Geplantes Lehrerverhalten	Erwartetes Schülerverhalten	Soz. Organisation/Medien	Did.-meth. Überlegungen
L. „Bevor wir unser Lineal jetzt benutzen wollen, müssen wir es uns erst einmal genau anschauen." L. legt Lineal auf OHP.	S. beschreiben Lineal, werden evtl. aufgefordert, ihr eigenes Lineal herauszuholen.		
L. erklärt Maßeinheit Zentimeter und schreibt Abkürzungen cm an die Tafel.	S. hören zu.		Die neu gewonnene Erkenntnis soll nun zunächst repräsentativ von drei S. nachgeprüft werden.
L. fordert 3 Schüler auf, nun mit diesen Meßinstrumenten die Breite des Tisches zu messen.	S. messen und geben ihre Meßergebnisse bekannt.		
Festigung L. stellt über Transparent Arbeitsblatt 2 vor.	S. hören und sehen zu.	Einzelarbeit/ Arbeitsblätter, Lineal	Nun sollen die Schüler erste Längenmessungen mit der konventionellen Maßeinheit Zentimeter vornehmen.
Arbeitsblätter werden ausgeteilt.	S. bearbeiten Arbeitsblatt.		Das Arbeitsblatt ist so konzipiert, daß es dem unterschiedlichen Arbeitstempo der S. gerecht wird.
Kontrolle über OHP. Lehrer läßt sich Ergebnisse nennen und trägt sie auf dem Transparent ein.	S. nennen ihre Ergebnisse.		Je nach Zeit ist dieses Arbeitsblatt als Hausaufgabe geplant.

Literatur und Anmerkungen

[1] *P. Heimann, G. Otto, W. Schulz:* Unterricht, Analyse und Planung. Hannover 1965
[2] Vgl. *Winter-Ziegler:* Neue Mathematik 2, Lehrerheft, Hannover 1971, S. 24
[3] Vgl. *Winter-Ziegler, a. a. O., S. 24*
[4] Vgl. *Winter-Ziegler, a. a. O., S. 25*
[5] Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen, Ratingen 1973, S. M/20 und S. M/42

Zur Behandlung der Teilbarkeitsrelation im Unterricht der Primar- und Orientierungsstufe

Eine didaktische Analyse

Von *Friedhelm Padberg* in Bielefeld

Die Teilbarkeitsrelation wird im Unterricht im Rahmen der elementaren Teilbarkeitslehre behandelt, und zwar i. a. gezielt ein erstes Mal am Ende der Primarstufe (meist im 4. Schuljahr) sowie ausführlicher, gründlicher und systematischer in der Orientierungsstufe, und zwar am Ende des 5. bzw. zu Beginn des 6. Schuljahres. Diese zweite Behandlung findet *vor* der Behandlung der Bruchrechnung statt — vereinzelt erfolgt auch eine integrierte Behandlung *mit* der Bruchrechnung —, da in der Bruchrechnung Aussagen der elementaren Teilbarkeitslehre, etwa für das Kürzen oder die Hauptnennerbestimmung, benötigt werden. Vor der gezielten Behandlung der Teilbarkeitsrelation im 4. Schuljahr werden den Schülern der *Primarstufe* aber auch schon *früher* verschiedene *Vorerfahrungen* zur Teilbarkeit vermittelt, und zwar etwa

- bei Fragestellungen zum Aufteilen und Verteilen im Zusammenhang mit der Einführung der *Division* im 2. Schuljahr,
- bei der Lösung von einfachen geometrischen Aufgaben, wenn Probleme des *Messens* (etwa mit Hilfe von Cuisinaire-Stäben) angesprochen werden,
- bei der Behandlung *einfacher Relationen* wie „... ist die Hälfte von ..." oder „... ist ein Viertel von ...".

1. Zur Definition der Teilbarkeitsrelation

Ich möchte im folgenden mit einer *mathematischen Definition* der Teilbarkeitsrelation (1) beginnen:
Die natürliche (2) Zahl a heißt genau dann *Teiler* der natürlichen Zahl b, wenn eine natürliche Zahl n existiert mit $n \cdot a = b$.
Für „a ist Teiler von b" schreibt man kurz $a \mid b$.
Für „a ist *nicht* Teiler von b" schreibt man $a \nmid b$.

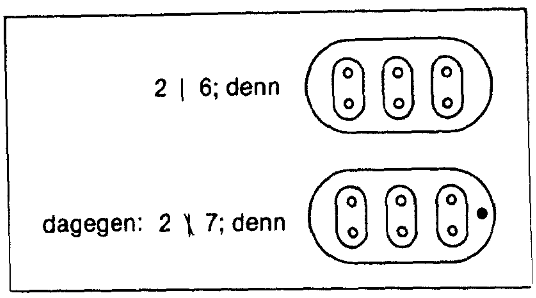
Beispiele:
$2 \mid 6$; denn $3 \cdot 2 = 6$
$2 \nmid 5$; denn es gibt keine natürliche Zahl n mit $n \cdot 2 = 5$

Wie läßt sich die *Einführung der Teilbarkeitsrelation im Unterricht motivieren?* Günstig ist m. E. ein umweltorientierter *Einstieg*, etwa:

An wieviele Kinder kann man 72 Bonbons gerecht verschenken? (Jedes Kind soll gleichviel erhalten, kein Bonbon soll übrigbleiben.) (3)

Bei diesem — für den *Primarbereich* vorgesehenen — Einstieg müssen als für die angestrebte Begriffsbildung wichtige Komponenten das *restlose* sowie das *„gerechte"* Verschenken herausgestellt werden.

