Teilbarkeitsregeln in verschiedenen Stellenwertsystemen

Von Friedhelm Padberg in Münster

I. Einleitung. Die Themenkreise „Stellenwertsysteme" und „Teilbarkeitsuntersuchungen" haben im Rahmen der Modernisierungsbestrebungen des Mathematikunterrichts eine gegenüber früher wesentlich erhöhte Bedeutung erhalten. Rein äußerlich kann man dies z. B. schon daran erkennen, daß bei den *Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen* (Beschluß der KMK vom 3. 10. 1968) zwei der insgesamt sieben Themenkreise für die ersten 6 Klassen aller Schulformen diesen beiden Themen gewidmet sind. Die damit verbundenen inhaltlichen Vertiefungen gegenüber der traditionellen Behandlung erkennt man beispielsweise deutlich in der KMK-Forderung, daß man zeigen solle: *Die Teilbarkeit ist eine Zahleigenschaft. Gewisse Teilbarkeitsregeln sind Eigenschaften von Stellenwertsystemen.*

Diese Forderung läßt sich besonders gut bei einer Behandlung der Teilbarkeitsregeln mit Hilfe der Kongruenzrelation erfüllen; denn im Gegensatz zur üblichen Behandlung gestattet ein derartiger Ansatz, die einzelnen Teilbarkeitsregeln aus einer gemeinsamen Wurzel leicht und übersichtlich abzuleiten, die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Teilbarkeitsregeln für einen festen Teiler aufzudecken, selbst Teilbarkeitsregeln aufzustellen und so einen tieferen Einblick in die Konstruktion von Teilbarkeitsregeln zu werfen; er verdeutlicht die Bindungen unserer vertrauten Teilbarkeitsregeln an das Dezimalsystem, erlaubt aber zugleich ohne Schwierigkeiten eine Übertragung auf beliebige andere b-adische Stellenwertsysteme.

Entsprechend soll der Ansatz zunächst an unserem vertrauten 10-adischen Stellenwertsystem exemplarisch vorgeführt werden. Die Übertragung von $b = 10$ auf beliebige andere b-adische Stellenwertsysteme kann dann im folgenden leicht, rasch und knapp durchgeführt werden, da nur jeweils im ersten Teil 10 durch b ersetzt werden muß und die Regeln dann analog gelten. Zum Abschluß werden die Teilbarkeitsregeln für die Zahlen zwei bis zehn in den Basen zwei bis zehn zusammengestellt.

Dabei dürfte die Benutzung der Kongruenzrelation im benötigten (geringen) Umfang im 5. und 6. Schuljahr keine Schwierigkeiten bereiten, da neuere Schulbücher sie z. T. schon im 2. und 3. Grundschuljahr bzw. im 5. Schuljahr bei der Einführung und Verknüpfung von Restklassen implizit, z. T. sogar explizit gebrauchen und die benötigten Eigenschaften analog auch bei der Gleichheitsrelation gelten.

II. Kongruenzrelation. Def. 1. $a \equiv b \pmod d$ *gilt genau dann, wenn a und b bei Division durch d denselben Rest lassen.* Diese Definition zeigt deutlich den Zusammenhang zwischen Kongruenzrelation und Restklassenbildung auf. Die nachstehende hierzu äquivalente Def. 2 ist hingegen oft bei Beweisen handlicher.

Def. 2. $a \equiv b \pmod d$ *gilt genau dann, wenn* $d \mid (a - b)$, *d.h. wenn d die Differenz* $a - b$ *(ohne Rest) teilt.*

Satz 1. Aus $a \equiv b \pmod d$ und $c \equiv e \pmod d$ folgt

$$a + c \equiv b + e \pmod d$$

Beweis. Man benutze die Def. 2 und die Identität

$$a - b + c - e = (a + c) - (b + e).$$

Satz 2. Aus $a \equiv b \pmod d$ und $c \equiv e \pmod d$ folgt

$$a \cdot c \equiv b \cdot e \pmod d.$$

Beweis. Man benutze die Def. 2 und die Identität

$$(a-b)\cdot c+(c-e)\,b=ac-be\,.$$

Satz 3. Für jede ganze Zahl

$$a=\sum_{i=0}^{n} q_i\,10^i$$

und jeden ganzzahligen Teiler $d>0$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} q_i\,10^i \equiv \sum_{i=0}^{n} q_i\cdot r_i \pmod d,\quad \text{wenn} \tag{1}$$

$$10^i \equiv r_i \pmod d \quad \text{für} \quad i=0,1,2,\ldots,n\,. \tag{2}$$

Beweis. Man benutze die Def. 2 sowie die Sätze 2 und 1.

