1. *Griesel:* Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten 1. Hannover 1971.
2. Mathematik B 5. Stuttgart 1970.
3. Mathematisches Arbeitsbuch 5. Frankfurt/M. 1970.
4. Mathematik-Duden für Lehrer (Hg. Meschkowski). Mannheim 1969.
5. Neue Mathematik in den Klassen 5 bis 7 (Hg. Eckhardt), 2. Aufl. Frankfurt/M. 1970.
6. *Nordmeier:* Mengenlehre im 5. und 6. Schuljahr der Realschule.
Reihe: Beiträge zum Mathematikunterricht. Braunschweig 1967.
7. *Papy:* Die ersten Elemente der modernen Mathematik. Frankfurt/M. 1971.
8. *Viet/Ragnitz:* Einführung in die Mengenlehre. Stuttgart 1970 (Eingreifprogramm).
9. *Vogler:* Mengenlehre 1 – Mengen und Elemente. Braunschweig 1971 (westermann programm).

FRIEDHELM PADBERG

Teilbarkeitsregeln und Kongruenzrelation

Ein Vorschlag zur Behandlung von Teilbarkeitsregeln im Dezimalsystem mit Hilfe der Kongruenzrelation

I. Einleitung

Die „Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen (Beschluß der KMK vom 3.10.1968)" ordnen den Teilbarkeitsuntersuchungen eine besondere Bedeutung zu, indem sie diese als eigenen Themenkreis („Teilbarkeit und Teilermengen") – bei einer Gesamtzahl von nur 7 Themenkreisen für die ersten 6 Klassen – herausheben. Ein Teilgebiet der Teilbarkeitsuntersuchungen bildet die Behandlung von Teilbarkeitsregeln. Da jedoch ihre übliche Behandlung und Ableitung nicht voll befriedigen kann, will der vorliegende Aufsatz einen anderen Weg aufzeigen. Der übliche Weg: Man leitet Teilbarkeitsregeln für die Zweier- und Fünferpotenzen ab, stellt auf andere Art und Weise Teilbarkeitsregeln für 3 und 9 auf und muß zur evtl. Ableitung von Teilbarkeitsregeln für 7, 11 und 13 schon wieder einen neuen Ansatz – etwa über die „Märchenzahl" 1001 – wählen. Will man in anderen Stellenwertsystemen Teilbarkeitsregeln aufstellen – die oben zitierten KMK-Empfehlungen fordern nämlich, zu zeigen, daß gewisse Teilbarkeitsregeln Eigenschaften von Stellenwertsystemen sind –, so erfordert dies erneutes Kopfzerbrechen.
Behandelt man dagegen die Teilbarkeitsregeln mit Hilfe der Kongruenzrelation, so kann man – wie weiter unten ausgeführt – diese Schwierigkeiten vermeiden. Außerdem gestattet diese Art der Behandlung eine sinnvolle Einbettung der Teilbarkeitslehre in das umfassendere Gebiet der Division mit Rest. Man untersucht zunächst Restklassen, verknüpft diese und geht erst dann zur Teilbarkeit als Spezialfall der Division mit Rest, nämlich der Division mit dem Rest 0, über.
Dabei dürfte die Benutzung der Kongruenzrelation im benötigten Umfang im 5./6. Schuljahr keine Schwierigkeiten bereiten. Neuere Schulbücher benutzen sie z. T. schon im 2. und 3. Grundschuljahr (z. B. Neunzig-Sorger[1] bzw. im 5. Schuljahr (z. B. Mathe-

[1] *Neunzig-Sorger:* Wir lernen Mathematik II und III. Freiburg: Herder 1970.

matik B 5[2] und Mathematische Impulse[3]) bei der Einführung und Verknüpfung von Restklassen implizit, z. T. sogar explizit.

Die vorgeschlagene Art der Behandlung der Teilbarkeitslehre bietet nun die Möglichkeit, diesen Begriff – bzw. die ihm zugrundeliegende Kongruenzrelation – sinnvoll und wirksam zu verwenden, und so echte Vorteile gegenüber dem bisherigen Verfahren zu gewinnen. An *Vorteilen* bei Benutzung der Kongruenzrelation sind im einzelnen zu nennen:

1. Die einzelnen Teilbarkeitsregeln lassen sich leicht und übersichtlich aus einer einzigen gemeinsamen Wurzel ableiten; jeweils neue Ansätze für verschiedene Teilbarkeitsregeln sind nicht nötig.

2. Der Bezug unserer Teilbarkeitsregeln auf das Dezimalsystem ist deutlich erkennbar. Da die Regeln nur für das Stellenwertsystem mit der Basis $b = 10$ abgeleitet worden sind, besitzen sie folglich nur dort uneingeschränkte Gültigkeit. Dennoch ist eine Übertragung auf andere Stellenwertsysteme leicht möglich. Man muß nur die Zehnerpotenzen durch entsprechende Potenzen der Basis $b > 1$ ersetzen und kann dann analog Teilbarkeitsregeln für jedes Stellenwertsystem mit einer Basis $b > 1$ ableiten.

