

Teilbarkeitsgraphen werden bislang erst vereinzelt und meist nur in recht geringem Umfang in den neuesten Auflagen von Schulbüchern als Hilfsmittel bei der Behandlung der Teilbarkeitslehre in der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen eingesetzt.

Dabei sollten und könnten sie wesentlich stärker benutzt werden; denn sie bieten – wie im folgenden gezeigt werden soll – breite Einsatzmöglichkeiten und gestatten es, viele Aussagen und Sachverhalte elementar-anschaulich abzuleiten oder zumindest zu verdeutlichen.

Die Benutzung von Teilbarkeitsgraphen bietet sich insbesondere an:

1. bei der Behandlung der Teilbarkeitsrelation in \mathbb{N} als Ordnungsrelation,
2. bei der Durchführung von Teilbarkeitsuntersuchungen in \mathbb{N} und
3. bei verbandstheoretischen Fragestellungen.

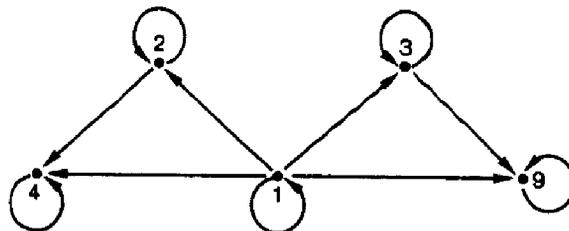
Im folgenden soll zunächst der Begriff *Teilbarkeitsgraph* eingeführt werden. Man definiert bekanntlich: $a \mid b$ für $a, b \in \mathbb{Z}$, wenn ein $q \in \mathbb{Z}$ existiert mit $q \cdot a = b$. Die Teilbarkeitsrelation ist in der Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen *reflexiv* (d.h. für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt: $a \mid a$) und *transitiv* (d.h. für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt: $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$), wie man unmittelbar durch Rückgriff auf die Teilbarkeitsdefinition beweist.

Man kann sich bei der Untersuchung der Teilbarkeitsrelation sogar wegen der Aussage: $a \mid b \Leftrightarrow |a| \mid |b|$, die man durch entsprechende Fallunterscheidungen und unter Benutzung der Teilbarkeitsdefinition unmittelbar ableiten kann, sowie wegen der leicht überschaubaren Teilbarkeitsverhältnisse der Zahl 0 ($a \mid 0$ für alle $a \in \mathbb{Z}$, dagegen: $0 \mid a \Leftrightarrow a = 0$) auf die Teilmenge \mathbb{N} von \mathbb{Z} beschränken.

Die Teilbarkeitsrelation ist auch in \mathbb{N} reflexiv und transitiv; sie ist hier sogar zusätzlich noch *identitiv* (d.h. es gilt: $a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = b$). Die Teilbarkeitsrelation in \mathbb{N} läßt sich in jeder endlichen Teilmenge M von \mathbb{N} durch *Hasendiagramme* veranschaulichen. Hierzu ordnet man jedem Element $a \in M$ ein-

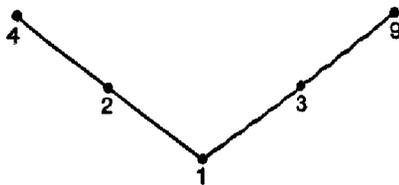
deutig einen Punkt der Zeichenebene zu, den man mit a bezeichnet. Gilt $a \mid b$, so zeichnen wir einen Pfeil von a nach b . Wir können so beispielsweise für die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 9\}$ das Diagramm der Abb. 1 erhalten:

Abb. 1: Pfeildiagramm von $M = \{1, 2, 3, 4, 9\}$ bezüglich der \mid -Relation



In diesem Diagramm weist *jeder* Punkt wegen der Reflexivität der Teilbarkeitsrelation einen *Ringpfeil* auf, d. h. einen Pfeil, der den Punkt wieder direkt mit sich selbst verbindet. Wir können daher im folgenden in Pfeildiagrammen von beliebigen endlichen Teilmengen M von \mathbb{N} bezüglich der \mid -Relation sämtliche Ringpfeile ohne Informationsverlust weglassen, um so die Diagramme übersichtlicher zu gestalten. Aus demselben Grund lassen wir auch alle *Überbrückungspfeile* fort, d. h. alle Pfeile, die – wenn a, b, c drei verschiedene Punkte der Zeichenebene sind und je ein Pfeil von a nach b und von b nach c geht – direkt a mit c verbinden; denn wegen der Transitivität der Teilbarkeitsrelation besitzt nämlich jedes Pfeildiagramm *alle* möglichen Überbrückungspfeile. Schließlich können wir auch noch auf die *Pfeilspitzen* verzichten, wenn wir alle Punkte so anordnen, daß die Pfeile senkrecht oder schräg nach oben zeigen. Dies ist möglich, da die Pfeildiagramme wegen der Identitivität der Teilbarkeitsrelation in \mathbb{N} (im Gegensatz zur Teilbarkeitsrelation in \mathbb{Z} !) keine Doppelpfeile zwischen verschiedenen Punkten besitzen. Das so vereinfachte Pfeildiagramm bezüglich der \mid -Relation bezeichnen wir als *Teilbarkeitsgraph* (Abb. 2).

Abb. 2: Teilbarkeitsgraph von $M = \{1, 2, 3, 4, 9\}$



Der Teilbarkeitsgraph besteht also aus *Knoten* (Punkten) und *gerichteten Kanten*. Er vermittelt uns denselben Informationsgehalt wie das Pfeildiagramm, ist dabei jedoch wesentlich übersichtlicher¹.

¹ Aus der Ableitung geht hervor, daß man *nicht nur* bei der \mid -Relation, sondern allgemein bei *allen* reflexiven, transitiven und identitiven Relationen das Pfeildiagramm entsprechend vereinfachen kann. Man bezeichnet entsprechend vereinfachte Pfeildiagramme auch als *Hasse-Diagramme*.

Im folgenden werden wir die Teilbarkeitsrelation in speziellen Teilmengen von \mathbb{N} , nämlich in *Teilmengen* $T(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid a\}$ untersuchen, da sich diese Mengen besonders gut für Teilbarkeitsuntersuchungen eignen. Für die zugehörigen Teilbarkeitsgraphen kann man nämlich - mindestens soweit sie für die praktische Arbeit im Unterricht von Bedeutung sind - eine einfache und praktikable Typisierung einführen. Zu ihrer Aufstellung benötigen wir zunächst genauere Aussagen über die Elemente von Teilmengen²:

Der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie besagt, daß jede natürliche Zahl $a > 1$ genau eine normierte Primfaktorzerlegung besitzt, d.h. eine Darstellung der Form $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}$ mit $p_i \in \mathbb{P}$, $n_i \in \mathbb{N}$ (für $i = 1, \dots, r$)³ und $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ (wobei auch $r = 1$ zugelassen ist). Nach Definition der Teilbarkeitsrelation und wegen der Eindeutigkeit der normierten Primfaktorzerlegung jeder natürlichen Zahl $a > 1$ dürfen in den Primfaktorzerlegungen der Teiler t von a nur die Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_r vorkommen. Für die Exponenten α_i der Teiler t von a muß außerdem gelten: $\alpha_i \leq n_i$. Wegen $p_i^0 = 1$ für jedes $p_i \in \mathbb{P}$ besteht daher die Teilermenge $T(a)$ der natürlichen Zahl $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}$ ($p_i \in \mathbb{P}$, $n_i \in \mathbb{N}$) genau aus den Zahlen $t = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, und $0 \leq \alpha_i \leq n_i$.

Von besonders einfacher Struktur sind die *Teilbarkeitsgraphen der Teilmengen* $T(p^m) = \{1, p, \dots, p^m\}$ mit $p \in \mathbb{P}$ und $m \in \mathbb{N}$. In diesem Fall sind nicht nur - wie bei allen Teilmengen $T(a)$ - sämtliche Elemente von $T(p^m)$ Teiler von p^m , sondern zusätzlich gilt bei zwei beliebig herausgegriffenen Elementen $a = p^{n_1}$, $b = p^{n_2} \in T(p^m)$ jeweils: $a \mid b$ oder $b \mid a$.