Mathematischer Hintergrund ist hierbei etwa die Vorstellung des *restlosen Aufteilens* bzw. *Einteilens* einer Menge in *gleichmächtige* Teilmengen, die eine gute Grundvorstellung für die Einführung der Teilbarkeitsrelation liefert und die auch für eine Begründung vieler Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation tragfähig ist. So läßt sich hierdurch die Teilbarkeitsrelation gut ikonisch — also durch Diagramme — veranschaulichen:



Entsprechendes gilt auch für die folgenden noch vorgestellten Beispiele. Eine andere Einkleidung *desselben* Sachverhaltes stellt die in vielen Schulbüchern der *Orientierungsstufe* als Einstieg gestellte Riegenaufgabe. (In wieviel verschiedene Riegen kann man im Turnunterricht die 36 Schüler einer Klasse einteilen?) dar.

Dagegen führt das folgende Beispiel von der Aufgabe des *Messens* her an die Teilbarkeitsrelation heran:

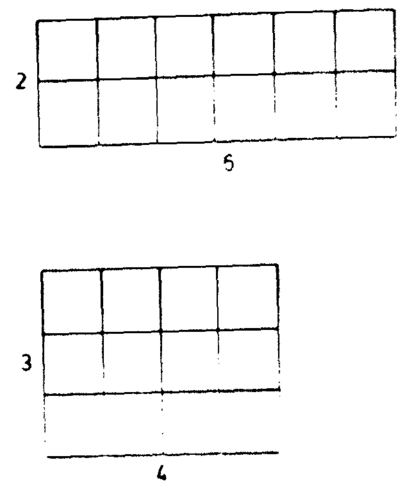
Ein 24 m langer Zaun soll aus Fertigteilen gebaut werden. Es gibt Fertigteile von 3 m, 4 m, 5 m, 6 m, 7 m, 8 m und 9 m Länge. Dabei sollen nur gleichlange Teile benutzt werden. Aus welchen Teilen kann man den Zaun bauen? Zeige alle Lösungen an der Strecke in obiger Figur! (4)

Vergleicht man jedoch diese Aufgabe mit der vorigen genauer, so bemerkt man, daß zwischen Messen und Aufteilen ein sehr enger Zusammenhang besteht.

Während alle vorstehenden Aufgaben eine Einführung der Teilbarkeitsrelation über die *„Division ohne Rest"* bzw. über die „Division mit dem Rest O" *nahelegen* (nicht erzwingen!), legt die folgende Aufgabe eine Einführung der Teilbarkeitsrelation über die „multiplikative Zerlegung" nahe, ganz entsprechend der einleitend genannten Definition:

Lege mit 12 Plättchen Rechtecke. [Schreibe zu jedem Rechteck eine Mal-Aufgabe]. (5)

Während man im Primarbereich diese Aufgabe ggf. auf der enaktiven Repräsentationsebene lösen wird, wird man in der Orientierungsstufe rein auf der ikonischen Repräsentationsebene agieren. So erhält man u. a. als Lösungen:



und wird so zu den Gleichungen $12 = 2 \cdot 6$ und $12 = 3 \cdot 4$ geführt, die eine Einführung der Teilbarkeitsrelation auf der Grundlage dieser multiplikativen Zerlegung nahelegen.

Dabei ist es im Unterricht unbedingt wichtig, daß die Schüler bei der Einführung der Teilbarkeitsrelation *beide* Grundvorstellungen (Division ohne Rest, multiplikative Zerlegung) und verschiedene *anschauliche Modelle* kennenlernen, damit der Begriff besser in ihren Köpfen verankert werden kann, und sie vor allem bei der *Begründung* von Teilbarkeitsaussagen gerade auf die jeweils geeignetere Modellvorstellung zurückgreifen können.

Nach dieser einleitenden Einführung findet man dann vielfach in den Schulbüchern — zumindest der Förderstufe — *„Definitionen"* der Teilbarkeitsrelation. Das folgende Beispiel soll zeigen, wie man hier unterschiedlich schwierig formulieren kann und somit *Differenzierungsmöglichkeiten* aufzeigen.

(1.) 3 ist Teiler von 36, denn man kann 36 durch 3 ohne Rest dividieren; man sagt auch: 3 *teilt* 36 und schreibt $3 \mid 36$. 5 ist *kein Teiler* von 36, denn $36 = 7 \cdot 5 + 1$; man sagt auch 5 *teilt nicht* 36 und schreibt hierfür $5 \nmid 36$ (6).

(2.) Kann man eine Zahl n durch die Zahl t ohne Rest dividieren, so sagt man: „t ist ein *Teiler* von n" oder kurz „t teilt n". Man schreibt $t \mid n$ für „t teilt n" und $t \nmid n$ für „t teilt nicht n".
Beispiele: $3 \mid 36$; denn $36 : 3 = 12$; $5 \nmid 36$, denn $36 = 7 \cdot 5 + 1$ (7).

Während im 1. Beispiel die Teilbarkeitsrelation rein *beispielgebunden* und implizit eingeführt wird, wird im 2. Beispiel die Teilbarkeitsrelation *allgemein* und explizit definiert und nur durch ein Beispiel erläutert. Dabei ist die zweite „Definition" wesentlich anspruchsvoller und daher nur für die leistungsstärkeren Gruppen vorgesehen. Eine weitere Steigerung im Schwierigkeitsgrad würde erfolgen, wenn die Formulierung der Definition nicht mehr *verbal* (so wie hier), sondern überwiegend mit *Symbolen* erfolgte:

Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt:
$a \mid b \longleftrightarrow b : a = n$ mit $n \in \mathbb{N}$