3. Die Kongruenzrelation gestattet nicht nur eine Grobklassifizierung der natürlichen Zahlen in „teilbar – nicht teilbar", sondern ermöglicht darüber hinaus im 2. Fall leicht eine genaue Bestimmung der Größe des Rests. Sie erlaubt weiterhin die Vereinfachung bekannter Teilbarkeitsregeln (Beispiel: III. 1. 2, III. 1. 3) und deckt die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Versionen von Teilbarkeitsregeln für einen Teiler, z. B. 11, auf (man vergleiche: III. 3. 1, III. 3. 3).

4. Man kann mit Hilfe der Kongruenzrelation rasch Teilbarkeitsregeln für jeden Teiler ableiten. Der Ansatz ist also universell verwendbar. (Der Weg, wie er in den Anmerkungen von III. 3. 3 für die Teiler 7 und 13 beschritten wird, ist für jeden Teiler möglich). Die Schüler können so feststellen, daß es nicht für alle Teiler sinnvoll ist, Teilbarkeitsregeln aufzustellen. Vielmehr muß man immer den Rechenaufwand bei Anwendung einer Teilbarkeitsregel in Relation zu dem erzielten Gewinn sehen. Ferner können sie selbst Teilbarkeitsregeln ableiten und so verschiedene Regeln für einen festen Teiler erhalten. So bekommen die Schüler einen Einblick in die Konstruktion von Teilbarkeitsregeln und erfahren den Zweckmäßigkeitsgesichtspunkt bei ihrer Aufstellung.

Im vorliegenden Aufsatz werden bewußt keine negativen Zahlen verwendet (mit Ausnahme von III. 3; aber auch dort läßt es sich vermeiden, wie in den dortigen Anmerkungen erwähnt wird), da sie i. a. im 5./6. Schuljahr nicht zur Verfügung stehen. Wenn man jedoch durchgängig negative Zahlen verwenden kann, lassen sich viele der erwähnten Teilbarkeitsregeln noch weiter vereinfachen, wenn man in der Kongruenzrelation die Zehnerpotenzen durch die *absolut* kleinsten zu ihnen kongruenten Zahlen nach der weiter unten folgenden Regel 2 ersetzt.

Dieser Aufsatz beschäftigt sich mit den Teilbarkeitsregeln im Dezimalsystem (für weitere Informationen vergleiche man auch A. Fricke[4] und die dort genannte Literatur); die explizite Übertragung auf Stellenwertsysteme mit beliebiger Basis $b > 1$ bleibt einer anderen Veröffentlichung vorbehalten.

[2] *Roller, E.* et alii: Mathematik B 5. Stuttgart: Klett 1970.

[3] *Fricke, A.:* Mathematische Impulse. Differenzierendes Unterrichtswerk für die Schuljahre 5 und 6. Grundbuch, 5. Schuljahr. Stuttgart: Klett 1971.

[4] *Fricke, A.:* Einheitliche Begründung und Zusammenhänge von Teilbarkeitsregeln. In: MNU, Bd. 11, 1958/59, H. 4, S. 164–172.

II. Grundlagen

Neben der Definition der Kongruenzrelation werden im folgenden nur zwei einfache Eigenschaften von ihr – formuliert als Regel 1 und Regel 2 – benötigt.
Man definiert:

Definition 1: $a \equiv b \pmod{d}$ – gelesen: a kongruent b modulo d oder (für den Unterricht besser, da suggestiver): a restgleich b bezüglich d – genau dann, wenn a und b bei Division durch d denselben Rest lassen.

Beispiele: $7 \equiv 3 \pmod{2}$; denn 7 und 3 lassen bei Division durch 2 den Rest 1.
$20 \equiv 13 \pmod{7}$; denn 20 und 13 lassen bei Division durch 7 den Rest 6.
$16 \equiv 0 \pmod{8}$; denn 16 und 0 lassen bei Division durch 8 den Rest 0.

An Hand dieser und weiterer Beispiele erkennen die Schüler zusätzlich: 2 teilt $7 - 3 = 4$ (im folgenden kurz geschrieben: $2|4$); $7|(20-13)$; $8|(16-0)$ und werden so zu folgender äquivalenter Definition der Kongruenzrelation geführt, die in manchen Fällen bequemer als die erste Definition anzuwenden ist:

Definition 2: $a \equiv b \pmod{d}$ genau dann, wenn d (ohne Rest) $a - b$ teilt.

Ist in der Klasse der Begriff „Restklasse" schon eingeführt, so erkennen die Schüler an obigen und weiteren Beispielen: 2 Zahlen sind genau dann kongruent modulo d, wenn sie in derselben Restklasse bezüglich d liegen.

Aus der Definition 1 der Kongruenzrelation folgt unmittelbar: 2 kongruente Zahlen a und b stimmen in ihrem Teilbarkeitsverhalten bezüglich d überein. Folglich ersetzt man im folgenden die zu untersuchende Zahl a durch eine möglichst kleine, kongruente Zahl b und liest an ihr (leicht) ab, ob sie – und damit auch a – durch d teilbar ist oder nicht. Dies ist auch schon der Grundgedanke der weiter unten folgenden Teilbarkeitsregeln. Ist die Zahl a nicht durch d teilbar, so können wir darüber hinaus nach Definition 1 mit Hilfe von b angeben, welchen Rest a bei Division durch d läßt. Daher gestattet eine Behandlung der Teilbarkeitslehre mit Hilfe der Kongruenzrelation differenziertere Aussagen über die Teilbarkeit einer Zahl als der bisherige Weg.