Daher müssen sämtliche Knoten auf einem von 1 bis p^m unverzweigt verlaufenden Kantenzug liegen. Als einfachste Form bietet sich infolgedessen für die Teilbarkeitsgraphen von $T(p^m)$ die vertikale Anordnung der Knoten an, wie sie Abb. 3 zeigt. (Graphen dieser Form bezeichnet man auch als *Ketten*.) In diesem Teilbarkeitsgraphen sind also die Elemente von $T(p^m)$ der Größe nach vertikal angeordnet. Dem Aufsteigen in der Kette entspricht ein Multiplizieren mit p , dem Absteigen ein Dividieren durch p .

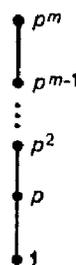


Abb. 3: Teilbarkeitsgraph von $T(p^m)$ mit $p \in \mathbb{P}$, $m \in \mathbb{N}$

² Für einen Beweis dieser und auch weiterer zahlentheoretischer Aussagen dieses Aufsatzes vgl. man [4].

³ \mathbb{P} bezeichne die Menge der Primzahlen.

Die Teilermenge $T(p^m \cdot q^n)$ mit $p, q \in \mathbb{P}$, $p \neq q$, $m, n \in \mathbb{N}$ enthält die Elemente: $1, p, \dots, p^m, q, q^2, \dots, q^n, pq, pq^2, \dots, pq^n, \dots, p^m q, p^m q^2, \dots, p^m q^n$. Im zugehörigen Teilbarkeitsgraphen können wir nicht *sämtliche* Elemente von $T(p^m q^n)$ kettenförmig anordnen, da beispielsweise weder $p \mid q$ noch $q \mid p$ gilt. Eine kettenförmige Anordnung für die Teilmengen $T(p^m)$ und $T(q^n)$ von $T(p^m q^n)$ ist jedoch möglich. Wir lassen diese beiden Ketten aufeinander senkrecht stehen und ordnen gleichzeitig die mit q, q^2, \dots, q^n multiplizierten Elemente von $T(p^m)$ jeweils auf Ketten parallel zur Kette von $T(p^m)$ an (vgl. Abb. 4). Ziehen wir schließlich noch Parallelen zur Kette von $T(q^n)$, so erhalten wir einen sehr übersichtlichen Teilbarkeitsgraphen von $T(p^m q^n)$.

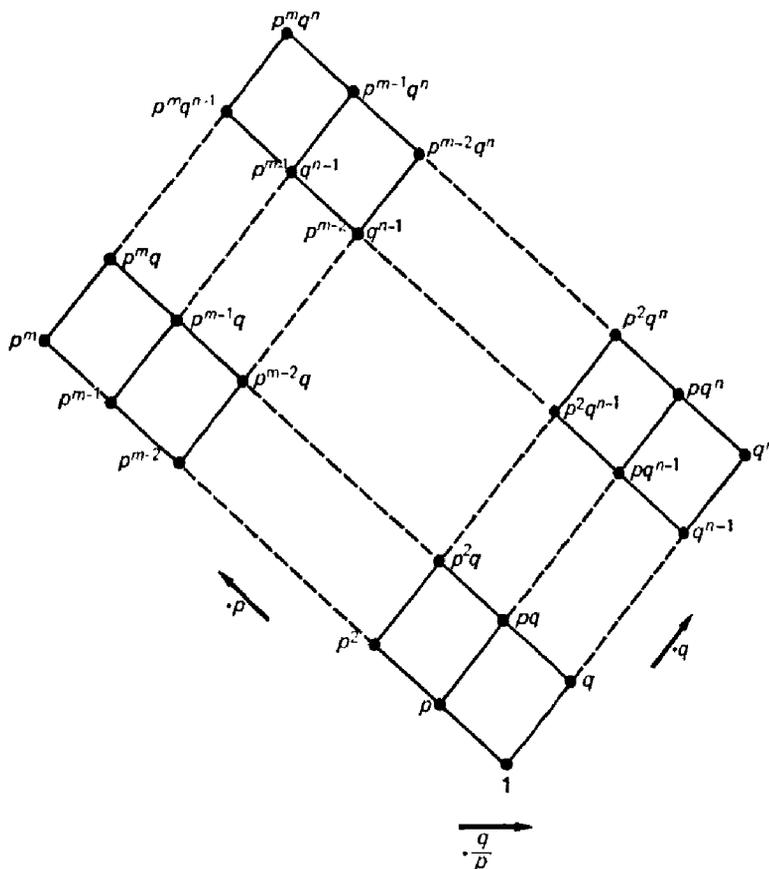


Abb. 4: Teilbarkeitsgraph von $T(p^m q^n)$ mit $p, q \in \mathbb{P}$, $m, n \in \mathbb{N}$ und $p \neq q$

Es empfiehlt sich, gleiche Abstände für die Anordnung der Knoten auf beiden Ketten zu wählen, da sich dann der Teilbarkeitsgraph aus Quadraten, und zwar aus $m \cdot n$ Quadraten, zusammensetzt.

Abb. 4 ist ein Teilbarkeitsgraph von $T(p^m q^n)$, da in der Abbildung sämtliche Elemente von $T(p^m q^n)$ vorkommen und sämtliche gerichteten Kanten zu Recht eingezeichnet sind; denn jede halblinks unmittelbar benachbarte Zahl ist nach Anlage des Teilbarkeitsgraphen das p -fache, jede halbrechts unmittelbar benachbarte Zahl das q -fache der gegebenen Zahl, wobei p und q Primzahlen

len sind. Außerdem sind sämtliche möglichen gerichteten Kanten eingezeichnet; denn innerhalb einer Zeile ist jede unmittelbar rechts benachbarte Zahl das $\frac{q}{p}$ -fache ihrer Vorgängerin, daher kann wegen $\frac{q}{p} \notin \mathbb{N}$ keine Teilbarkeitsrelation zwischen so angeordneten Zahlen bestehen.

Der Teilbarkeitsgraph von $T(p^m q^n)$ hat die Form eines aus $m \cdot n$ Quadraten zusammengesetzten Rechtecks, im Sonderfall $m = n$ die Form eines entsprechenden Quadrates.

Benötigen wir für die übersichtliche Darstellung des Teilbarkeitsgraphen von $T(p^m q^n)$ zwei Dimensionen, so brauchen wir für den Teilbarkeitsgraphen von $T(p^m q^n r^s)$, mit $p, q, r \in \mathbb{P}$, paarweise verschieden und $m, n, s \in \mathbb{N}$, schon 3 Dimensionen. In der Vertikalen ordnen wir die Elemente der Teilermenge $T(r^s)$ auf einer Kette an, auf gleichgerichteten Parallelen hierzu die Mengen, die aus $T(r^s)$ durch Multiplikation mit jeweils einem Element der Menge $T(p^m q^n)$ entstehen (vgl. Abb. 5). Der Teilbarkeitsgraph setzt sich, wenn man für die Knoten auf allen 3 Achsen gleiche Abstände wählt, aus Würfeln zusammen, und zwar aus $m \cdot n \cdot s$ Würfeln. Der Teilbarkeitsgraph hat in diesem Fall die Gestalt eines aus $m \cdot n \cdot s$ Würfeln zusammengesetzten Quaders, im Sonderfall $m = n = s$ die Gestalt eines entsprechenden Würfels. Zur Verdeutlichung des Verfahrens sei im folgenden der Teilbarkeitsgraph von $T(pqr^2)$ angegeben:

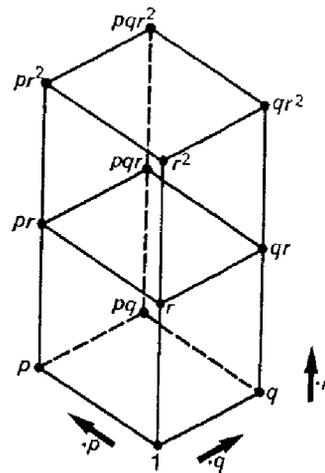


Abb. 5: Teilbarkeitsgraph von $T(pqr^2)$ mit $p, q, r \in \mathbb{P}$, p, q, r paarweise verschieden

Genau wie beim Teilbarkeitsgraphen von $T(p^m q^n)$ ist jede halblinks unmittelbar benachbarte Zahl das p -fache, jede halbrechts unmittelbar benachbarte Zahl das q -fache und jede nach oben hin unmittelbar benachbarte Zahl das r -fache der gegebenen Zahl. Analog wie dort macht man sich klar, daß in Abb. 5 bzw. in einer entsprechenden Abbildung für $T(p^m q^n r^s)$ sämtliche eingezeichneten gerichteten Kanten notwendig und keine weiteren Kanten möglich sind, daß also eine derartige Abbildung ein Teilbarkeitsgraph von $T(p^m q^n r^s)$ ist.