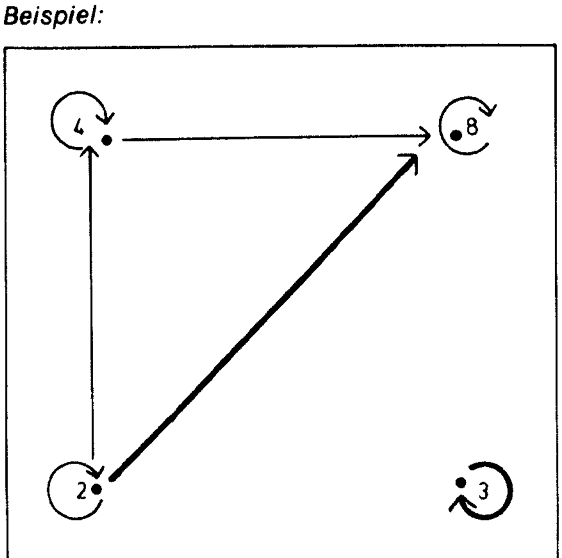
Allerdings scheint mir eine „Definition", die statt des Dividierens ohne Rest — wie im zitierten Schulbuchbeispiel die *multiplikative Zerlegung* (wie in der eingangs genannten mathematischen Definition) in den Vordergrund stellt für

den Unterricht *besser* geeignet zu sein, und zwar aus den folgenden beiden Gründen:
(1.) Bei der Definition über die Division ohne Rest tritt folgendes Problem auf:
$2 \mid 6$, da $6 : 2 = 3$ (zur Begründung ist also eine Umstellung erforderlich),
das bei der Definition über die multiplikative Zerlegung nicht auftritt
$2 \mid 6$, da $3 \cdot 2 = 6$ (hier ist *keine* Umstellung erforderlich!)
(2.) Daneben stellt die letztere Definition auch sehr direkt und deutlich den Zusammenhang zwischen der Teilbarkeits- und Vielfachenrelation heraus; denn mit derselben Gleichung $3 \cdot 2 = 6$ können wir auch direkt begründen, daß 6 ein Vielfaches von 2 ist und somit leicht klarmachen, daß die Aussage
2 ist Teiler von 6
gleichbedeutend ist mit der Aussage
6 ist ein Vielfaches von 2,
da beide Aussagen das Gleiche meinen, nämlich daß sich 6 als Produkt mit 2 als einem Faktor schreiben läßt. Gerade im Primarbereich scheint mir eine enge Verknüpfung mit der Vielfachenrelation besonders angebracht zu sein, da den Schülern dort die Vielfachen einer Zahl in Form der Einmaleinsreihen schon oft begegnet sind und somit dieses neue Gebiet leichter in das schon vorhandene Wissen integriert werden kann. Aber auch generell scheint mir im Sinne des *operativen Prinzips* eine enge Verknüpfung und Parallelbehandlung der Teilbarkeits- und Vielfachenrelation unbedingt wünschenswert zu sein (8).

Im Zusammenhang mit der Teilbarkeitsrelation müssen die Schüler unbedingt die Begriffe *„teilen" und „dividieren"* auseinanderhalten, zumal das Dividieren umgangssprachlich oft auch als Teilen bezeichnet wird. Vom *Teilen* wird *hier* dagegen nur dann gesprochen, wenn die zugehörige Divisionsaufgabe den Rest O hat bzw. in der zugehörigen Multiplikationsaufgabe nur natürliche Zahlen vorkommen.
Ein weiterer Unterschied zwischen Dividieren und Teilen muß beachtet werden: Bei Divisionsaufgaben will man wissen, *wie oft* der Divisor im Dividenden enthalten ist, bei Teilbarkeitsaufgaben dagegen nur, *ob* eine Zahl Teiler einer zweiten Zahl ist.
In der didaktischen Literatur findet man zum Teil auch den Vorschlag, statt des bislang benutzten „|" für „ist Teiler von" ein „T" zu benutzen (das an das Wort Teiler erinnern soll), also etwa statt
$3 \mid 12$ zu schreiben 3 T 12
An Argumenten hierfür werden genannt:
(1.) ein leichteres Behalten dieses Zeichens sowie
(2.) eine Verhinderung von sonst möglichen Verwechslungen mit der Zahlenpaarschreibweise (4 | 11) bzw. mit der Bruchschreibweise ($^4/_{11}$).
Es stellt sich allerdings die Frage, ob die Verwechslungsgefahr wirklich so groß ist, daß hier für die Schule extra ein neues — in der Hochschulmathematik nicht gebräuchliches — Zeichen eingeführt werden sollte.

2. Veranschaulichungsmittel der Teilbarkeitsrelation

Bislang haben wir nur die Teilbarkeitsbeziehung zwischen *zwei* Zahlen durch Bilder (Mengenbilder, Strecken, Rechtecke) veranschaulicht, also auf der ikonischen Repräsentationsebene erfahrbar gemacht. Für die Veranschaulichung der Teilbarkeitsrelation zwischen *mehreren* Zahlen — als Hilfsmittel zur Erarbeitung bzw. zur Begründung von Aussagen — sind folgende Veranschaulichungen wichtig, auf die ich hier nur ganz knapp eingehen kann:
(1.) *Das Pfeildiagramm oder Pfeilbild*
Hierzu ordnet man den gegebenen Zahlen Punkte der Zeichenebene zu. Ist a Teiler von b, so zeichnet man einen Pfeil von a nach b.
Beispiel:



Bei einer größeren Anzahl von Zahlen wird das Pfeilbild rasch sehr unübersichtlich, im Gegensatz zur:
(2.) *Teilertabelle:*
Kreuzen wir in der Tabelle ein Feld jeweils an, wenn die links stehende Zahl ein Teiler der oben stehenden Zahl ist, so erhalten wir für die ersten 6 Zahlen folgende Teilertabelle:

	1	2	3	4	5	6
1	x	x	x	x	x	x
2		x		x		x
3			x			x
4				x		
5					x	
6						x

Die hier vorgestellten Veranschaulichungsmittel sind *nicht* nur speziell bei der Teilbarkeitsrelation einsetzbar, sondern generell bei Relationen!
Da die Teilbarkeitsrelation einige spezielle Eigenschaften aufweist, kann das Pfeildiagramm zu einem sogenannten

(3.) *Hasse-Diagramm*
vereinfacht werden.
Auf diese wichtige und vielseitig einsetzbare Veranschaulichungsmittel gehe ich im nächsten Abschnitt knapp ein.

