m+z_2(m+1)+z_3 n+z_4(n+1)}=\overline{s+z_2 m+z_1(m+1)+z_4 n+z_3(n+1)}$$
$$\leftrightarrow 11 \mid (-z_1+z_2-z_3+z_4)$$
$$\leftrightarrow 11 \mid [(z_2+z_4)-(z_1+z_3)]$$
$$\leftrightarrow z_2+z_4=z_1+z_3.$$

Die Prüfziffern sind also nicht nur dann gleich, wenn $z_1=z_2$ und $z_3=z_4$ gilt, sondern schon dann, wenn $z_2+z_4=z_1+z_3$ gilt. (Entsprechend haben wir auch das Eingangsbeispiel konstruiert.)

(3) Auch gegen die (eng mit dem gerade genannten Fehler zusammenhängende und häufiger auftretende) *Vertauschung zweier kompletter Ziffernblöcke* (*Beispiel:* statt 3-451-52341-6 schreibt man irrtümlich 3-451-34521-6) bietet das Prüfziffernverfahren keinen vollständigen Schutz. Wir zeigen dies im folgenden für den Fall auf, daß – wie im vorstehenden Beispiel – zwei komplette zweiziffrige „Nachbarziffernblöcke" miteinander vertauscht werden. In diesem Fall gilt:

$$\overline{s+z_1 n+z_2(n+1)+z_3(n+2)+z_4(n+3)}=\overline{s+z_3 n+z_4(n+1)+z_1(n+2)+z_2(n+3)}$$
$$\leftrightarrow 11 \mid (-2z_1-2z_2+2z_3+2z_4)$$
$$\leftrightarrow 11 \mid (-2)[(z_1+z_2)-(z_3+z_4)]$$
$$\leftrightarrow (z_1+z_2)-(z_3+z_4)=0$$
$$\text{oder } (\vee)\ (z_1+z_2)-(z_3+z_4)=\ 11$$
$$\text{oder } (\vee)\ (z_1+z_2)-(z_3+z_4)=-11$$

In den genannten drei Fällen (Differenz: 0 bzw. 11 bzw. – 11) wird also eine fehlerhafte ISBN durch die Prüfziffern *nicht* aufgedeckt. Man muß hierbei allerdings beachten – und das gilt für den gesamten Abschnitt *1.4.3.* –, daß die genannten Fehler an sich schon nur in relativ wenigen Fällen auftreten und daß dann wiederum nur in einem Bruchteil dieser Fälle die Fehler durch das Prüfziffernverfahren nicht aufgedeckt werden.

2. Die Pharmazentralnummer bei Medikamenten

Der Arzneimittelgroßhandel und die Apotheken verwenden ein ähnliches Benummerungssystem mit Prüfziffern wie der Buchhandel. So hat jedes Medikament eine siebenstellige „Pharmazentralnummer", um so z.B. die Bestellung schneller und eindeutig maschinell abbuchen zu können. Die letzte Ziffer dient auch hier als Prüfziffer. Man erhält diese Prüfziffer, indem man – von links – die erste Stelle der Pharmazentralnummer mit 2, die zweite mit 3 und entsprechend die folgenden Stellen mit 4, 5, 6 bzw. 7 multipliziert und aus diesen Produkten wiederum die Summe bildet. Der Rest, den diese Summe bei Division durch 11 läßt, ist die Prüfziffer.

Beispiel: 1885822

$$2 \cdot 1+3 \cdot 8+4 \cdot 8+5 \cdot 5+6 \cdot 8+7 \cdot 2=145, \qquad 145=11 \cdot 13+2,$$

also ist 2 die Prüfziffer.

Den engen Zusammenhang mit dem Prüfziffernsystem der ISBN kann man leicht sichtbar machen, indem man die Pharmazentralnummern jeweils geeignet „aufnullt", also beispielsweise die obige Pharmazentralnummer umschreibt in die Form

0 18858200 2

Hierdurch wird einsichtig, daß die für die ISBN abgeleiteten Aussagen völlig entsprechend auch für das Prüfziffernsystem der Pharmazentralnummer gelten.

3. Das Einheitliche Kontonummernsystem (EKONS) bei Banken

Aus den gleichen Motiven wie bei dem Buch- und Pharmahandel haben auch die Banken und Sparkassen ein Benummerungssystem mit Prüfziffer eingeführt, genannt „Einheitliches Kontonummernsystem" bzw. kurz „EKONS". Das EKONS ist grundsätzlich zehnstellig ausgelegt, allerdings müssen – je nach Geschäftsvolumen – nicht unbedingt alle zehn Stellen benutzt werden. Hierbei dienen – von links – (maximal) die ersten vier Ziffern der Klassifizierung der Konten (z.B. als Geschäftskonten, Lohn- und Gehaltskonten oder Sparkonten), die übrigen sechs Stellen stellen die laufende Kontonummer einschließlich der Prüfziffer dar, wobei die Prüfziffer wiederum an der äußersten rechten Stelle steht. Im Sparkassenmerkblatt zum EKONS [4] wird zwar auch ein Prüfziffernverfahren mit dem Modul 11 ähnlich dem Verfahren bei der ISBN und bei der Pharmazentralnummer genannt, empfohlen wird jedoch ein Prüfziffernverfahren zum Modul 10. Da dieses System zum Modul 10 nach unseren Erfahrungen bei Sparkassen und Banken weitverbreitet ist, wollen wir hierauf im folgenden etwas genauer eingehen. Die weite Verbreitung dieses Systems ist nämlich unter rein mathematischem Blickwinkel verblüffend und unverständlich, da die Fehleraufdeckquote beim Modul 10 wesentlich geringer ist als beim Modul 11. Dies gilt insbesondere wegen des besonders simplen Multiplikationsverfahrens der Sparkassen/Banken.