Unser Verfahren versagt bei der Konstruktion von Teilbarkeitsgraphen für Teilmengen $T(p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r})$ mit $r > 3$. Diese Tatsache stört jedoch bei der praktischen Anwendung im Unterricht nicht, da beispielsweise nach diesem Verfahren die Teilbarkeitsgraphen sämtlicher Teilmengen $T(a)$ mit ungeraden $a < 1000$ konstruiert werden können (denn die kleinste ungerade Zahl mit 4 verschiedenen Primzahlen in ihrer Primfaktorzerlegung ist $a = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155$). Für gerade $a < 1000$ versagt dieses Verfahren insgesamt 14-mal, das erste Mal allerdings erst für die Zahl $a = 210$.

Verwendet man im Unterricht so normierte Teilbarkeitsgraphen – also für Teilmengen $T(p^m)$ Ketten, für Teilmengen $T(p^m q^n)$ aus Quadraten zusammengesetzte Rechtecke bzw. Quadrate und für Teilmengen $T(p^m q^n r^s)$ aus Würfeln zusammengesetzte Quader bzw. Würfel –, so kann man auf anschauliche Art leicht Aussagen über die *Teilbarkeitsrelation in \mathbb{N} als Ordnungsrelation* gewinnen. Als reflexive, transitive und identitive Relation ist die Teilbarkeitsrelation in \mathbb{N} nämlich eine Ordnungsrelation. Im Teilbarkeitsgraphen von $T(p^m)$ besteht zwischen je zwei $a, b \in T(p^m)$ mit $a \neq b$ eine gerichtete Kante bzw. ein gerichteter Kantenzug. Also gilt für je 2 beliebige Elemente $a, b \in T(p^m)$ immer $a \mid b$ oder $b \mid a$. Alle Zahlen des Teilbarkeitsgraphen sind also bezüglich der Teilbarkeitsrelation miteinander vergleichbar. Gleiches gilt übrigens auch, wenn wir die Elemente von $T(p^m)$ bezüglich der \leq -Relation ordnen. (Auch die \leq -Relation ist als reflexive, transitive und identitive Relation eine Ordnungsrelation in \mathbb{N}). Man spricht in diesem Fall von einer *totalen oder vollständigen Ordnung*. Die Graphen von $T(p^m)$ bezüglich der \leq -Relation und der \mid -Relation stimmen überein, folglich besitzt die Menge $T(p^m)$ bezüglich dieser beiden *verschiedenen* Ordnungsrelationen die *gleiche* Ordnungsstruktur. (Diesen Sachverhalt kann man auf einer späteren Stufe exakter fassen durch den Begriff des Ordnungsisomorphismus).

Ganz anders sieht es hingegen mit den Teilbarkeitsgraphen der Teilmengen $T(p^m q^n)$ und $T(p^m q^n r^s)$ aus. Diese Graphen weisen Verzweigungen auf, und so sind nicht mehr alle Elemente bezüglich der Teilbarkeitsrelation miteinander vergleichbar. So finden wir beispielsweise zwischen p und q keine gerichteten Kantenzüge⁴. Übersichtlich kann man anhand des Teilbarkeitsgraphen feststellen, welche Elemente einer gegebenen Teilermenge nicht miteinander vergleichbar sind, indem man einfach überprüft, zwischen welchen Paaren von Knoten keine gerichteten Kantenzüge existieren. Leicht kann man auch anhand des Teilbarkeitsgraphen Teilmengen von $T(p^m q^n)$ bzw. $T(p^m q^n r^s)$ bestim-

⁴ Zwecks Verkürzung der Formulierung lassen wir hier und im folgenden auch den Fall zu, daß der Kantenzug nur aus einer oder sogar keiner Kante besteht.

men, die sich vollständig ordnen lassen. Man erkennt also: Während die \mid -Relation in Teilmengen $T(p^m)$ eine vollständige Ordnung einführt, definiert sie auf den Teilmengen $T(p^m q^n)$ und $T(p^m q^n r^s)$ nur eine unvollständige Ordnung. Vergleicht man im letzten Fall die Graphen bzgl. der \mid -Relation und der \leq -Relation miteinander, so kann man erkennen, daß man *ein und derselben* Menge *verschiedene* Ordnungsstrukturen aufprägen kann. So erzeugt die \leq -Relation auf beiden Teilmengen eine vollständige Ordnung, die \mid -Relation dagegen eine unvollständige Ordnung. Entsprechend erhalten wir als Graphen bei der \leq -Relation eine Kette, dagegen bei der \mid -Relation die hiervon völlig verschiedenen bekannten Teilbarkeitsgraphen.

Mit Hilfe der zugehörigen Teilbarkeitsgraphen kann man aber auch umgekehrt sehr anschaulich klären, daß völlig *verschiedene* Teilmengen *dieselbe* Ordnungsstruktur besitzen können. So haben alle verschiedenen Teilmengen $T(p^m q^n)$ mit *festem* m und n denselben Teilbarkeitsgraphen und mithin dieselbe Ordnungsstruktur. (Beispiel: $T(72)$ und $T(6125)$ besitzen denselben Teilbarkeitsgraphen, da $72 = 2^3 \cdot 3^2$ und $6125 = 5^3 \cdot 7^2$).

Aber nicht nur verschiedene Teilmengen mit gleicher Anzahl von Primfaktoren und gleichen Exponenten besitzen denselben Graphen und mithin dieselbe Ordnungsstruktur, gleiches kann auch für *verschiedenartige* Mengen bezüglich sogar *verschiedener* Ordnungsrelationen, nämlich z. B. für Teilmengen bezüglich der \mid -Relation und bestimmte Potenzmengen bezüglich der Inklusion⁵ gelten, wie die Abb. 6 deutlich zeigt.

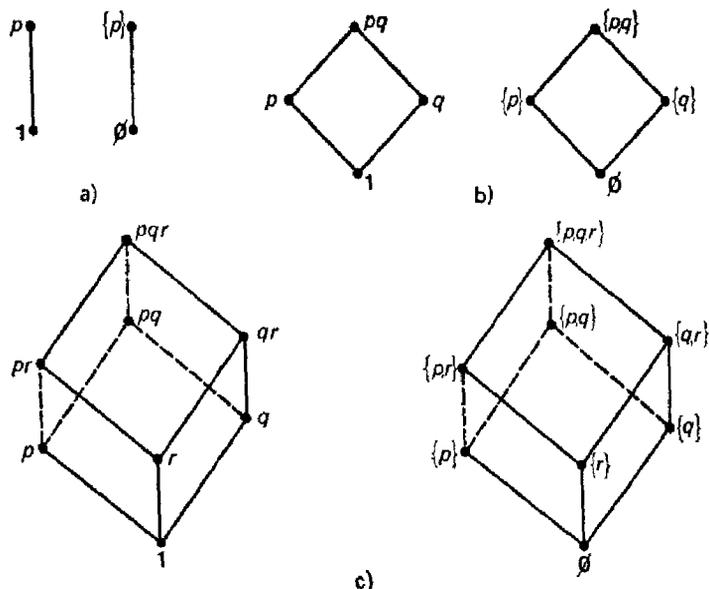


Abb. 6: Teilbarkeitsgraphen: a) $T(p)$; b) $T(pq)$; c) $T(pqr)$ und Hasse-Diagramme der Potenzmengen: a) $P(\{p\})$; b) $P(\{p, q\})$; c) $P(\{p, q, r\})$ bezüglich der Inklusion

⁵ Die Mengeninklusion ist reflexiv, transitiv und identitiv, also ebenfalls eine Ordnungsrelation.