3. Die Teilbarkeitsrelation als Ordnungsrelation

Untersuchungen von Pfeildiagrammen und Teilertabellen zeigen, daß in Pfeildiagrammen zu *jeder* Zahl ein Ringpfeil gehört bzw. in Teilertabellen die Hauptdiagonale vollständig mit Kreuzen besetzt ist. So schlägt sich anschaulich nieder, daß für jede natürliche Zahl a gilt: a | a, d. h. daß die Teilbarkeitsrelation (und natürlich auch die Vielfachenrelation) *reflexiv* ist. Wegen des aufgezeigten Zusammenhangs zwischen Teilbarkeits- und Vielfachenrelation können wir jede Teilbarkeitsaussage auch als Vielfachenaussage bzw. auch umgekehrt deuten. Ich verzichte darauf, dies im folgenden jeweils extra zu erwähnen.
An den Pfeildiagrammen fällt weiter auf, daß dort keine Doppelpfeile existieren bzw. an der Teilertabelle, daß dort unterhalb der Hauptdiagonale keine Kreuze sich befinden.
So schlägt sich in diesen beiden Veranschaulichungsmitteln nieder, daß für die Teilbarkeitsrelation für a ≠ b nicht zugleich gilt: a | b und b | a, daß also die Teilbarkeitsrelation *identiv* (antisymmetrisch) ist.
Die *Transitivität* der Teilbarkeitsrelation (also der Sachverhalt, daß aus a | b und b | c folgt a | c) läßt sich schließlich an *Teilertabellen* *nicht* unmittelbar ablesen, dagegen deutlich an *Pfeildiagrammen*, nämlich in Form sogenannter Überbrückungspfeile.
Man wird allerdings diese *Begriffe* im Unterricht — wenn überhaupt, höchstens in der Orientierungsstufe — nur sehr behutsam einführen und auch erst dann, wenn sich eine derartige allgemeine Begriffsbildung lohnt, nämlich wenn die Schüler vielfältige Beispiele und Gegenbeispiele [Kontrastprinzip!] entsprechender Relationen kennengelernt haben und ein gemeinsamer Name für die verschiedenen Ausprägungen desselben Sachverhaltes wünschenswert erscheint. In den meisten Fällen wird man jedoch in der anschaulichen — durch die Teilertabellen bzw. Pfeilbilder vorgegebenen — Sprechweise verbleiben.
Die speziellen Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation (Reflexivität, Identitivität und Transitivität) gestatten hier — wie bei allen identitiven Ordnungsrelationen — eine Vereinfachung der vielfach recht unübersichtlichen Pfeildiagramme zu sogenannten *Hasse-Diagrammen.* Diese ermöglichen eine Fülle sehr interessanter Aufgaben, auf die ich an dieser Stelle nicht genauer eingehen kann (9).

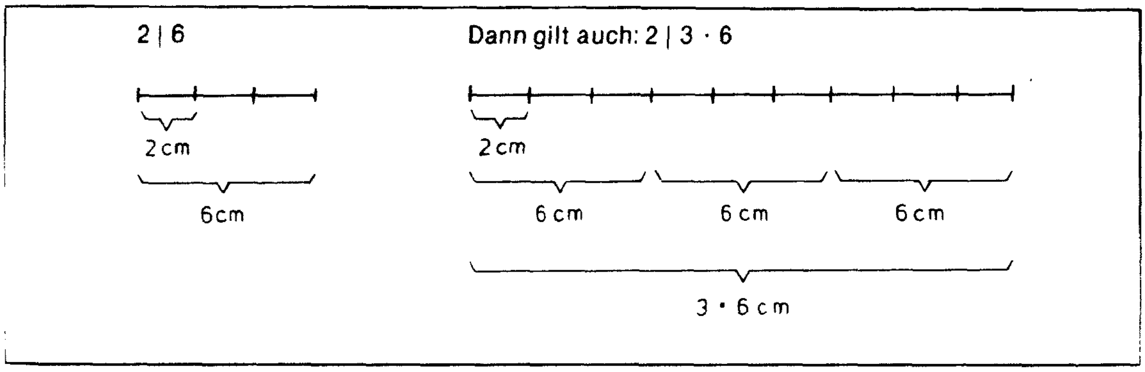
4. Zusammenhänge zwischen der Teilbarkeitsrelation und den Rechenoperationen