Regel 1: Man darf Kongruenzen (modulo d) miteinander multiplizieren. In Formeln: aus $a \equiv b \pmod{d}$ und $c \equiv e \pmod{d}$ folgt:
$a \cdot c \equiv b \cdot e \pmod{d}$.

Im Unterricht wird man diese Eigenschaft der Kongruenzrelation – man beachte die Analogie zur Gleichheitsrelation – an *Beispielen* etwa der folgenden Art erarbeiten:

1) $5 \equiv 2 \pmod{3}$
$7 \equiv 4 \pmod{3}$

Man stellt fest: 35 ($= 5 \cdot 7$) und 8 ($= 2 \cdot 4$) lassen den Rest 2 bzgl. 3, also:
$35 \equiv 8 \pmod{3}$

2) $4 \equiv 0 \pmod{4}$
$5 \equiv 1 \pmod{4}$

20 und 0 lassen bei Division durch 4 den Rest 0, also:
$20 \equiv 0 \pmod{4}$

Regel 1 bleibt selbstverständlich auch gültig, wenn man dieselbe Kongruenz mehrfach mit sich multipliziert: *Beispiele:*

1) $10 \equiv 0 \pmod{5}$
$10 \equiv 0 \pmod{5}$

Da 100 ($= 10 \cdot 10$) und 0 bei Division durch 5 den Rest 0 lassen, gilt:
$100 \equiv 0 \pmod{5}$

2) $10 \equiv 1 \pmod{9}$
$10 \equiv 1 \pmod{9}$

100 und 1 lassen bei Division durch 9 den Rest 1, also:
$100 \equiv 1 \pmod{9}$

Anmerkung: Regel 1 gilt auch analog für die Addition. Dieser Fall wird aber im folgenden Aufbau nicht benötigt. (Obenstehende Regel gebraucht man übrigens schon zumindest implizit bei einer exakten Einführung der Restklassenaddition und -multiplikation.)

Beiderseits des Kongruenzzeichens können auch *Terme* stehen. Dies kann man an *Beispielen* etwa der folgenden Art erarbeiten:

1) Es gilt $35 \equiv 7 \pmod 7$. Wir können zerlegen:
   $35 = 8 + 3 \cdot 9$; $7 = 1 + 3 \cdot 2$. Daher ist auch folgende Kongruenz sinnvoll und richtig: $8 + 3 \cdot 9 \equiv 1 + 3 \cdot 2 \pmod 7$.
2) Es gilt: $29 \equiv 14 \pmod 5$. Eine mögliche Zerlegung ist:
   $29 = 7 + 2 \cdot 11$; $14 = 2 + 2 \cdot 6$. Folglich gilt auch: $7 + 2 \cdot 11 \equiv 2 + 2 \cdot 6 \pmod 5$.

Regel 2: Ersetzt man in einem Term eine Zahl durch eine bzgl. einem festen d kongruente Zahl, so sind die beiden Terme bzgl. d kongruent. In Formeln: Wenn $c \equiv f \pmod d$, dann gilt: $a + b \cdot c \equiv a + b \cdot f \pmod d$.

Diese Regel wird man in der Klasse an Hand einer Anzahl von *Beispielen* erarbeiten:

1) $10 \equiv 0 \pmod 5$. Wir ersetzen in $2 \cdot 10 + 4$ die Zahl 10 durch (die bzgl. 5 kongruente Zahl) 0 und erhalten $2 \cdot 0 + 4$. Beide Terme lassen bei Division durch 5 den Rest 4, also gilt:
   $2 \cdot 10 + 4 \equiv 2 \cdot 0 + 4 \pmod 5$ bzw. $2 \cdot 10 + 4 \equiv 4$ (mod. 5).
2) $10 \equiv 0 \pmod 5$, also nach Regel 1 : $100 \equiv 0 \pmod 5$. Wir ersetzen in $3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4$ die Zahlen 100 und 10 jeweils durch (die bzgl. 5 kongruente Zahl) 0 und erhalten $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4$. Da beide Terme bei Division durch 5 denselben Rest, nämlich 4 lassen, gilt: $3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4 \equiv 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \pmod 5$ bzw. $3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 4 \equiv 4 \pmod 5$.
3) $10 \equiv 1 \pmod 9$. Ersetzen wir in $6 \cdot 10 + 2$ die Zahl 10 durch die (bzgl. 9 kongruente) Zahl 1, so erhalten wir $6 \cdot 1 + 2$. Beide Terme lassen bei Division durch 9 denselben Rest, nämlich 8. Folglich gilt: $6 \cdot 10 + 2 \equiv 6 \cdot 1 + 2$ bzw. $6 \cdot 10 + 2 \equiv 8 \pmod 9$.
4) $10 \equiv 1 \pmod 9$, also nach Regel 1 : $100 \equiv 1 \pmod 9$. Ersetzen wir in $3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1$ die Zahlen 100 und 10 jeweils durch die (bzgl. 9 kongruente) Zahl 1, so erhalten wir: $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1$. Da beide Terme bei Division durch 9 den Rest 6 lassen, gilt: $3 \cdot 100 + 2 \cdot 20 + 1 \equiv 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \pmod 9$ bzw. $3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1 \equiv 6 \pmod 9$.