Die Teilbarkeitsgraphen eignen sich insbesondere zur Durchführung von *Teilbarkeitsuntersuchungen* in \mathbb{N} . Wegen der Transitivität (und der Reflexivität) der Teilbarkeitsrelation sind nämlich sämtliche Elemente des Teilbarkeitsgraphen, die von einer gegebenen Zahl aus entlang eines gerichteten Kantenzuges erreichbar sind, Vielfache dieser Zahl, sind alle Elemente, die über einen Kantenzug *ausschließlich* in der entgegengesetzten Richtung erreichbar sind, Teiler dieser Zahl. Am Teilbarkeitsgraphen von $T(p^m q^n r^s)$ können wir nicht nur übersichtlich sämtliche Teiler von $a = p^m q^n r^s$ ablesen, sondern ebenso auch *sämtliche* Teiler *aller* $b \in T(a)$; denn wegen der schon erwähnten Transitivität der Teilbarkeitsrelation ist jeder Teiler von b auch Teiler von a und folglich enthält der Teilbarkeitsgraph von $T(a)$ auch die Teilermenge $T(b)$ als Teilmenge.

Betrachten wir im folgenden als Beispiel den Teilbarkeitsgraphen von $T(432)$ (Abb. 7):

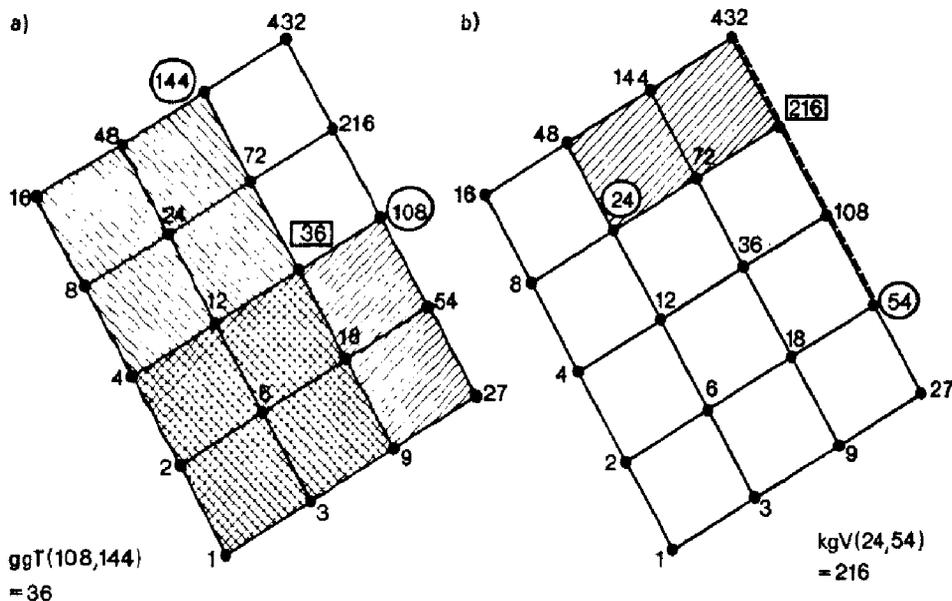


Abb. 7: Teilbarkeitsgraph von $T(432) = T(2^4 \cdot 3^3)$.

a) Bestimmung des $ggT(108, 144)$ b) Bestimmung des $kgV(24, 54)$

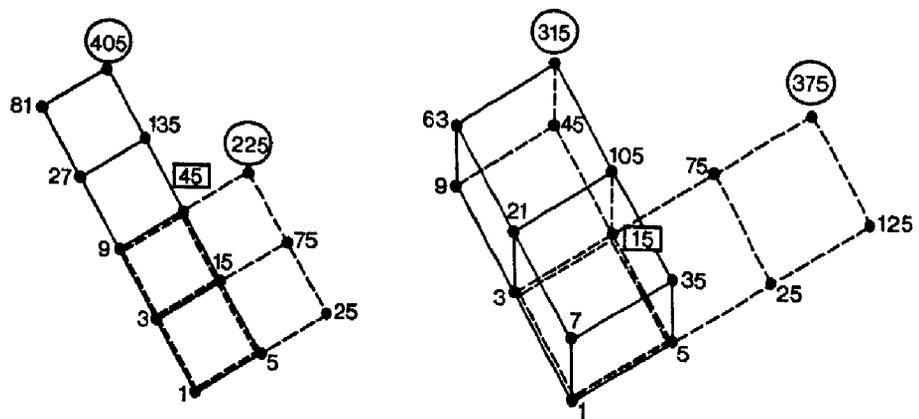
Übersichtlich können wir ihm die Teilmengen $T(a)$ für $a = 432, 216, 144, 108, \dots$, also in diesem Beispiel für 20 verschiedene Zahlen, entnehmen. Die Teilmengen von beispielsweise 108 und 144 bestehen nämlich aus genau den Elementen, die im Teilbarkeitsgraphen von 108 bzw. 144 aus auf ausschließlich abwärts gerichteten Kantenzügen erreichbar sind. Sie sind im Teilbarkeitsgraphen von $T(432)$ durch Schraffur kenntlich gemacht. Zusätzlich können wir aber auch direkt die Menge der *gemeinsamen Elemente* je zweier (oder auch mehrerer) dieser Teilmengen ablesen. In dem Bereich nämlich, in dem sich beispielsweise die Graphen von $T(108)$ und $T(144)$ überdecken, liegen die

gemeinsamen Teiler von 108 und 144. Wir können ablesen:

$$T(144) \cap T(108) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}.$$

Da von a nach b genau dann ein (*nach oben*) gerichteter Kantenzug verläuft, wenn $a \mid b$, und da in \mathbb{N} gilt: $a \mid b$ und $a \neq b \Rightarrow a < b$, ist die höhere von 2 Zahlen, die über einen gerichteten Kantenzug erreichbar ist, auch die größere. Also ist 36 im Teilbarkeitsgraph der *höchste* und damit der *größte* der gemeinsamen Teiler, also gilt: $ggT(108, 144) = 36$. Analog können wir aus dem Teilbarkeitsgraphen beispielsweise auch direkt ablesen: $ggT(48, 72, 108) = 12$. Will man nur den ggT zweier Zahlen a und b bestimmen, so können wir der Abb. 7 a) auch folgendes Verfahren entnehmen: Man geht von a und b auf ausschließlich abwärts gerichteten Kantenzügen soweit nach unten, bis man auf *kürzestem Weg* (also nach minimaler Anzahl durchlaufender Kanten) zu einer gemeinsamen Zahl gelangt. Diese Zahl ist nach Anlage des Teilbarkeitsgraphen gemeinsamer Teiler von a und b . Wegen der Minimalitätsforderung ist sie der höchste, und damit der größte der gemeinsamen Teiler der Zahlen a und b . Durch Verallgemeinerung dieser Ansätze können wir auch bei sämtlichen Teilbarkeitsgraphen $T(p^m)$ und $T(p^m q^n r^s)$ analog die gemeinsamen Teiler und den größten gemeinsamen Teiler je zweier beliebiger Elemente ihrer Teilmengen bestimmen.

Wir können aus dem Teilbarkeitsgraphen von $T(432)$ aber außerdem noch einige gemeinsame Vielfache und das kleinste gemeinsame Vielfache je zweier (oder auch mehrerer) beliebiger Elemente von $T(432)$ ablesen. In der Abb. 7 b) sind die Vielfachen von 24 bzw. 54, die Elemente von $T(432)$ sind, durch Schraffierung bzw. Strichelung hervorgehoben. In dem Bereich, in dem sich die zugehörigen Graphen überdecken, liegen *gemeinsame Vielfache* von 24 und 54. Wir lesen ab: $kgV(24, 54) = 216$, da das *niedrigste* gemeinsame Element we-



a) $ggT(225, 405) = 45$

b) $ggT(315, 375) = 15$

Abb. 8: Teilbarkeitsgraphen: a) $T(405)$ und $T(225)$,
b) $T(315)$ und $T(375)$ und ggT -Bestimmung

gen $a \mid b \Rightarrow a \leq b$ und wegen der Tatsache, daß im $\text{kgV}(a, b)$ *alle* Primzahlen als Faktoren vorkommen, die in der Primfaktorzerlegung von a oder b vorkommen, auch schon das *kleinste* gemeinsame Vielfache der beiden Zahlen ist. Analog liest man auch ab: $\text{kgV}(16, 24, 36) = 144$.

Will man *nur* das kgV zweier Zahlen a und b bestimmen, so geht man von a und b auf ausschließlich aufwärts gerichteten Kantenzügen solange nach oben, bis man auf *kürzestem Weg* zu einer gemeinsamen Zahl gelangt, die nach Anlage des Teilbarkeitsgraphen wegen der Minimalitätsforderung das $\text{kgV}(a, b)$ ist. Entsprechend können wir auch bei den Teilbarkeitsgraphen von $T(p^m)$ und $T(p^m q^n r^l)$ das kleinste gemeinsame Vielfache je zweier (oder mehrerer) Elemente der Teilmengen leicht ablesen.