Zwischen der Addition bzw. Subtraktion sowie der Teilbarkeitsrelation besteht folgender Zusammenhang (10):
aus a | b und a | c folgt a | (b + c) sowie
aus a | b und a | c und b > c folgt a | (b — c)
Ich beschränke mich im folgenden auf eine exemplarische Untersuchung der Behandlungsmöglichkeiten der *Produktregeln,* um hieran die reichhaltigen Möglichkeiten dieses Stoffgebietes zur Erreichung wichtiger *„Lernziele mittlerer Hierarchie"* des Mathematikunterrichts im Sinne *Winters* aufzuzeigen, nämlich des *Argumentieren-Könnens,* des *Sich-Kreativ-Verhaltens* sowie insbesondere auch der geistigen Grundtechniken des *Generalisierens, Spezialisierens, Analogisierens und Formalisierens* (11).
Hierbei ist eine Erarbeitung des durch die genannten Regeln ausgedrückten Beziehungsnetzes zwischen der Teilbarkeitsrelation und den Rechenoperationen (Addition, Subtraktion und Multiplikation) auch im Sinne des *Integrationsprinzips* sehr erwünscht; denn — so *Wittmann* [6] — „Das Individuum kann mit der Umwelt umso erfolgreicher in Wechselwirkung treten, je vollständiger und mobiler seine Erkenntnisse in Beziehungsnetzen integriert und organisiert sind. Man hat daher im Unterricht auf die Schaffung von Beziehungsnetzen und Sinnzusammenhängen hinzuarbeiten".
Folgende drei *Produktregeln* lassen sich unter methodischen Gesichtspunkten unterscheiden:
(1.) *allgemeiner Fall*
aus a | b und c | d folgt a · c | b · d
(2.) *Spezialfall 1*
aus a | b folgt a | d · b
(3.) *Spezialfall 2*
aus a | b folgt d · a | d · b
Hierbei wird der Spezialfall 1 wegen seiner Bedeutung für die Ableitung von Teilbarkeitsregeln in den Schulbüchern am häufigsten angesprochen.
Wieso sind (2.) und (3.) Spezialfälle von (1.)?
Speziell c = 1 in (1.) ergibt die allgemeingültige Aussage 1 | d und damit (2.).
Speziell c = d in (1.) ergibt die allgemeingültige Aussage d | d und damit (3.).
[Die Umstellung bei d · b und d · a ist wegen des Kommutativgesetzes trivialerweise erlaubt und erfolgt wegen der hier entsprechend benutzten Vielfachenschreibweise.]
Der *allgemeine Fall (1.)* eignet sich gut für *eine* Form von Differenzierungsmaßnahmen, nämlich für eine Differenzierung durch *Zusatzstoffe für leistungsstärkere* Gruppen; denn diese Aussage (1.) ist für den weiteren Aufbau der Teilbarkeitslehre nicht unbedingt erforderlich.
Im Zusammenhang mit der *beispielgebundenen Erarbeitung* dieser Aussage (1.) kann man in *leistungsstarken* Gruppen der Orientierungsstufe auch schon den Aspekt des *Formalisierens* kurz ansprechen; denn erst durch eine Formulierung mit Variablen wird diese Aussage übersichtlich, griffig und prägnant [Versuchen Sie einmal, die Aussage (1.) ohne Variable zu formulieren!]
Im folgenden gehe ich genauer auf den wichtigen *Spezialfall 1* (aus a | b folgt a | d · b) ein.

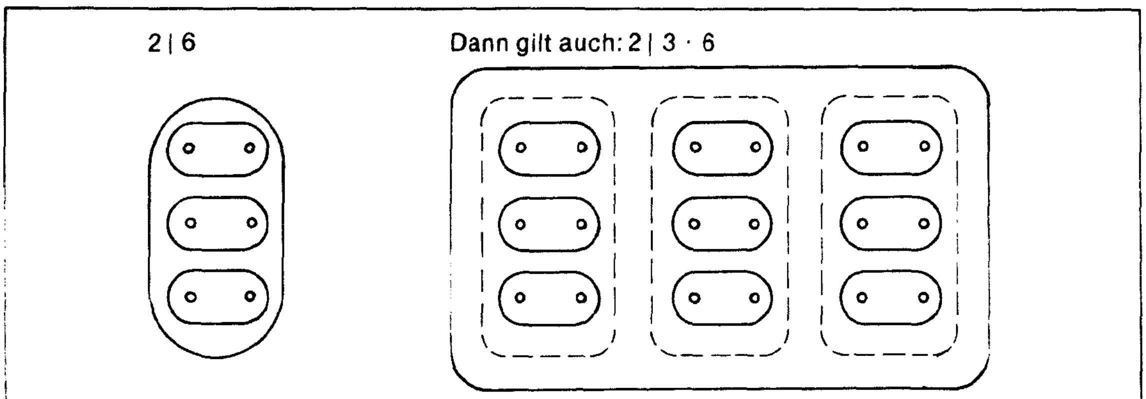
Die entsprechende Aussage kann man im Unterricht unterschiedlich schwierig formulieren, je nachdem, ob man etwa allgemein oder beispielgebunden, verbal oder mit Variablen formuliert. So ist also auch von der Art der Formulierung mathematischer *Sätze* her eine Differenzierungsmöglichkeit für den Unterricht gegeben, wie ich es analog für „Definitionen" schon im Zusammenhang mit der Teilbarkeitsdefinition etwas näher ausgeführt habe.

Aber nicht nur bei der Formulierung mathematischer Sätze, sondern viel stärker noch bei ihrer *Begründung* ergeben sich breite Differenzierungsmöglichkeiten, je nach der „Höhe" des zugrundegelegten Begründungsniveaus.

(1.) *Enaktive/ikonische Repräsentationsebene*
beispielgebunden
(a) mittels Strecken



(b) mittels „Punktmengen" (12)



Die Vorgehensweise ist hier zwar beispielgebunden (und nicht allgemein), sie ist aber auf jeden anderen entsprechenden Fall sofort übertragbar. *Griesel* [2] spricht in diesem Zusammenhang von „Einsicht an figuralanschaulichen Gegebenheiten" und sagt [diese Vorgehensweise] „liefert eine Strategie und damit eine *generalisierbare* Einsicht".

Im *Primarbereich* ist hier sogar u. U. eine Argumentation auf der *enaktiven* Repräsentationsebene denkbar.