Mit Hilfe von Regel 2 kann man auch leicht die Richtigkeit der beiden vor dieser Regel genannten Kongruenzen überprüfen. Beispiele:

1) $8 \equiv 1 \pmod 7$, $9 \equiv 2 \pmod 7$, daher: $8 + 3 \cdot 9 \equiv 1 + 3 \cdot 2 \pmod 7$.
2) $7 \equiv 2 \pmod 5$, $11 \equiv 6 \pmod 5$, daher: $7 + 2 \cdot 11 \equiv 2 + 2 \cdot 6 \pmod 5$.

Auch bei der Regel 2 fällt die Analogie zur Gleichheitsrelation auf.

III. Teilbarkeitsregeln

Da mehr als vierstellige natürliche Zahlen in den Klassen 5 bzw. 6 nur recht selten vorkommen – außer in einigen Schulbüchern zur Anwendung der Teilbarkeitsregeln! –, kann man sich bei der Behandlung der Teilbarkeitsregeln im Unterricht (zunächst) auf maximal vierstellige Zahlen beschränken. So wird es im folgenden – mit einer Ausnahme – durchgeführt; eine Verallgemeinerung für Zahlen mit beliebig vielen Stellen ist jedoch ohne Änderung des Ansatzes leicht möglich. Dies sollte man sich bei dem folgenden Aufbau stets vor Augen halten. Die gewählte Beschränkung hat nur den Sinn, die zu untersuchenden Zahlen trotz ihrer additiven Schreibweise (s. u.) überschaubar zu halten. Will man in der Klasse das Summationssymbol „Σ" einführen, ist folglich die Beschränkung überflüssig.

Jede maximal vierstellige natürliche Zahl a läßt sich bekanntlich additiv in der Form $a = q_3 \cdot 1000 + q_2 \cdot 100 + q_1 \cdot 10 + q_0 = q_3 \cdot 10^3 + q_2 \cdot 10^2 + q_1 \cdot 10^1 + q_0 \cdot (10^0) = \sum_{i=0}^{3} q_i \cdot 10^i$ schreiben. Im folgenden wird nun abgeleitet, daß $a = q_3 \cdot 10^3 + q_2 \cdot 10^2 + q_1 \cdot 10 + q_0$ bei bestimmten Teilern d besonders kleinen, leicht erhaltbaren Zahlen kongruent ist, an denen man (fast) unmittelbar die Entscheidung „teilbar – nicht teilbar" treffen kann. Da die KMK-Empfehlungen und -Richtlinien (vom 3. 10. 1968) im 5. Themenkreis die Basisschreibweise fordern, wird diese bei der folgenden Ableitung der Teilbarkeitsregeln benutzt. Im Unterricht sollte man u. U. besser statt der im folgenden benutzten Unterscheidung der verschiedenen Koeffizienten der Zehnerpotenzen durch Indizes ($q_3|q_2|q_1|q_0$) verschiedene Buchstaben (etwa a, b, c, d) wählen.

III. 1 Endstellenregeln

III. 1. 1 Falls $10 \equiv 0 \pmod d$, so folgt nach Regel 1: $10^2 \equiv 0 \pmod d$, $10^3 \equiv 0 \pmod d$. Daher gilt: $q_3\, 10^3 + q_2\, 10^2 + q_1\, 10 + q_0 \equiv q_3 \cdot 0 + q_2 \cdot 0 + q_1 \cdot 0 + q_0 \pmod d$, also $q_3\, 10^3 + q_2\, 10^2 + q_1\, 10 + q_0 \equiv q_0 \pmod d$.
Man kann also in diesem Fall die Teilbarkeit von $a = q_3\, 10^3 + q_2\, 10^2 + q_1\, 10 + q_0$ unmittelbar an der letzten Stelle des Zahlwortes – eben an q_0 – ablesen.
$10 \equiv 0 \pmod d$ gilt nach Definition genau dann, wenn $d|10$, wenn also $d \in T_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$. Folglich ergibt sich für die Zahlen 2, 5 und 10 die folgende Teilbarkeitsregel (im Dezimalsystem): „Eine Zahl a ist genau dann durch 2 bzw. 5 bzw. 10 teilbar, wenn die letzte Stelle des Zahlwortes durch 2 bzw. 5 bzw. 10 teilbar (oder 0) ist." (Im folgenden werde ich die streng genommen überflüssige Bemerkung „oder 0" nicht mehr extra aufführen, ihre ausdrückliche Erwähnung dürfte aber im Unterricht sinnvoll sein. Die bei Teilbarkeitsregeln mögliche Beschränkung auf Primzahlen und Primzahlpotenzen als Teiler erfolgt nicht, da man beim vorliegenden Ansatz auch direkt für viele zusammengesetzte Zahlen ohne Schwierigkeiten Teilbarkeitsregeln erhält.)
Da nach Regel 1 mit $10 \equiv 0 \pmod d$ auch alle höheren Zehnerpotenzen kongruent 0 modulo d sind, gilt diese Regel für alle natürlichen Zahlen und nicht nur für die maximal vierstelligen Zahlen.
III. 1. 2 Gilt $10^2 \equiv 0 \pmod d$, so folgt nach Regel 1: $10^3 \equiv 0 \pmod d$ (und ebenso, daß alle höheren Zehnerpotenzen kongruent 0 modulo d sind). Folglich:

$$q_3\, 10^3 + q_2\, 10^2 + q_1\, 10 + q_0 \equiv q_3 \cdot 0 + q_2 \cdot 0 + q_1 \cdot 10 + q_0 \pmod d$$
$$\equiv q_1 \cdot 10 + q_0 \pmod d$$