Den Weg zur Bestimmung der gemeinsamen Teiler und des ggT zweier natürlicher Zahlen a und b , die nicht – wie die bisherigen Zahlen – Elemente eines vorgegebenen Teilbarkeitsgraphen sind, kann man der Abb. 8 entnehmen:

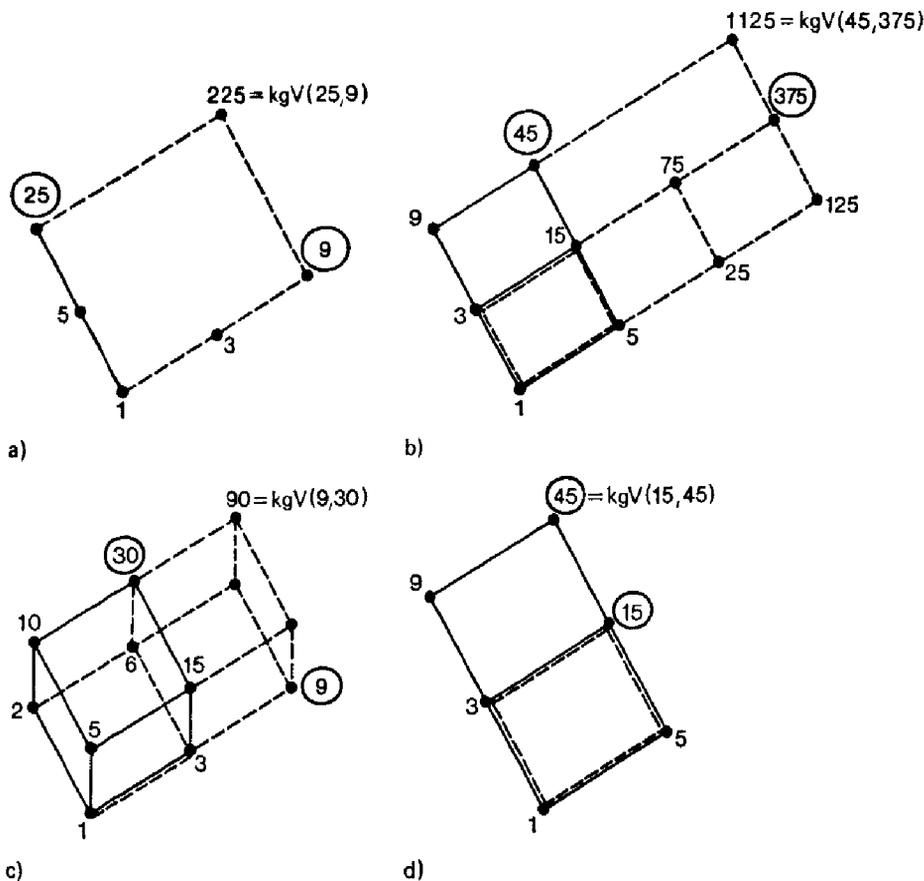


Abb. 9: Teilbarkeitsgraphen: a) $T(25)$, $T(9)$, b) $T(45)$, $T(375)$, c) $T(30)$, $T(9)$, d) $T(45)$, $T(15)$ und kgV -Bestimmung

Man zeichnet zunächst den Teilbarkeitsgraphen von $T(a)$ und legt dann den Teilbarkeitsgraphen von $T(b)$ passend darauf. Die Elemente, die zu beiden Teilbarkeitsgraphen gehören, sind die gemeinsamen Teiler von a und b , das

3. einiger Teilbarkeitsregeln im dezimalen und in nichtdezimalen Stellenwertsystemen.

Daneben werden weitere Anwendungsmöglichkeiten und zum Schluß einige Aufgabentypen angeführt.

1. Wir betrachten als Beispiel den Teilbarkeitsgraphen von $T(648)$ (Abb. 10).

Im Sonderfall $a \mid b$ können wir direkt ablesen: $ggT(a, b) = a$, $kgV(a, b) = b$ und daher: $ggT(a, b) \cdot kgV(a, b) = a \cdot b$.

Die Verhältnisse im Fall $a \nmid b$ verdeutlichen die beiden nachstehenden Beispiele:

1. $ggT(9, 8) = 1$, $kgV(9, 8) = 72$

$$ggT(9, 8) \cdot kgV(9, 8) = 1 \cdot 72 = (9 : 3^2) \cdot (8 \cdot 3^2) = 9 \cdot 8$$

2. $ggT(162, 24) = 6$, $kgV(162, 24) = 648$

$$ggT(162, 24) \cdot kgV(162, 24) = 6 \cdot 648 = (162 : 3^3) \cdot (24 \cdot 3^3) = 162 \cdot 24.$$

Man erkennt: im Fall $a \nmid b$ beschreiben $kgV(a, b)$, $ggT(a, b)$, a und b im Teilbarkeitsgraph von $T(p^m q^n)$ die 4 Eckpunkte eines Rechtecks bzw. Quadrats, wie es Abb. 11 zeigt.

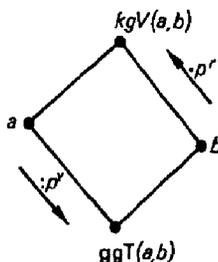


Abb. 11

Hierbei erhält man aus a durch Division durch p^r den $ggT(a, b)$, aus b durch Multiplikation mit p^r ($p \in \mathbb{P}$, $1 \leq r \leq m$) das $kgV(a, b)$.

Daher gilt: $ggT(a, b) \cdot kgV(a, b) = (a : p^r) \cdot (b \cdot p^r) = ab$. Unsere Aussage umfaßt auch den Sonderfall, daß a und b teilerfremd sind, daß also $ggT(a, b) = 1$ (vgl. Beispiel 1). In diesem Fall erhalten wir: $kgV(a, b) = a \cdot b$. Im Teilbarkeitsgraphen liegen dann a und b auf der halblinken und halblichten Außenkante (denn alle übrigen Zahlen besitzen sowohl p wie q in ihrer Primfaktorzerlegung, sind also nicht teilerfremd). Wegen $ggT(a, b) = 1$ muß in diesem Fall also $p^r = a$ sein. Durch Verallgemeinerung dieses Ansatzes können wir so auch die Aussage: $ggT(a, b) \cdot kgV(a, b) = a \cdot b$ für den Fall der Teilmengen $T(p^m q^n r^s)$ anschaulich herleiten, nur daß in diesem Fall $kgV(a, b)$, $ggT(a, b)$, a und b 4 Eckpunkte eines Rechtecks bzw. Quadrats oder eines Quaders bzw. Würfels bilden.

Anschaulich einleuchtend entnimmt man dem Teilbarkeitsgraphen u.a. auch die einfachen Aussagen: $ggT(a, b) = ggT(b, a)$, $kgV(a, b) = kgV(b, a)$, $ggT(1, b) = 1$, $kgV(1, b) = b$ und $ggT(b, b) = kgV(b, b) = b$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$.

2. Zur Ableitung der Aussage: „Der Durchschnitt zweier Teilmengen $T(a)$ und $T(b)$ ist wieder eine Teilmenge, und zwar die Teilmenge des $\text{ggT}(a, b)$, also: $T(a) \cap T(b) = T(\text{ggT}(a, b))$ “, betrachten wir die Abb. 12.