Anmerkungen: 1. Als r_i wird man in (2) aus Bequemlichkeitsgründen im allgemeinen jeweils die absolut kleinste ganze Zahl wählen, die diese Kongruenz erfüllt.

2. Da nach Def. 1

$$a=\sum_{i=0}^{n} q_i\,10^i \quad \text{und} \quad a':=\sum_{i=0}^{n} q_i r_i$$

bezüglich d gleiches Teilbarkeitsverhalten aufweisen, kann man bei Teilbarkeitsuntersuchungen statt a die meist wesentlich kleinere Zahl a' untersuchen. Dies ist der Grundgedanke der im folgenden abgeleiteten Teilbarkeitsregeln.

3. Mehr als vierstellige natürliche Zahlen kommen im Unterricht der Klasse 5 bzw. 6, außer in einigen Schulbüchern zur Anwendung der Teilbarkeitsregeln, nur recht selten vor. Man kann daher im Unterricht bei den Teilbarkeitsuntersuchungen zunächst n durch 3 ersetzen und erst später verallgemeinern.

4. Ersetzt man in Satz 3 die Basis 10 jeweils durch eine beliebige natürliche Zahl $b>1$, so bleibt dieser Satz offensichtlich richtig. Daher kann man die im folgenden (Kap. III) für das 10-adische Stellenwertsystem abgeleiteten Teilbarkeitsregeln sehr leicht und rasch für beliebige b-adische Stellenwertsysteme verallgemeinern (vergleiche Kap. IV).

III. Teilbarkeitsregeln im 10-adischen Stellenwertsystem. Bei der Ableitung der Teilbarkeitsregeln können wir uns auf Primzahlpotenzen

$$d=p^n \quad \text{mit} \quad n\geqq 1$$

beschränken; denn gilt $d=p\cdot q$, p und q teilerfremd, so folgt aus $p\,|\,a$ und $q\,|\,a$ schon $d\,|\,a$. Wegen $10^0=1$ können wir im folgenden immer $r_0=1$ setzen.

III.1. Endstellenregeln. Wir betrachten in diesem Abschnitt den einfachen Sonderfall, daß $10^i\equiv 0 \pmod d$ für ein $i\geqq 1$ gilt.

1.1. Gilt $10\equiv 0 \pmod d$, also $r_1=0$, so folgt nach Satz 2

$$10^n\equiv 0 \pmod d\,,\quad \text{also} \quad r_n=0\,,\quad \text{für} \quad n\geqq 1\,.$$

Daher vereinfacht sich a' zu $a'=q_0$. Weil $10\equiv 0 \pmod d$ genau dann gilt, wenn d Teiler von 10 ist, erhalten wir für $d=2$ und $d=5$ die bekannte Teilbarkeitsregel (im 10-adischen Stellenwertsystem): „*Eine Zahl a ist genau dann durch 2 bzw. 5 teilbar, wenn die letzte Stelle des Zahlwortes, nämlich q_0, durch 2 bzw. 5 teilbar ist.*“

1.2. Gilt $10^2 \equiv 0 \pmod{d}$, also $r_2 = 0$, so folgt analog $10^n \equiv 0 \pmod{d}$, also $r_n = 0$, für $n \geqq 2$. Wegen der trivialen Richtigkeit der Kongruenz $10 \equiv 10 \pmod{d}$ erhalten wir $a' = 10q_1 + q_0$ und damit für die Teiler $d = 4$ und $d = 25$ von 100 die vertraute Regel: „*Eine Zahl a ist genau dann durch 4 bzw. 25 teilbar, wenn* $10q_1 + q_0$ *durch 4 bzw. 25 teilbar ist.*" Diese Teilbarkeitsregel gilt darüber hinaus für alle übrigen Teiler d von 100 (vgl. jedoch die Bemerkung zu Anfang von III). Im Falle $d = 4$ kann man wegen $10 \equiv 2 \pmod{4}$ die Teilbarkeitsregel weiter vereinfachen und statt $10q_1 + q_0$ die Teilbarkeit der (kleineren) Zahl $2q_1 + q_0$ untersuchen.