Aber auch der Schritt von der obigen Argumentation zu einer entsprechenden Argumentation auf der *symbolischen* Repräsentationsebene und der Gewinnung einer Beweisstrategie auch dort ist denkbar kurz und einfach:

(2.) *Symbolische Repräsentationsebene*
beispielgebunden — allgemein

Ein möglicher Anstoß für die Schüler (in Anlehnung an das Schulbuch Gamma) könnte die Aufforderung sein:
Begründe $2 \mid 3 \cdot 6$, indem du $3 \cdot 6$ in eine Summe zerlegst.

Die Schüler sollen also die Multiplikation auf die Addition zurückführen, also hier konkret schreiben $3 \cdot 6 = 6 + 6 + 6$, und auf die so erhaltene Summe die schon bekannte Summenregel (verallgemeinert auf mehrere Summanden!) anwenden. Damit haben sie dann hier gezeigt: aus $2 \mid 6$ folgt $2 \mid 3 \cdot 6$. Analog kann man bei allen anderen geeigneten Beispielen vorgehen und so zu einer *generalisierbaren* Einsicht gelangen.

Obige Begründung läßt sich offenkundig leicht zu einem *Beweis* ausbauen, wenn ich statt der obigen drei Zahlen Variable a, b, d einsetze. Dieses höchste erreichbare Begründungsniveau dürfte in leistungsstarken Gymnasialklassen der Orientierungsstufe an dieser Stelle leicht erreichbar sein.

Eine Begründung dieser Produktregel auf der Grundlage des vorgestellten Weges möglichst auf der ikonischen und symbolischen Repräsentationsebene bietet folgende *Vorteile:*

(1.) Durch die Benutzung beider Repräsentationsebenen ist eine gute *Abstufung* im Begründungsniveau möglich, die gerade auch für innere Differenzierungsmaßnahmen wichtig ist.

(2.) Wissen, das in verschiedenen Darstellungsformen erworben wurde und verfügbar ist, kann — nach *Wittmann* [6] — leichter *behalten* werden. Außerdem erhöht die Fähigkeit, Wissen nach Bedarf von der einen Darstellungsform in die andere zu übertragen — hierbei wird auch *Analogisieren* geübt! — die Flexibilität und Erfolge beim *Problemlösen*.

(3.) Eine gleichzeitige Behandlung beider Repräsentationsebenen trägt zu einer *wechselseitigen Stützung und Klärung* des Beweisgedankens bei.

(4.) Durch die Rückführung der (neuen) Produktregel auf die (schon bekannte) Additionsregel wird eine sehr erwünschte *Verzahnung* zwischen diesen beiden Regeln erreicht. (Der *Netzcharakter* mathematischer Aussagen wird so deutlich.) Diese Verzahnung bietet außerdem eine gute Gelegenheit zur weiteren Festigung und Einübung der Additionsregel.

(5.) Der zentrale Beweisgedanke ist ein *recht allgemeiner Gedankengang,* den wir *häufig* in der Mathematik anwenden, nämlich die Rückführung einer höheren Rechenart auf eine einfachere (hier die Multiplikation auf die Addition, aber auch etwa bei den Potenzgesetzen das Potenzieren auf das Multiplizieren usw.). Dies ist — nach dem „advanced organizer"-Konzept von *Ausubel* [1] — für eine *gute Verankerung* dieser Beweisidee sehr förderlich.

Die dargestellten Begründungen der Produktregel belegen meines Erachtens auch deutlich, daß die bei Lernzielformulierungen vielfach vorfindbaren Anforderungsunterschiede zwischen leistungsschwächeren Gruppen (entsprechende Aussagen *nennen* und *anwenden* können) und leistungsstärkeren Gruppen (entsprechende Aussagen zusätzlich *begründen* können) viel zu schematisch und nicht sachgerecht sind, wenn man verschiedene Repräsentationsebenen einbezieht und *höchstens* — wenn überhaupt — auf der symbolischen Repräsentationsebene eine gewisse Berechtigung haben.

An dieser Stelle kann ich gut auf eine weitere mögliche Form der *Differenzierung* im Mathematikunterricht hinweisen, nämlich auf die Möglichkeit der *Begründung* einer Aussage durch einen weiteren — etwa mathematisch eleganteren — *Beweis.* So läßt sich die Produktregel auch — mathematisch eleganter (13) — über die schon behandelte Transitivität der Teilbarkeitsrelation beweisen.

Die Produktregel läßt sich — das zeigen deutlich die verschiedenen aufgezeigten Begründungsniveaus — sicher schon in der *Primarstufe* im Rahmen eines Spiralcurriculums sinnvoll behandeln und begründen. Allerdings halte ich die folgende Vorgehensweise eines Schulbuches (14) für die 4. Klasse für ausgesprochen problematisch.

In diesem Schulbuch werden im Zusammenhang mit der Produktregel ausschließlich die folgenden beiden Aufgaben behandelt:

15. Folgende Produkte sind durch 7 teilbar:
$7 \cdot 19 \cdot 15$, $14 \cdot 11 \cdot 35$, $35 \cdot 16 \cdot 43$
Das kann man erkennen, ohne vorher auszurechnen. Warum?

16. Sind die Produkte durch 7 (durch 3, durch 4) teilbar?
$32 \cdot 15 \cdot 22$, $42 \cdot 15 \cdot 21$, $36 \cdot 35 \cdot 19$,
$28 \cdot 37 \cdot 58$, $53 \cdot 82 \cdot 98 \cdot 36$
Was ist hieran problematisch?

(1.) Sinnvoll wäre zunächst eine Untersuchung von Produkten mit 2 Faktoren. Dieser Fall wird *überhaupt nicht* untersucht.