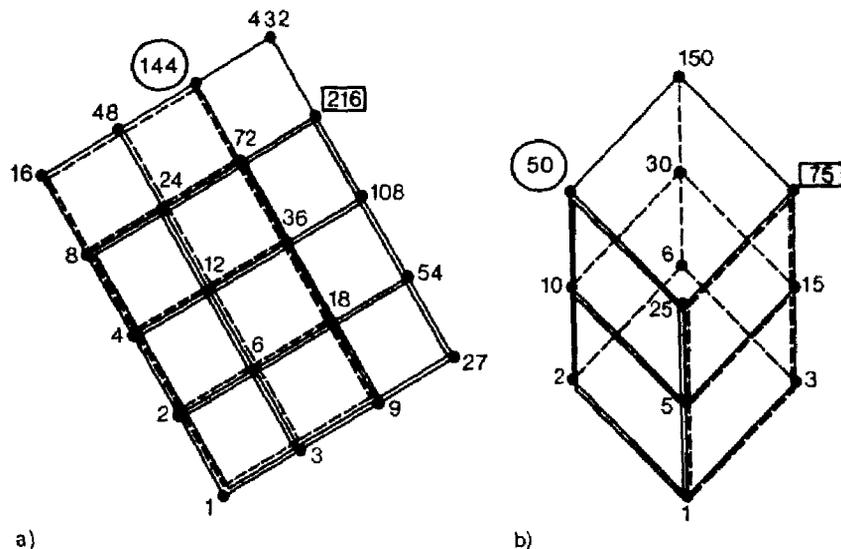


Abb. 12: Teilbarkeitsgraphen: a) $T(432)$ mit $T(144)$, $T(216)$ und $T(144) \cap T(216)$,
b) $T(150)$ mit $T(50)$, $T(75)$ und $T(50) \cap T(75)$

$T(a) \cap T(b)$ enthält genau alle Zahlen des Rechtecks (der Kette), das (die) den Graphen von $T(a)$ und $T(b)$ gemeinsam ist. Dieses Rechteck (diese Kette) ist Teilbarkeitsgraph seiner (ihrer) höchsten Zahl; diese ist, wie vorher festgestellt, der $\text{ggT}(a, b)$. Also gilt: $T(a) \cap T(b) = T(\text{ggT}(a, b))$.

Außerdem lassen sich mit Hilfe von Teilbarkeitsgraphen u. a. auch folgende Teilbarkeitsaussagen anschaulich ableiten:

(1) Der kleinste Teiler $t \neq 1$ einer Zahl $a > 1$ ist stets eine Primzahl (denn alle unmittelbar zur Zahl 1 benachbarten Zahlen in Teilbarkeitsgraphen sind Primzahlen).

(2) $a \mid b$ genau dann, wenn a in seiner Primfaktorzerlegung höchstens dieselben Primzahlen wie b , und zwar mit jeweils kleineren oder höchstens gleichen Exponenten aufweist.

(3) $T(a)$ mit $a = p^m q^n r^s$ ($p, q, r \in \mathbb{P}$, $m, n, s \in \mathbb{N}_0$) besteht genau aus den Zahlen $t = p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma$ mit $0 \leq \alpha \leq m$, $0 \leq \beta \leq n$, $0 \leq \gamma \leq s$ und besitzt genau $(m + 1)(n + 1)(s + 1)$ Elemente (man notiere bei (2) und (3) an allen Zahlen des Teilbarkeitsgraphen die zugehörigen Primfaktorzerlegungen.)

3. Zur Ableitung einiger Teilbarkeitsregeln im dezimalen und in nichtdezimalen Stellenwertsystemen betrachten wir zunächst den Teilbarkeitsgraphen von $T(100)$.

Wir können ihm u. a. entnehmen:

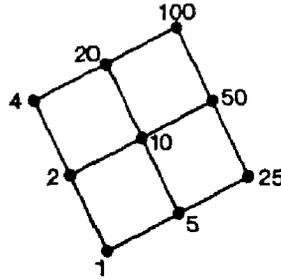


Abb. 13: Teilbarkeitsgraph von $T(100)$

Ist eine Zahl durch 10 teilbar, so auch durch 2 und 5, ist eine Zahl durch 20 teilbar, so auch durch 2, 4, 5 und 10 oder ist eine Zahl durch 100 teilbar, so auch durch 2, 4, 5, 10, 20, 25 und 50. Ist eine Zahl a nämlich durch 100 teilbar, so kommen in ihrem Teilbarkeitsgraphen die Zahl 100 und daher auch alle Elemente von $T(100)$ vor. Wegen $100 \mid a$ existiert im Teilbarkeitsgraphen ein gerichteter Kantenzug von 100 nach a , also – da alle Elemente von $T(100)$ Teiler von 100 sind – auch von jedem Element von $T(100)$ nach a . Daher gilt mit $100 \mid a$ auch $c \mid a$ für alle $c \in T(100)$.

Analog kann man beispielsweise auch zeigen: $9 \mid a \Rightarrow 3 \mid a$; $6 \mid a \Rightarrow 2 \mid a$ und $3 \mid a$.

Wollen wir entsprechend Teilbarkeitsregeln in einem Stellenwertsystem mit einer anderen Basis, etwa im Sechzersystem, ableiten, so stellen wir den Teilbarkeitsgraphen von $(100)_6 = 36$ zunächst im vertrauten Dezimalsystem auf, übersetzen dann die einzelnen Zahlen jeweils ins Sechzersystem und erhalten:

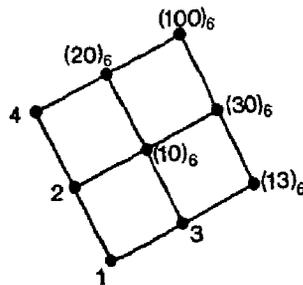
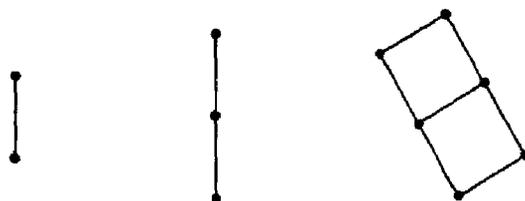


Abb. 14: Teilbarkeitsgraph von $T((100)_6)$

Wir können Abb. 14 u. a. entnehmen: Ist eine Zahl a durch $(10)_6$ teilbar, so auch durch 2 und 3 oder ist a durch $(100)_6$ teilbar, so auch durch 2, 3, 4, $(10)_6$, $(13)_6$, $(20)_6$ und $(30)_6$.

Zum Abschluß dieses Abschnittes seien noch einige *Aufgabentypen* zusammengestellt, bei denen sich der Einsatz von Teilbarkeitsgraphen ebenfalls als hilfreich bzw. notwendig erweist:

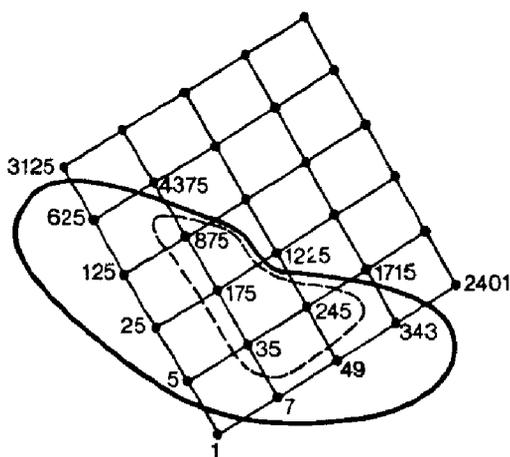
(1) Man gebe je 2 Zahlen an, deren Teilbarkeitsgraph folgende Form hat:



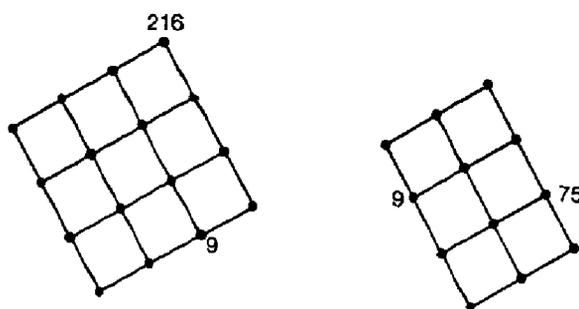
(2) Welche Zahlen zwischen 1 und 1000 haben in ihrer Primfaktorzerlegung ausschließlich die Primfaktoren:

a) 5 oder 7(\cup), b) 5 und 7(\cap)?

Lösung:



(3) Man trage in die folgenden Teilbarkeitsgraphen die fehlenden Zahlen ein:



(4) Man suche je 2 Zahlen, die genau 4, 5 oder 6 Teiler haben.

Die Teilmengen $T(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ haben bezüglich der Teilbarkeitsrelation bzw. unter den Operationen der ggT- und kgV-Bildung die *Struktur eines Verbandes*. Die Teilbarkeitsgraphen sind daher übersichtliche Modelle dieser Verbände. Diese weitere Einsatzmöglichkeit der Teilbarkeitsgraphen soll zum Abschluß näher untersucht werden.