Man gewinnt in diesem Falle also die Teilbarkeitsaussage aus den beiden letzten Stellen des Zahlwortes.
$10^2 \equiv 0 \pmod d$ gilt nach Definition genau dann, wenn $d \in T_{100} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$. Wir haben also für 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 und 100 folgende Teilbarkeitsregel abgeleitet:
„Eine Zahl a ist genau dann durch eine der oben genannten Zahlen teilbar, wenn $q_1\, 10 + q_0$ hierdurch teilbar ist."
(Die Verallgemeinerung der Regel für alle natürlichen Zahlen a ergibt sich aus der oben erwähnten Aussage, daß alle größeren Zehnerpotenzen ebenfalls kongruent 0 mod d sind; im folgenden wird die Verallgemeinerung in der Regelformulierung nicht mehr jeweils eigens begründet.)
Für 2, 5 und 10 haben wir in III. 1. 1 einfachere Teilbarkeitsregeln erhalten. Die Teilbarkeitsregel läßt sich im Fall $d = 4$ noch weiter vereinfachen:
Für $d = 4$ gilt nämlich: $10 \equiv 2 \pmod 4$; denn $4|(10-2)$. Daher gilt nach Regel 2: $q_1\, 10 + q_0 \equiv q_1 \cdot 2 + q_0 \pmod 4$ und wir erhalten folgende Teilbarkeitsregel:

„Eine Zahl a ist genau dann durch 4 teilbar, wenn $q_1 \cdot 2 + q_0$ durch 4 teilbar ist."
Beispiel: Teilt 4 die Zahl 7396? $q_0 = 6$, $q_1 = 9$, also: $2\,q_1 + q_0 = 18 + 6 = 24$; $4|24$, also $4|7396$. Bei Anwendung der erst genannten Regel für 4 hätten wir dagegen die (größere) Zahl 96 auf Teilbarkeit durch 4 untersuchen müssen.
III. 1. 3 Gilt $10^3 \equiv 0 \pmod d$ (dann sind nach Regel 1 auch alle höheren Zehnerpotenzen kongruent 0 modulo d), so erhalten wir folgende Kongruenzrelation:
$q_3\,10^3 + q_2\,10^2 + q_1\,10 + q_0 \equiv q_2\,10^2 + q_1\,10 + q_0 \pmod d$.
Man gewinnt also in diesem Fall die Teilbarkeitsaussage aus den drei letzten Stellen des Zahlwortes.
$10^3 \equiv 0 \pmod d$ gilt genau dann, wenn $d \in T_{1000} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000\}$. Wir haben also für **2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500** und **1000** folgende Teilbarkeitsregel abgeleitet:
„Eine Zahl a ist genau dann durch eine der oben genannten Zahlen teilbar, wenn $q_2\,10^2 + q_1\,10 + q_0$ hierdurch teilbar ist."
Insbesondere für **d = 8** läßt sich die Regel noch wesentlich vereinfachen, da gilt $10 \equiv 2 \pmod 8$, $10^2 \equiv 4 \pmod 8$. Folglich: $q_2\,10^2 + q_1\,10 + q_0 \equiv q_2 \cdot 4 + q_1 \cdot 2 + q_0 \pmod 8$. Wir erhalten als Regel:
„Eine Zahl a ist genau dann durch 8 teilbar, wenn $q_2 \cdot 4 + q_1 \cdot 2 + q_0$ durch 8 teilbar ist."
Beispiel: Teilt 8 7296? $q_0 = 6$, $q_1 = 9$, $q_2 = 2$, also $4q_2 + 2q_1 + q_0 = 8 + 18 + 6 = 32$; $8|32$, also $8|7296$. Bei Anwendung der vertrauten Regel hätte stattdessen die (wesentlich größere) Zahl 296 auf Teilbarkeit durch 8 untersucht werden müssen.
III. 1. 4 Analog lassen sich in Verallgemeinerung des Ansatzes Teilbarkeitsregeln für die **Teiler von 10^4 und von höheren Zehnerpotenzen** aufstellen.