Beispiel (Achtstellige Kontonummer):

19 64 55 2 Prüfziffer

Beim Modul 10 benutzen die Banken/Sparkassen im wesentlichen eines der folgenden beiden Prüfziffernberechnungsverfahren.

Weg 1: Multiplikation der Ziffern abwechselnd von rechts mit 2 bzw. 1, mit dem Faktor 2 beginnend:

$$2 \cdot 2+1 \cdot 5+2 \cdot 5+1 \cdot 4+2 \cdot 6+1 \cdot 9+2 \cdot 1=46.$$

Durch Ergänzung zum nächsten „vollen" Zehner – also mittels Inversenbildung – bestimmt man in diesem Fall 4 als Prüfziffer. Erhält man bei der Summenbildung schon einen „vollen" Zehner, so ist 0 die Prüfziffer. Die vollständige Kontonummer lautet also bei diesem Weg: 19 64 55 24.

Weg 2: Vielfach variiert man den Weg 1, und zwar verwendet man an all den Stellen, wo die ausgerechneten Produkte zweistellig sind, ihre Quersumme. In unserem Beispiel bedeutet dies bei der Summenbildung:

$$4+5+\mathit{1}+4+\mathit{3}+9+2=28.$$

Die Prüfziffer ist also bei dem Weg 2 (mit Quersummenbildung) 2, die vollständige Kontonummer lautet in diesem Fall: 19 64 55 22.

Welche irrtümlichen Fehler bei Angabe der Kontonummer werden durch dieses Prüfziffernsystem rechtzeitig aufgedeckt?

Die *Verwechslung einer Ziffer* (entsprechend *1.4.1.*) wird bei Weg 2 stets, dagegen bei Weg 1 dann nicht aufgedeckt, wenn die Differenz zwischen der ursprünglichen Ziffer z_1 und der fehlerhaften Ziffer z_2 5 ergibt. (Die explizite Begründung dieser und der folgenden Aussagen überlassen wir dem Leser. Eine ähnliche Vorgehensweise wie im Abschnitt 1.4 führt auch hier rasch zum Ziel.)

Die *Vertauschung zweier unmittelbar benachbarter Ziffern* (entsprechend *1.4.2.*) wird bei Weg 1 stets entdeckt, bei Weg 2 nur in dem Fall nicht entdeckt, wenn es sich hierbei um die Ziffern 9 und 0 handelt.

Dagegen wird die Vertauschung von Ziffern, die mit demselben Faktor multipliziert werden (also z.B. die *Vertauschung einer Ziffer mit der übernächsten Ziffer*), *niemals* bemerkt.

Auch die naheliegende *Vertauschung* zweier kompletter *zweiziffriger Nachbarziffernblöcke* (*Beispiel:* statt 19645522 schreiben wir irrtümlich 19556422) wird durch das Banken-Prüfziffernsystem zum Modul 10 *niemals* aufgedeckt.

Bemerkt man die massiven Nachteile dieses Prüfziffernsystems gegenüber dem Prüfziffernsystem zum Modul 11, so drängt sich geradezu die Frage auf, wieso die Banken und Sparkassen dennoch vielfach dieses Prüfziffernsystem verwenden. Hierfür sind im wesentlichen folgende gewichtigen, *außermathematischen* Argumente maßgebend:

(1) Aus Kostengründen ziehen die Sparkassen/Banken eine *rein numerische* Kontobezeichnung vor. Eine Aufnahme alphabetischer Zeichen (etwa des X beim Modul 11) in die Kontonummern erfordert nämlich weitgehende Neuerungen im Maschinenpark und damit hohe Kosten.

(2) Der naheliegende Ausweg, daß man beim Modul 11 einfach auf die rund 9% Kontonummern mit der Prüfziffer 10 verzichtet, ist nicht möglich bzw. zu kompliziert:
Wegen der sogenannten Hauptbuchkonten kann man einerseits nicht auf alle eigentlich auszuschließenden Kontonummern verzichten. Im eigenen Interesse wie auch im Interesse der Kunden möchte man andererseits bei der Einführung des Prüfziffernsystems die bisherigen Kontonummern nur möglichst geringfügig verändern, nämlich nur durch Anhängung der Prüfziffer an die bisherige Kontonummer. Dies ist beim Modul 10 bei sämtlichen Konten möglich, dagegen müssen beim Modell 11 bei Verzicht auf die Prüfziffer 10 rund 9% der Konten völlig umnumeriert werden.

So können wir abschließend festhalten:
Wenngleich die Entscheidung für ein bestimmtes Prüfziffernsystem unter rein mathematischen Aspekten relativ eindeutig durchführbar ist, so braucht diese Entscheidung für die Anwendung nicht unbedingt zwingend zu sein, wie insbesondere die Vorgehensweise der Sparkassen und Banken verdeutlicht.

Literatur

[1] *F. Padberg*, Elementare Zahlentheorie. 3. Aufl. Herder, Freiburg 1976.
[2] *F. Padberg*, Über Einsatzmöglichkeiten von Restklassenkörpern im Bereich der Gleichungslehre, bei Körpererweiterungen und in der Geometrie; in **MNU 31** (1978) S. 22–27.
[3] Internationale Standard-Buchnummer (ISBN), Leitfaden, Buchhändler-Vereinigung GmbH, Frankfurt 1970.
[4] Merkblatt vom Sparkassenverlag, Nummer: NF 16 von 1967.

Anschriften der Verfasser:
Prof. Dr. Friedhelm Padberg, Bretonische Straße 242, 4800 Bielefeld 12
Friederike Bruns, Neue Straße 37, 2952 Weener 1