Der Begriff Verband läßt sich ordnungstheoretisch oder algebraisch einführen. Bei der Benutzung von Teilbarkeitsgraphen erscheint eine Einführung als *Ordnungsstruktur* vorteilhafter. Hierzu müssen zunächst einige Begriffe der Ordnungstheorie erläutert werden:

Da die Teilmengen – wie erwähnt – unter der $|$ -Relation geordnete Mengen bilden, kann man definieren:

Sei A eine nichtleere Teilmenge von $T(p^m q^n r^s)$ mit $p, q, r \in \mathbb{P}$ und $m, n, s \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt $c \in T(p^m q^n r^s)$ *obere Schranke* (*untere Schranke*) von A genau dann, wenn für alle $x \in A$ gilt: $x | c$ ($c | x$). Man nennt c *obere Grenze* oder *Supremum* (*untere Grenze* oder *Infimum*) – geschrieben

$c = \text{Sup } A$ ($c = \text{Inf } A$) - genau dann, wenn c eine obere Schranke von A ist und für jede obere Schranke d von A gilt: $c \mid d$ (c eine untere Schranke von A ist und für jede untere Schranke d von A gilt: $d \mid c$).

Das Supremum ist also die *kleinste* obere Schranke, das Infimum die *größte* untere Schranke.

Verdeutlichen wir uns die Verhältnisse am Beispiel des Teilbarkeitsgraphen von $T(1296)$, (Abb. 15).

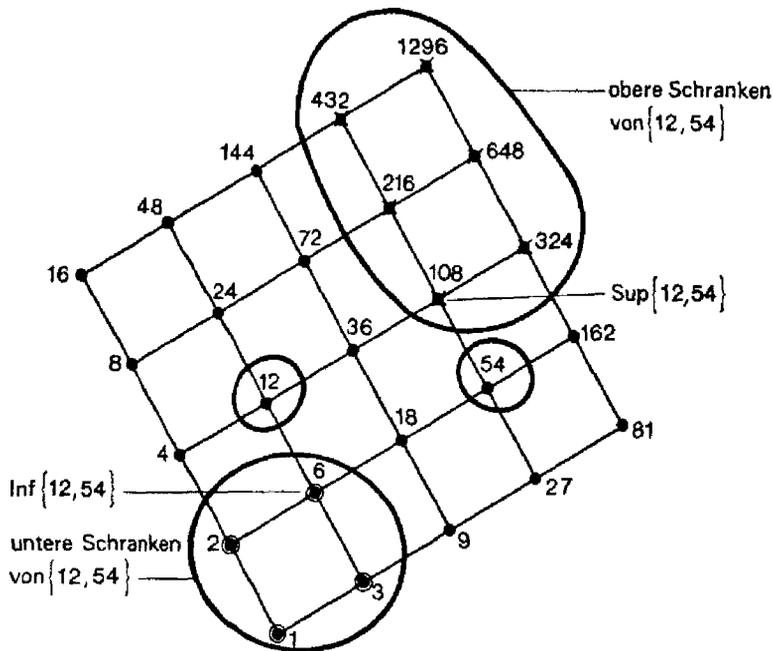


Abb. 15: Teilbarkeitsgraph von $T(1296)$ mit oberen und unteren Schranken sowie Supremum und Infimum von $\{12, 54\}$

Wie man der Abb. 15 entnimmt, hat die Teilmenge $\{12, 54\}$ von $T(1296)$ die Zahlen 108, 216, 324, 432, 648 und 1296 als obere Schranken, die Zahl 108 als kleinste obere Schranke, also $\text{Sup } \{12, 54\} = 108$; die Menge $\{12, 54\}$ hat die Zahlen 1, 2, 3, 6 als untere Schranken, die Zahl 6 als größte untere Schranke, also $\text{Inf } \{12, 54\} = 6$. Man erkennt: die gemeinsamen Vielfachen von 12 und 54, die zu $T(1296)$ gehören, sind obere Schranken von $\{12, 54\}$, das $\text{kgV}(12, 54)$ ist gleich dem $\text{Sup } \{12, 54\}$, die gemeinsamen Teiler von 12 und 54 sind untere Schranken von $\{12, 54\}$, der $\text{ggT}(12, 54)$ ist gleich dem $\text{Inf } \{12, 54\}$.

Diese Verhältnisse gelten - wie man sich leicht klarmacht - für alle Teilbarkeitsgraphen von Teilmengen $T(p^m q^n r^s)$ mit $p, q, r \in \mathbb{P}$ und $m, n, s \in \mathbb{N}_0$. Für je 2 Elemente $a, b \in T(p^m q^n r^s)$ bilden immer die gemeinsamen Vielfachen von a und b , die zu $T(p^m q^n r^s)$ gehören, die oberen Schranken von $\{a, b\}$, die gemeinsamen Teiler von a und b die unteren Schranken von $\{a, b\}$ und es gilt: $\text{Sup } \{a, b\} = \text{kgV}(a, b)$ und $\text{Inf } \{a, b\} = \text{ggT}(a, b)$.

Führt man ordnungstheoretisch den Begriff *Verband* ein durch die *Definition* :

Die nichtleere geordnete Menge M bildet bezüglich einer Ordnungsrelation $<$ einen Verband genau dann, wenn zu je 2 Elementen $a, b \in M$ das Supremum und das Infimum existiert,

so ist aufgrund obenstehender Überlegungen klar, daß alle Teilmengen $T(p^m q^n r^s)$ bezüglich der Teilbarkeitsrelation Verbände bilden.

Die Teilbarkeitsgraphen von Teilmengen bieten also den Vorteil, daß man an ihnen übersichtlich und anschaulich die oberen und unteren Schranken sowie das Supremum wie Infimum jeder beliebigen Teilmenge $\{a, b\}$ von $T(p^m q^n r^s)$ ablesen kann und so bei einfachen Teilbarkeitsgraphen, etwa bei $T(p)$, $T(pq)$, $T(pqr)$, mit wenig Aufwand direkt die Verbandsstruktur verifizieren kann.

Die Verbandsstruktur von Teilmengen $T(p^m q^n r^s)$ läßt sich aber auch bei einer Einführung des Verbandes als *algebraische Struktur* durch Teilbarkeitsgraphen gut veranschaulichen. (Wegen der wechselseitigen Zusammenhänge zwischen der algebraischen und der ordnungstheoretischen Struktur eines Verbandes vgl. man etwa [3].) In diesem Fall *definiert* man:

Eine nichtleere Menge M , auf der zwei Verknüpfungen \cap und \sqcup erklärt sind, hat die Struktur eines *Verbandes*, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt:

1. $a \cap b = b \cap a$; $a \sqcup b = b \sqcup a$ (Kommutativgesetze)
2. $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$; $(a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup (b \sqcup c)$
(Assoziativgesetze)
3. $a \cap (a \sqcup b) = a$; $a \sqcup (a \cap b) = a$
(Verschmelzungs- oder Absorptionsgesetze).

Als Verknüpfungen \cap und \sqcup wählt man bei Teilmengen $T(p^m q^n r^s)$ die ggT- und kgV-Bildung. Betrachtet man den Teilbarkeitsgraphen einer konkreten einfachen Teilmenge, etwa der Teilmenge $T(pqr)$, so kann man die Gültigkeit obiger 3 Gesetze rasch bestätigen (Abb. 16).

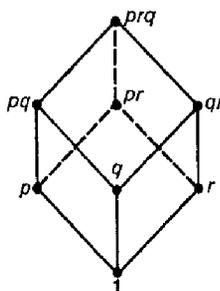


Abb. 16: Teilbarkeitsgraph von $T(pqr)$

Die Gültigkeit der Kommutativgesetze haben wir allgemein schon für alle Teilmengen gezeigt; denn es gilt: $ggT(a, b) = ggT(b, a)$ und $kgV(a, b) = kgV(b, a)$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$.

Durch geeignete Fallunterscheidungen läßt sich in diesem Fall die Gültigkeit der Assoziativgesetze leicht nachweisen. Daß auch die Verschmelzungsgesetze erfüllt sind, sieht man so ein: das $\text{kgV}(a, b)$ ist von a aus auf einem (nach oben) gerichteten Kantenzug erreichbar, also gilt: $\text{ggT}(a, \text{kgV}(a, b)) = a$, d.h. $a \cap (a \sqcup b) = a$. Entsprechend begründet man: $\text{kgV}(a, \text{ggT}(a, b)) = a$, also $a \sqcup (a \cap b) = a$. Damit hat man gezeigt, daß $T(pqr)$ bezüglich der ggT - und kgV -Bildung die Struktur eines Verbandes hat. Entsprechend kann man bei weiteren Klassen von Teilmengen verfahren.