III. 2 Quersummenregeln

III. 2. 1 Falls $10 \equiv \mathbf{1} \pmod d$, so folgt nach Regel 1:
$10^2 \equiv 1 \pmod d$, $10^3 \equiv 1 \pmod d$, usw. Folglich gilt:
$q_3\,10^3 + q_2\,10^2 + q_1\,10 + q_0 \equiv q_3 \cdot 1 + q_2 \cdot 1 + q_1 \cdot 1 + q_0 \pmod d$.
In diesem Fall kann man also die Teilbarkeit von a aus der Summe $q_3 + q_2 + q_1 + q_0$ – genannt Quersumme von a – gewinnen.
$10 \equiv 1 \pmod d$ gilt nach Definition genau dann, wenn $d|(10–1)$, wenn also $d \in T_9 = \{1, 3, 9\}$. Wir gewinnen so übersichtlich und leicht die bekannte Quersummenregel:
„Eine Zahl a ist genau dann durch *3 bzw. 9* teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 bzw. 9 teilbar ist."
III. 2. 2 Falls $\mathbf{10^2} \equiv 1 \pmod d$, so folgt nach Regel 1, da $10 \equiv 10 \pmod d$ ist: $10^3 \equiv 10 \pmod d$. Folglich gilt:
$q_3\,10^3 + q_2\,10^2 + q_1\,10 + q_0 \equiv (q_3\,10 + q_2) + (q_1\,10 + q_0) \pmod d$.
(allgemein: die geraden Zehnerpotenzen sind kongruent 1, die ungeraden Zehnerpotenzen kongruent 10 modulo d).
Bezeichnet man $(q_3\,10 + q_2) + (q_1\,10 + q_0)$ als Quersumme zweiter Ordnung, so erhält man für die Teiler von 99, also für **3, 9, 11, 33** und **99** die Regel:
„Eine Zahl a ist genau dann durch eine der oben genannten Zahlen teilbar, wenn ihre Quersumme zweiter Ordnung dadurch teilbar ist."
Für $d = 3$ und $d = 9$ liefert III. 2. 1 eine einfachere Regel; obige Regel ist daher speziell für $\mathbf{d} = \mathbf{11}$ von Bedeutung.
Beispiel: Teilt 11 3707? $7 + 37 = 44$. $11|44$, also: $11|3707$
III. 2. 3 Analog lassen sich bei Verallgemeinerung des Ansatzes Teilbarkeitsregeln für

die Teiler von 999, 9999 usw., allgemein für die Teiler von $10^n - 1$ ($n \leqq 3$), mit Hilfe von Quersummen höherer Ordnung aufstellen. Wegen des erforderlichen Rechenaufwandes sind sie jedoch für die Schulpraxis i. a. uninteressant.

III. 3 Alternierende Quersummenregeln

Sind die negativen Zahlen eingeführt (sonst vgl. Anmerkung nach III. 3. 3), so kann man insbesondere Teilbarkeitsregeln für $d = 7$, $d = 13$ sowie eine weitere Teilbarkeitsregel für $d = 11$ ableiten.

III. 3. 1 Falls $10 \equiv -1 \pmod d$, so folgt nach Regel 1: $10^2 \equiv 1 \pmod d$, $10^3 \equiv -1$ mod d) (allgemein: ungerade Zehnerpotenzen sind kongruent -1, gerade Zehnerpotenzen kongruent 1 modulo d). Daher gilt:

$q_3\, 10^3 + q_2\, 10^2 + q_1\, 10 + q_0 \equiv -q_3 + q_2 - q_1 + q_0 \pmod d$

Man kann also im Fall $10 \equiv -1 \pmod d$ die Teilbarkeit von a aus $q_0 - q_1 + q_2 - q_3$ – genannt alternierende Quersumme von a – gewinnen.

$10 \equiv -1 \pmod d$ gilt genau dann, wenn $d | (10 + 1)$, wenn also $d = 11$. Wir erhalten für $d = 11$ als weitere Teilbarkeitsregel:

„Die Zahl a ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist."

Beispiel: Teilt 11 7645?

Alternierende Quersumme: $5 - 4 + 6 - 7 = 0$. $11|0$, also $11|7645$.

Ersetzen wir in III. 2. 2 nach Regel 2 jeweils 10 durch -1 (dies ist erlaubt wegen $10 \equiv -1$ [mod 11]), so geht die Regel III. 2. 2 in obige Regel über. Analog zeigt man die umgekehrte Schlußrichtung.

III. 3. 2 $10^2 \equiv -1 \pmod d$ gilt genau dann, wenn $d \in T_{101} = \{1, 101\}$. Ähnlich wie in III. 3. 1 und III. 3. 3 ließe sich so eine Teilbarkeitsregel für $d = 101$ gewinnen.

III. 3. 3 Falls $10^3 \equiv -1 \pmod d$, so folgt (wegen $10 \equiv 10$ [mod d]), $10^2 = 10^2$ (mod d): $10^5 \equiv -10^2 \pmod d$, $10^6 \equiv 1 \pmod d$ ($10^7 \equiv 10$ [mod d] usw.).

Daher gilt (die Anwendung nachstehender Regel ist – wie obige Kongruenzen zeigen – erst ab minimal 4 Stellen sinnvoll; sie wird hier daher für 6stellige Zahlen abgeleitet, die Verallgemeinerung für mehrstellige Zahlen ergibt sich aus obigen Kongruenzen):

$q_5\, 10^5 + q_4\, 10^4 + q_3\, 10^3 + q_2\, 10^2 + q_1\, 10 + q_0 \equiv -q_5\, 10^2 - q_4\, 10 - q_3 + q_2\, 10^2 + q_1\, 10 + q_0 \pmod d \equiv -(q_5\, 10^2 + q_4\, 10 + q_3) + (q_2\, 10^2 + q_1\, 10 + q_0) \pmod d$

Bezeichnet man $-(q_5\, 10^2 + q_4\, 10 + q_3) + (q_2\, 10^2 + q_1\, 10 + q_0)$ als alternierende Quersumme 3. Ordnung, so gilt für $d \in T_{1001} = \{1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001\}$:

„Die Zahl a ist genau dann durch **7, 11, 13, 77, 91, 143** und **1001** teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme 3. Ordnung hierdurch teilbar ist."