(2.) Da hier *mehr als 2 Faktoren* vorkommen, ist zur Begründung eventuell gefundener Aussagen ein Rückgriff auf die ikonische Repräsentationsebene (oder auch ein Rückgriff auf die naheliegende Erklärung der Multiplikation als verkürzte Addition) faktisch *nicht* möglich.

(3.) Bei Aufgabe 15 ließe sich *zur Not* noch rein auf der symbolischen Ebene eine Begründung finden (15). Aufgabe 16 dürfte dagegen in diesem Zusammenhang einem *falschen* Transfer und *fehlerhaften* Begründungen Vorschub leisten; denn während man in Aufgabe 15 aufgrund der Auswahl der Zahlenbeispiele zu der (richtigen) Erkenntnis gelangen könnte, daß — wenn ein Faktor eines Produktes durch 7 teilbar ist — das ganze Produkt durch 7 teilbar ist, verführt Aufgabe 16 zu dem ergänzenden, jedoch *falschen* Schluß: Wenn *kein* Faktor durch 7 oder 4 oder allgemein durch a teilbar ist, dann ist das Produkt ebenfalls *nicht* durch 7 oder 4 oder a teilbar; denn es gilt beispielsweise:
$4 \mid 18 \cdot 22$, aber $4 \nmid 18$ und $4 \nmid 22$.

Der obige Schluß ist vielmehr nur dann richtig, wenn der Teiler — wie im Fall 7! — eine *Primzahl* ist.

Eine derartige differenzierte Behandlung — zumal noch rein auf der symbolischen Ebene! — ist jedoch offensichtlich *nicht* für eine erste Heranführung an die Produktregel in der Primarstufe geeignet, sondern *höchstens* für leistungs*starke* Gruppen in der Orientierungsstufe *nach* einer vorhergehenden gründlichen Behandlung der Produktregel für zwei Faktoren.

Zum Schluß der Behandlung der Produktregeln noch einige knappe Hinweise auf einige weitere gute *Möglichkeiten zur logischen Schulung* im Umkreis dieser Regeln:

(1.) Vor der Produktregel behandelt man im Unterricht die Summenregel. Diese Tatsache bewirkt reichhaltige Möglichkeiten zum *Analogisieren* und zum selbständigen Finden von Vermutungen (durch Fragen wie: Wie müßte eine entsprechende Produktregel lauten? Gilt sie wirklich?)

(2.) Man kann hier gut beispielgebunden die Frage der *Umkehrbarkeit* von Aussagen ansprechen. Während nämlich die bislang breit behandelte Produktregel *nicht* umkehrbar ist — wie Gegenbeispiele leicht belegen —, ist die so ähnlich klingende 3. Produktregel umkehrbar.

(3.) An Beispielen wie der eben schon genannten — in dieser Allgemeinheit falschen — Aussage aus $a \nmid b$ und $a \nmid c$ folgt $a \nmid b \cdot c$ oder der ebenfalls — in dieser Allgemeinheit falschen — Aussage aus $a \mid c$ und $b \mid c$ folgt $a \cdot b \mid c$ kann man in leistungs*starken* Klassen der *Orientierungsstufe* das *Spezialisieren* (oder Spezifizieren) üben; denn während beide Aussagen für beliebige natürliche Zahlen falsch sind — wie Gegenbeispiele rasch belegen — sind sie speziell für *Primzahlen* richtig. Dieser Tatbestand bietet auch eine gute Gelegenheit, die Schüler durch geschickte Auswahl von Beispielen vor den Gefahren eines zu leichtfertigen *Generalisierens* zu warnen.

Abschließend möchte ich knapp und systematisch die bisher schon an verschiedenen Stellen angesprochenen Gründe für eine Behandlung der Teilbarkeitsrelation im Unterricht zusammenstellen:

5. Gründe für eine Behandlung der Teilbarkeitsrelation (und ihrer Eigenschaften) im Unterricht

In Anlehnung an *Kahle* [3] gliedere ich die Gründe nach zwei Aspekten:
(1.) *Die inhaltliche Bedeutung des Stoffgebietes:*
(a) Die behandelten Aussagen bilden eine Basis für die Begründung der *Teilbarkeitsregeln*, die für die *Bruchrechnung* wichtig sind (z. B. für das Kürzen von Brüchen).
(b) Anhand der Teilbarkeitsrelation lassen sich gut Vorarbeiten für eine spätere, allgemeine Einführung des *Relationsbegriffs* — eines *Leitbegriffs* des Mathematikunterrichts — leisten, aber auch viele *Eigenschaften von Relationen* lassen sich hier etwa anhand von Pfeildiagrammen oder Teilertabellen sehr anschaulich gewinnen. Die Teilbarkeitsrelation ist ein wichtiges Beispiel für eine *Ordnungsrelation* (16), von ihr aus führt ein direkter Weg zur Kongruenzrelation als einem wichtigen Beispiel einer *Äquivalenzrelation* (und damit zu den Restklassen) (17).
(2.) *Die Eignung des Stoffgebietes zur Verfolgung übergreifender Ziele* im Sinne der „Lernziele mittlerer Hierarchie" nach *Winter* [5]
Ein großer Vorzug des behandelten Stoffgebietes ist es, daß hier viele interessante Aussagen leicht verständlich und ohne aufwendige Terminologie gefunden, formuliert und durch Rückgriff auf Handlungen oder Bilder und Diagramme, also auf der enaktiven bzw. ikonischen Repräsentationsebene, begründet werden können. Daher *bieten sich hier reichhaltige Möglichkeiten, den Lernzielen „Argumentieren zu können" und „sich kreativ zu verhalten" näher zu kommen.* Dagegen dürfte der Beitrag zum Lernziel „Situationen mathematisieren zu können" nur gering sein.
Neben seinem Beitrag zur Entwicklung des begründenden und kreativen Denkens leistet das Stoffgebiet aber *auch einen guten Beitrag zur Entwicklung der wichtigen mathematischen Grundtechniken des Klassifizierens, Ordnens, Generalisierens, Spezialisierens, Analogisieren und Formalisierens.* Ich habe dies an einigen Stellen schon im Vorstehenden belegt, weitere Beispiele für alle genannten Fertigkeiten können leicht gefunden werden.
So können wir abschließend festhalten, daß eine gründliche Behandlung der Teilbarkeitsrelation etwa im skizzierten Stil aufgrund der vielfältigen Argumente aus *beiden* (18) Argumentgruppen unbedingt wünschenswert ist, zumal ich hier nur eine kleine Auswahl (19) möglicher Inhalte dieses Stoffgebietes — zum Teil sogar nur knapp — präsentieren konnte.