Alle Teilmengen $T(n)$ bilden bezüglich der ggT - und kgV -Bildung sogar *distributive Verbände*, d.h. es gelten zusätzlich noch für alle $a, b, c \in T(n)$ für festes n jeweils die Gesetze:

4. $a \cap (b \sqcup c) = (a \cap b) \sqcup (a \cap c)$;
 $a \sqcup (b \cap c) = (a \sqcup b) \cap (a \sqcup c)$ (Distributivgesetze).

Die Teilbarkeitsgraphen eignen sich gut zur Verifizierung der Distributivgesetze an einigen Elementen der Teilermenge, jedoch ist eine vollständige Überprüfung außer bei den einfachsten Teilbarkeitsgraphen mühsam. (Für einen Beweis vgl. man etwa [3] S. 44-47 oder [1] S. 39-40.)

Ein distributiver Verband (M, \cap, \sqcup) ist ein *Boolescher Verband* (oder ein komplementärer distributiver Verband), wenn zusätzlich gilt:

5. Es existiert ein *neutrales Element* l_1 (Einselement) bezüglich der Verknüpfung \cap und ein *neutrales Element* l_2 (Nullelement) bezüglich der Verknüpfung \sqcup , d.h. für alle $a \in M$ gilt:

$$a \cap l_1 = a \quad a \sqcup l_2 = a$$

6. Zu jedem $a \in M$ existiert (mindestens) ein (*komplementäres*) Element \bar{a} mit der Eigenschaft:

$$a \cap \bar{a} = l_2 \quad a \sqcup \bar{a} = l_1.$$

Den Teilbarkeitsgraphen von Teilmengen kann man entnehmen, daß sämtliche Teilmengen $T(n)$ ein neutrales Element e_1 bezüglich der ggT -Bildung, nämlich die Zahl n , und ein neutrales Element e_2 bezüglich der kgV -Bildung, nämlich die Zahl 1, haben. Jedoch besitzt nur ein Teil der Teilmengen zu *jedem* Element a ein komplementäres Element \bar{a} . (Vgl. Abb. 17.)

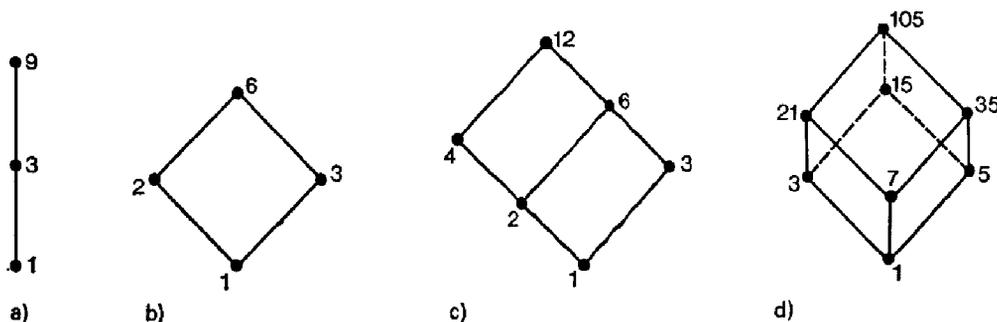


Abb. 17: Teilbarkeitsgraph: a) $T(9)$, b) $T(6)$, c) $T(12)$, d) $T(105)$

In der Teilermenge $T(9)$ z. B. hat nämlich die Zahl 3 kein komplementäres Element, also hat $T(9)$ nicht die Struktur eines Booleschen Verbandes bezüglich der ggT- und kgV-Bildung. Dagegen hat in $T(6)$ jedes Element ein komplementäres Element; es gilt: $\bar{1} = 6, \bar{2} = 3, \bar{3} = 2, \bar{6} = 1$, also hat $T(6)$ die Struktur eines Booleschen Verbandes, im Gegensatz zu $T(12)$, wo es zu 2 und 6 kein komplementäres Element gibt. Der Teilbarkeitsgraph von $T(105)$ ist dagegen wiederum das Modell eines Booleschen Verbandes; es gilt: $\bar{1} = 105, \bar{3} = 35, \bar{5} = 21, \bar{15} = 7, \bar{7} = 15, \bar{21} = 5, \bar{35} = 3$ und $\bar{105} = 1$.

In Verallgemeinerung dieses Ansatzes können wir zeigen: $T(p^m)$ besitzt genau dann zu allen Elementen ein komplementäres Element, wenn $m = 1$ oder $m = 0$, $T(p^m q^n)$, wenn $m = 1$ und $n = 1$ und $T(p^m q^n r^s)$, wenn $m = 1, n = 1$, und $s = 1$.

Wir haben hiermit abgeleitet, daß im Rahmen der von uns untersuchten Teilmengen genau die Teilbarkeitsgraphen der Teilmengen vom Typ $T(1), T(p), T(pq)$ und $T(pqr)$ Modelle von Booleschen Verbänden sind.

Dies ist eine Teilaussage eines allgemeineren Satzes, der besagt: die Teilermenge $T(a)$ mit $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}$ und $p_i \neq p_k$ für $i \neq k$ hat genau dann bezüglich der ggT- und kgV-Bildung die Struktur eines Booleschen Verbandes, wenn $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 1$. (Beweis: 1. Gilt $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 1$, so ist zu beliebigem $b \in T(a)$ die Zahl $\bar{b} = \frac{a}{b}$ komplementäres Element, denn $\text{ggT}\left(b, \frac{a}{b}\right) = 1$ und daher $\text{kgV}\left(b, \frac{a}{b}\right) = b \cdot \frac{a}{b} = a$.

2. Wir zeigen: wenn a Primfaktoren mit $n_i > 1$ besitzt, dann existiert in $T(a)$ zu mindestens einem Element kein komplementäres Element. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen: es sei $n_1 > 1$, also $n_1 \geq 2$. Wir zeigen: p_1 besitzt kein komplementäres Element, also p_1 besitzt keine Zahl \bar{p}_1 mit $\text{ggT}(p_1, \bar{p}_1) = 1$ und $\text{kgV}(p_1, \bar{p}_1) = a$; denn da p_1 und \bar{p}_1 teilerfremd sein müssen (wegen $\text{ggT}(p_1, \bar{p}_1) = 1$), käme p_1 in der Primfaktorzerlegung von \bar{p}_1 gar nicht und in der Primfaktorzerlegung von p_1 in 1. Potenz vor. Daher käme p_1 in der Primfaktorzerlegung von $\text{kgV}(p_1, \bar{p}_1)$ ebenfalls nur in 1. Potenz vor und es würde daher gelten: $\text{kgV}(p_1, \bar{p}_1) < a$. Folglich existiert kein komplementäres Element zu p_1 .

Die Teilbarkeitsgraphen der Teilmengen $T(1), T(p), T(pq)$ und $T(pqr)$ sind sogar schon Modelle für die vier (der Elementanzahl nach) kleinsten Booleschen Verbände; denn jeder endliche Boolesche Verband ist einem Potenzmengenverband, d. h. einer Potenzmenge $P(M)$ unter den Operationen der Durchschnitts- und Vereinigungsbildung, isomorph (für einen Beweis vgl. man etwa: Hermes [2], S. 60). Die vier (der Elementanzahl nach) kleinsten Potenzmengen besitzen $2^0, 2^1, 2^2$ bzw. 2^3 Elemente und damit gerade dieselbe Elementanzahl wie $T(1), T(p), T(pq)$ und $T(pqr)$.

Literatur

- [1] HAEBERLEIN, F.: Boolesche Teilverbände. Praxis der Mathematik, 1970 H. 2, S. 39–42.
- [2] HERMES, H.: Einführung in die Verbandstheorie. Berlin 1967².
- [3] LIERMANN, H.: Verbandsstrukturen im Mathematikunterricht. Frankfurt 1971.
- [4] PADBERG, F.: Elementare Zahlentheorie, Freiburg 1972.
- [5] PAPPY, G.: Graphen, in: Die ersten Elemente der modernen Mathematik II, Frankfurt 1968³. S. 30–63.
- [6] RUEFF-JEGER: Menge, Boolescher Verband und Maß im Schulunterricht, Luzern 1966.