Beispiel: Teilt 7 870898?

Alternierende Quersumme 3. Ordnung: $898 - 870 = 28$. $7|28$, also $7|870898$. Dagegen teilt 13 nicht 870898, da 13 nicht 28 teilt.

Beschränken wir uns auch hier auf maximal vierstellige natürliche Zahlen, so können wir die Teilbarkeit von $a = q_3\, 10^3 + q_2\, 10^2 + q_1\, 10 + q_0$ durch eine der oben genannten Zahlen an $q_2\, 10^2 + q_1\, 10 + q_0 - q_3$ entscheiden.

Beispiel: Teilt 7 8148?

$148 - 8 = 140$; $7|140$, also: $7|8148$.

Für $d = 11$ sind schon 2 einfachere Regeln angegeben worden, für $d = 7$ und $d = 13$ läßt sich obige Regel noch handlicher formulieren

$d = 7$: Es gilt $10 \equiv 3 \pmod 7$, $100 \equiv 2 \pmod 7$. Wir erhalten daher:

„Die Zahl $a = q_5\, 10^5 + q_4\, 10^4 + q_3\, 10^3 + q_2\, 10^2 + q_1\, 10 + q_0$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $b = (q_0 + 3q_1 + 2q_2) - (q_3 + 3q_4 + 2q_5)$ durch 7 teilbar ist."

Beispiel: Teilt 7 345678?
$b = (8 + 21 + 12) - (5 + 12 + 6) = 41 - 23 = 18$
7 teilt nicht 18, also 7 teilt nicht 345678.
d = 13: Wegen $10 \equiv -3 \pmod{13}$ und $10^2 \equiv -4 \pmod{13}$ ergibt sich als Regel für d = 13:
„Eine Zahl a ist genau dann durch 13 teilbar, wenn $b = (q_0 - 3q_1 - 4q_2) - (q_3 - 3q_4 - 4q_5)$ durch 13 teilbar ist."
Anmerkung: In III. 3 werden im wesentlichen nur Teilbarkeitsregeln für $d = 7$ und $d = 13$ abgeleitet. Dies kann man auch ohne die Einführung negativer Zahlen durchführen; allerdings sind die erhaltenen Regeln dann schwieriger zu behalten:
d = 7: Es gilt: $10 \equiv 3 \pmod 7$, also nach Regel 1 (unter Benutzung der Kongruenz $9 \equiv 2$ [mod 7]) $10^2 \equiv 2 \pmod 7$; $10^3 \equiv 6 \pmod 7$; $10^4 \equiv 4 \pmod 7$; $10^5 \equiv 5 \pmod 7$; $10^6 \equiv 1 \pmod 7$; $10^7 \equiv 3 \pmod 7$; $10^8 \equiv 2 \pmod 7$ usw.
Man erhält als Teilbarkeitsregel:
„Die Zahl $a = q_5\,10^5 + q_4\,10^4 + q_3\,10^3 + q_2\,10^2 + q_1\,10 + q_0$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $b = q_5\,5 + q_4\,4 + q_3\,6 + q_2\,2 + q_1\,3 + q_0$ durch 7 teilbar ist."
(Den Zusammenhang zwischen dieser Teilbarkeitsregel für $d = 7$ und der vorher genannten vermitteln die Kongruenzen:
$6 \equiv -1$ [mod 7], $4 \equiv -3$ [mod 7], $5 \equiv -2$ [mod 7].)
Beispiel: Teilt 7 849394?
$q_5\,5 + q_4\,4 + q_3\,6 + q_2\,2 + q_1\,3 + q_0 = 40 + 16 + 54 + 6 + 27 + 4 = 147$
$7|147$, also: $7|849394$.
d = 13: Es gilt: $10 \equiv 10 \pmod{13}$, $10^2 \equiv 9 \pmod{13}$, $10^3 \equiv 12 \pmod{13}$, $10^4 \equiv 3 \pmod{13}$, $10^5 \equiv 4 \pmod{13}$, $10^6 \equiv 1 \pmod{13}$ usw.
Man erhält als Teilbarkeitsregel:
„Die Zahl $a = q_5\,10^5 + q_4\,10^4 + q_3\,10^3 + q_2\,10^2 + q_1 10 + q_0$ ist genau dann durch 13 teilbar, wenn $b = q_5\,4 + q_4\,3 + q_3\,12 + q_2\,9 + q_1\,10 + q_0$ durch 13 teilbar ist."
(Den Zusammenhang mit der erstgenannten Teilbarkeitsregel für $d = 13$ vermitteln die Kongruenzen:
$10 \equiv -3$ [mod 13], $9 \equiv -4$ [mod 13], $12 \equiv -1$ [mod 13]).

IV. Anhang (Beweise)

IV. 1 Äquivalenz der beiden Definitionen

Definition 1: $a \equiv b \pmod d$ genau dann, wenn a und b bei Division durch d denselben Rest lassen.
Definition 2: $a \equiv b \pmod d$ genau dann, wenn $d|(a-b)$.