1.3. Gilt $10^3 \equiv 0 \pmod{d}$, also $r_3 = 0$, so folgt entsprechend $10^n \equiv 0 \pmod{d}$, also $r_n = 0$, für $n \geqq 3$. Für alle Teiler d von 1000, also speziell auch für $d = 8$ und $d = 125$ erhalten wir wegen $10 \equiv 10 \pmod{d}$, $100 \equiv 100 \pmod{d}$, und daher

$$a' = q_2 10^2 + q_1 10 + q_0,$$

die vertraute Regel: „*a ist genau dann durch 8 bzw. 125 teilbar, wenn* $q_2 10^2 + q_1 10 + q_0$ *durch 8 bzw. 125 teilbar ist.*" Im Fall $d = 8$ läßt sich wegen

$$10 \equiv 2 \pmod{8}, \qquad 100 \equiv 4 \pmod{8} \quad \text{bzw.} \quad 100 \equiv -4 \pmod{8}$$

das Teilbarkeitskriterium weiter vereinfachen; die Teilbarkeit kann man schon an der Zahl $q_2 \cdot 4 + q_1 \cdot 2 + q_0$ bzw. $-q_2 \cdot 4 + q_1 \cdot 2 + q_0$ ablesen.

1.4. Durch entsprechende Verallgemeinerung kann man Teilbarkeitsregeln für Teiler höherer Zehnerpotenzen, speziell also für höhere Zweier- und Fünferpotenzen, ableiten.

III.2. Quersummenregeln. In diesem Abschnitt untersuchen wir den einfachen Sonderfall, daß $10^i \equiv 1 \pmod{d}$ für ein $i \geqq 1$ gilt.

2.1. Gilt $10 \equiv 1 \pmod{d}$, also $r_1 = 1$, so folgt nach Satz 2

$$10^n \equiv 1 \pmod{d}, \quad \text{also} \quad r_n = 1, \quad \text{für} \quad n \geqq 1.$$

Daher

$$a' = q_0 + q_1 + \cdots + q_n = \sum_{i=0}^{n} q_i.$$

$10 \equiv 1 \pmod{d}$ gilt genau dann, wenn $d \mid (10-1)$. Bezeichnen wir wie üblich $\sum_{i=0}^{n} q_i$ als Quersumme, so erhalten wir für $d = 3$ und $d = 9$ die bekannte Quersummenregel: „*Eine Zahl a ist genau dann durch 3 bzw. 9 teilbar, wenn die Quersumme durch 3 bzw. 9 teilbar ist.*"

2.2. Gilt $10^2 \equiv 1 \pmod{d}$, also $r_2 = 1$, so folgt nach Satz

$$10^{2n} \equiv 1 \pmod{d}, \quad \text{also} \quad r_{2n} = 1, \quad \text{für} \quad n \geqq 1.$$

Aus $10 \equiv 10 \pmod{d}$, also $r_1 = 10$, folgt $r_{2n-1} = 10$ für $n \geqq 1$.
Daher gilt

$$a' = (10q_1 + q_0) + (10q_3 + q_2) + \cdots + (10q_{2n+1} + q_{2n}).$$

Bezeichnet man diese Summe als Quersumme zweiter Stufe, so erhalten wir für alle Teiler d von $10^2 - 1$, also speziell auch für $d = 11$ die Regel: „*Eine Zahl a ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre Quersumme 2. Stufe durch 11 teilbar ist.*"

2.3. Führt man analog Quersummen höherer Stufen ein, so kann man weitere Teilbarkeitsregeln für Teiler von $10^n - 1$ für $n \geqq 3$ ableiten.