Literatur

[1] *Ausubel, D. P.:* Educational Psychology, A Cognitive View, New York 1968.
[2] *Griesel, H.:* Gibt es eine Hauptschulspezifische Mathematik? Grundsätzliche Überlegungen und Beispiele. In: Westermanns Pädagogische Beiträge, 1977, H. 4, S. 147—150.
[3] *Kahle, D.:* Gesichtspunkte zur Stoffauswahl und zur Lernzielproblematik im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1976, Hannover 1977, S. 103—106.
[4] *Padberg, F.:* Elementare Zahlentheorie, Freiburg ³1976.
[5] *Winter, H.:* Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Beiträge zum Lernzielproblem, Ratingen 1972.
[6] *Wittmann, E.:* Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig 1974.

Anmerkungen

(1) Für über diesen Artikel hinausgehende mathematische Aussagen zur Teilbarkeitsrelation vergleiche man: *Padberg, F.:* Elementare Zahlentheorie, Freiburg 1976 (3. erweiterte Auflage).
(2) Wir betrachten hier die natürlichen Zahlen *ohne* die Zahl Null.
(3) Leicht abgeändert nach: Neunzig-Sorger, Wir lernen Mathematik, 4. Schuljahr, Herder Verlag
(4) Gamma 6, Mathematik, Klett Verlag
(5) Oehl-Palzkill, Die Welt der Zahl — Neu, 3. Schuljahr, Schroedel-Verlag.
(6) Gamma 6: Hauptschule und Grundband
(7) Gamma 6: Gymnasium
(8) In den Schulbüchern ist dagegen die Abfolge zwischen Teilbarkeits- und Vielfachenrelation sehr unterschiedlich: zum Teil wird zunächst seitenlang die Teilbarkeits- und dann seitenlang die Vielfachenrelation behandelt bzw. zunächst die Vielfachenrelation und dann die Teilbarkeitsrelation, und nur vereinzelt gibt es Ansätze zu einer integrierten Behandlung im Sinne des operativen Prinzips.
(9) Man vergleiche hierzu ggf. meinen sehr ausführlichen Aufsatz: „Teilbarkeitsgraphen von Teilermengen" in der Zeitschrift: Der Mathematikunterricht, 2/1973, S. 16—35.
(10) Man vergleiche auch: *Padberg, F.*, Elementare Zahlentheorie, Freiburg ³1976.
(11) Auch das Klassifizieren und Ordnen kann par excellence durch die Teilbarkeitsrelation eingeübt werden.
(12) Hat man bei der Argumentation mit Strecken (in dieser Klassenstufe unbegründete, da nur $\mathbb{N}$ bekannt!) Bedenken, weil die Längen einen *divisiblen* Größenbereich bilden (und damit die Eigenschaft, daß die vorkommenden Zahlen jeweils *alle* natürliche Zahlen sein müssen nicht deutlich genug herauskommt; beim Messen genügt, wenn in $n \cdot a = b$ *nur* $n \in \mathbb{N}$), kann man mit „Punktmengen" argumentieren.
(13) Beim ersten Beweis ist es im Sinne mathematischer Eleganz störend, daß wir Summen aus d Summanden nicht vollständig hinschreiben können. Der dahinterstehende Beweisgedanke ist jedoch naheliegender und allgemeiner anwendbar, daher bewirkt er vermutlich ein besseres Behalten.
(14) *Oehl-Palzkill,* Welt der Zahl — Neu, 4. Schuljahr, Schroedel-Verlag.
(15) Beispiel: $7 \mid 14 \cdot 11 \cdot 35$; denn $14 \cdot 11 \cdot 35 = 7 \cdot (2 \cdot 11 \cdot 35)$.
(16) Die Teilbarkeitsrelation ist eine identitive Ordnungsrelation. Sie ist in geeignet ausgewählten Teilmengen linear, generell ist sie *nicht* linear.
(17) Man vergleiche: *Padberg, F.*, a. a. O.
(18) Kahle macht zu Recht darauf aufmerksam, daß viele inhaltlich wichtige Stoffe oft einen relativ hohen Schwierigkeitsgrad haben, so daß sie für selbständiges Entdecken und Beweisen durch Schüler weniger geeignet sind.
(19) Es fehlte eine Behandlung der Summen- und Differenzregel sowie damit zusammenhängender Fragestellungen, der *Hasse*-Diagramme mit ihren breiten Einsatzmöglichkeiten, eine Behandlung der Zusammenhänge zwischen der Teilbarkeitsrelation und der Inklusion der zugehörigen Teilermengen oder auch des großen Gebietes der Teilbarkeitsregeln usw. Für die mathematischen Grundlagen der genannten Gebiete vergleiche man: *Padberg, F., a. a. O.*