1. a und b lassen bei Division durch d denselben Rest, etwa r: $a = nd + r$, $b = md + r$.
   Daher gilt: $a - b = (n - m)d$, d. h. $d|(a-b)$.
2. $d|a-b$. Es gelte: $a = nd + r_1$, $b = md + r_2$ mit $0 \leq r_1, r_2 < d$. Folglich gilt: $a - b = (n - m)d + r_1 - r_2$. d teilt $a - b$ laut Voraussetzung, d teilt sicher $(n - m)d$, daher teilt d auch $(a - b) - (n - m)\,d = r_1 - r_2$. Aus $d|r_1 - r_2$ folgt wegen $0 \leq r_1, r_2 < d$ $r_1 - r_2 = 0$, also $r_1 = r_2$. Daher lassen a und b bei Division durch d denselben Rest.

IV. 2 Regel 1

Satz A: Aus $a \equiv b \pmod d$ und $c \equiv e \pmod d$ folgt $a + c \equiv b + e \pmod d$.
Beweis: Wegen $a \equiv b \pmod d$ und $c \equiv e \pmod d$ gilt nach Definition 2: $d|a - b$ und

$d|c-e$. Folglich gilt: $d|a-b+c-e$. Wegen $a-b+c-e=(a+c)-(b+e)$ gilt auch $d|(a+c)-(b+e)$. Nach Definition 2 folgt $a+c\equiv b+e \pmod{d}$.
Satz B: Aus $a\equiv b \pmod{d}$ und $c\equiv e \pmod{d}$ folgt
$a\cdot c\equiv b\cdot e \pmod{d}$.
Beweis: Nach Definition 2 gilt: $d|a-b$ und $d|c-e$.
Hieraus folgt: $d|(a-b)\cdot c$ und $d|(c-e)\cdot b$.
Folglich gilt: $d|(a-b)\cdot c+(c-e)\cdot b$ bzw. (wegen $ac-bc+cb-eb=ac-eb$) $d|ac-eb$. Nach Definition 2 folgt: $ac\equiv be \pmod{d}$.

IV. 3 Regel 2

Satz C: Aus $a\equiv g \pmod{d}$ und $c\equiv f \pmod{d}$ folgt:
$a+b\cdot c\equiv g+b\cdot f \pmod{d}$.
Beweis: Nach Definition gilt $b\equiv b \pmod{d}$, nach Voraussetzung $c\equiv f \pmod{d}$. Aus Satz B folgt $b\cdot c\equiv b\cdot f \pmod{d}$. Anwendung von Satz A auf die beiden Kongruenzen $a\equiv g \pmod{d}$ (richtig nach Voraussetzung) und $b\cdot c\equiv b\cdot f \pmod{d}$ liefert:
$a+b\cdot c\equiv g+b\cdot f \pmod{d}$.

MARTIN GLATFELD

Relationen und Funktionen in der Sekundarstufe I mit Schwerpunkt in den Klassen 7/8

Aufzeichnung einer Unterrichtseinheit[1]

Vorbemerkung

Im Mathematikunterricht der Primarstufe und im Mathematikunterricht der Klassen 5 und 6 wird der Relationsbegriff angemessen vorbereitet. Daher kann zu Anfang der Klasse 7 ein bestimmtes Erfahrungspotential vorausgesetzt werden. Wir wollen jedoch hier nicht annehmen, daß dem Relationsbegriff in den Klassen 5 und 6 eigenständige Abschnitte gewidmet wurden.

1. Der Relationsbegriff

1. 1. Ausbau der Erfahrungsgrundlage

Zur Terminologie: Wir beschränken uns auf die Sprechweisen Relationen von A „nach" B und Relationen „in" A.
● Ein oder zwei nicht-mathematische(s) Beispiel(e) führen in die Thematik ein. Die Diskussion erfolgt unter Berücksichtigung verschiedener Darstellungsarten. Die zu-

[1] Diese Arbeit will dartun, wie man die Begriffe Relation und Funktion in der Sekundarstufe systematisch behandeln kann. Die einzelnen Abschnitte folgen im Unterricht allerdings nicht in der Weise aufeinander, daß zunächst ein Abschnitt behandelt sein muß, bevor der nächste beginnt. Die hier aufgezeigten Themen durchdringen sich mehrfach. Lernziele sind dem Text ohne weiteres zu entnehmen; es erübrigt sich daher, diese noch einmal am Anfang der Abschnitte zu formulieren.
Weitere Beispiele zu den einzelnen Themen, sowie ergänzende didaktisch-methodische Überlegungen findet man in der Arbeit des Verfassers „Zum Funktionsbegriff im Mathematikunterricht der Hauptschule", die in dem Band „Mathematik in der Hauptschule II" aus der Reihe: Didaktische Studien, Stuttgart 1972, erscheint. Man beachte dort auch die Literaturangaben. – In der Arbeit trat der Relationsbegriff gegenüber dem Funktionsbegriff zurück. (Vgl. a.a.O., Fußnote 13.) Daher wurde der Abschnitt 1 der vorliegenden Unterrichtsplanung ausführlicher gehalten. Entsprechendes gilt für den Darstellungstyp „Funktionsleiter".