III.3. Alternierende Quersummen-Regeln. In diesem Abschnitt wird der übersichtliche Sonderfall $10^i \equiv -1 \pmod d$ für ein $i \geqq 1$ untersucht.

3.1. Gilt $10 \equiv -1 \pmod d$, so folgt nach Satz 2:

$$10^{2n} \equiv 1 \pmod d, \quad 10^{2n-1} \equiv -1 \pmod d \quad \text{für} \quad n \geqq 1\,.$$

Mithin erhalten wir:

$$a' = q_0 - q_1 + q_2 - + \cdots + (-1)^n q_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i q_i\,.$$

Bezeichnen wir, wie gewohnt,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i q_i$$

als alternierende Quersumme, so erhalten wir für $d = 11\,(= 10 + 1)$ als weitere Teilbarkeitsregel: „*Eine Zahl a ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.*“ Den Zusammenhang mit der ersten Regel liefert: $10 \equiv -1 \pmod{11}$.

3.2. $10^2 \equiv -1 \pmod d$ gilt genau dann, wenn $d \mid 101\ (= 10^2 + 1)$. Ähnlich wie unter 3.1 und 3.3 ließe sich so eine Teilbarkeitsregel für $d = 101$ gewinnen.

3.3. Aus $10^3 \equiv -1 \pmod d$, also $r_3 = -1$, folgt

$$10^{6n} \equiv 1 \pmod d \quad \text{und} \quad 10^{6n+3} \equiv -1 \pmod d;$$

also gilt

$$r_{6n} = 1\,, \quad r_{6n+3} = -1\,, \quad \text{für} \quad n \geqq 0\,.$$

Wegen $10 \equiv 10 \pmod{10}$ und $100 \equiv 100 \pmod d$, folgt für $n \geqq 0$:

$$r_{6n} = 1\,, \quad r_{6n+1} = 10\,, \quad r_{6n+2} = 100\,, \quad r_{6n+3} = -1\,, \quad r_{6n+4} = -10\,,$$
$$r_{6n+5} = -100\,.$$

Bezeichnen wir

$$(q_2 \cdot 10^2 + q_1 \cdot 10 + q_0) - (q_5 \cdot 10^2 + q_4 \cdot 10 + q_3) + - \cdots$$

als alternierende Quersumme dritter Stufe, so erhalten wir für alle Teiler von $10^3 + 1$, also speziell auch für $d = 7$ und $d = 13$, die bekannte Regel: „*a ist genau dann durch 7 bzw. 13 teilbar, wenn die alternierende Quersumme dritter Stufe durch 7 bzw. 13 teilbar ist.*“

Wegen der Kongruenzen $10 \equiv 3 \pmod 7$ und $100 \equiv 2 \pmod 7$ bzw. $10 \equiv -3 \pmod{13}$ und $100 \equiv -4 \pmod{13}$ läßt sich die Teilbarkeitsregel sogar noch weiter vereinfachen.

3.4. Entsprechend kann man Teilbarkeitsregeln für die Teiler von $10^n + 1$ für $n \geqq 3$ aufstellen.

III.4. Allgemeiner Fall. In III.1 bis III.3 haben wir besonders leicht überschaubare Sonderfälle der Kongruenz $10^i \equiv r_i \pmod d$ von Satz 3 untersucht. Hiermit haben wir die Skala der Anwendungsmöglichkeiten dieses Satzes noch längst nicht erschöpft. Vielmehr können wir mit seiner Hilfe zu jedem ganzzahligen Teiler $d > 0$ eine (oder auch mehrere) Teilbarkeitsregeln konstruieren, indem wir für den betreffenden Teiler d Lösungen der Kongruenz

$$10^i \equiv r_i \pmod d \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

(unter Zuhilfenahme von Satz 2) suchen. So hat man die Möglichkeit, für einen Teiler — im Text für $d = 11$ durchgeführt — verschiedene Teilbarkeitsregeln absammenstellung von Teilbarkeitsregeln hinzuweisen. Auch können die Schüler mit Hilfe von Satz 3 selbst Teilbarkeitsregeln aufstellen und so einen tieferen Einblick in die Konstruktion von Teilbarkeitsregeln gewinnen.

IV. Teilbarkeitsregeln in b-adischen Stellenwertsystemen. Wie schon in der Anmerkung 4 zu Satz 3 ausgeführt, behält dieser Satz auch in anderen b-adischen zuleiten und so die Schüler auf den Zweckmäßigkeitsgesichtspunkt bei der Zu-Stellenwertsystemen seine Gültigkeit, sofern wir nur jeweils 10 durch das betreffende b ersetzen. Wir können daher leicht den Ansatz von Kap. III auf beliebige b-adische Stellenwertsysteme übertragen. Entsprechend können wir auch dort unterscheiden zwischen:

1. *Endstellenregeln,* falls $b^i \equiv 0 \pmod{d}$ für ein $i \geqq 1$ (mit den Unterfällen 1.1 bis 1.4 entsprechend zu III.1.1–III.1.4),
2. *Quersummenregeln,* falls $b^i \equiv 1 \pmod{d}$ für ein $i \geqq 1$ (Unterfälle: 2.1 bis 2.3),
3. *alternierenden Quersummenregeln,* falls $b^i \equiv -1 \pmod{d}$ für ein $i \geqq 1$ (Unterfälle: 3.1 bis 3.4), und dem
4. *allgemeinen Fall* (entsprechend III.4).

So erhalten wir beispielsweise in der Basis $b = 8$ für die Teiler 2 und 4, da $b \equiv 0 \pmod{d}$ für $d = 2$ und $d = 4$, die Endstellenregel (1.1): „*Eine Zahl a des 8-adischen Systems ist genau dann durch 2 bzw. 4 teilbar, wenn die letzte Stelle des Zahlwortes durch 2 bzw. 4 teilbar ist.*" Oder wir erhalten für $d = 7$ wegen $b \equiv 1 \pmod{d}$ die Quersummenregel (2.1): „*Eine Zahl a des 8-adischen Systems ist genau dann durch 7 teilbar, wenn die (8-adische) Quersumme durch 7 teilbar ist*", bzw. für $d = 3$ wegen $b \equiv -1 \pmod{d}$ die alternierende Quersummenregel (3.1): „*Eine Zahl a des 8-adischen Systems ist genau dann durch 3 teilbar, wenn die (8-adische) alternierende Quersumme durch 3 teilbar ist.*"

$d \downarrow$ $\overset{b}{\rightarrow}$	zwei	drei	vier	fünf	sechs	sieben	acht	neun	zehn
zwei	1.1	2.1	1.1	2.1	1.1	2.1	1.1	2.1	1.1
drei	2.2	1.1	2.1	2.2	1.1	2.1	2.2	1.1	2.1
vier	1.2	2.2	1.1	2.1	1.2	2.2	1.1	2.1	1.2
fünf	3.2	3.2	2.2	1.1	2.1	3.2	3.2	2.2	1.1
sechs	*K*	*K*	*K*	2.2	1.1	2.1	*K*	*K*	*K*
sieben	2.3	3.3	2.3	3.3	2.2	1.1	2.1	2.3	3.3
acht	1.3	2.2	1.2	2.2	1.3	2.2	1.1	2.1	1.3
neun	3.3	1.2	2.3	3.3	1.2	2.3	2.2	1.1	2.1
zehn	*K*	3.2	*K*	*K*	*K*	3.2	*K*	2.2	1.1

Die beigefügte Tabelle gibt einen Überblick über die Teilbarkeitsregeln für die Teiler (d) zwei bis zehn in den Basen (b) zwei bis zehn. Die Ziffern verweisen auf die entsprechenden Teilbarkeitsregeln in Kap. III; K bedeutet, daß man die zugehörige Regel durch Kombination von im allgemeinen zwei behandelten Teilbarkeitsregeln erhält; Beispiel: $d = 6$ im Dezimalsystem: eine Zahl a ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.