# Über Probleme von Gymnasialschülern mit dem Dezimalbruchbegriff

## Eine empirische Untersuchung

von

*Friedhelm Padberg, Bielefeld*

*Gemeine Brüche* bereiten bekanntlich vielen Schülern während ihrer gesamten Schulzeit – und auch noch später! – große Schwierigkeiten. *Dezimalbrüche* gelten dagegen im allgemeinen wegen der starken Analogie zu den natürlichen Zahlen bezüglich der Schreibweise wie auch der Rechenoperationen als problemlos und leicht. Von uns durchgeführte Untersuchungen (Padberg (4), Padberg (5)) belegen jedoch, daß auch die *Rechenoperationen mit Dezimalbrüchen* den Schülern *große Schwierigkeiten* bereiten, die zum Teil noch *größer* sind als die Probleme mit den gemeinen Brüchen. Eine Ursache hierfür sind nach unserer Einschätzung gravierende *Mängel* bei dem von den Schüler benutzten *Dezimalbruchbegriff*. Daher gehen wir in diesem Beitrag auf der Grundlage einer eigenen empirischen Untersuchung an gut 400 Schülern aus 34 Klassen des 7. Schuljahres von 11 Gymnasien in Westfalen auf diese Mängel genauer ein. [1 2]

### 1. Sprechweise

In den Medien wie auch im täglichen Leben werden Dezimalbrüche wie 3,25 vielfach als Drei-Komma-Fünfundzwanzig gelesen. Diese Sprechweise ist problematisch; denn sie kann insbesondere folgende typische Fehler beim

- Kürzen/Erweitern: $0,30 \neq 0,3$, da $30 \neq 3$
- Größenvergleich: $0,3 < 0,27$, da $3 < 27$
- Addieren: $0,38 + 0,7 = 0,45$, da $38 + 7 = 45$
- Subtrahieren: $0,76 - 0,2 = 0,74$, da $76 - 2 = 74$

bewirken oder verstärken. Sie sollte daher im Mathematikunterricht nicht verwandt werden. Vielmehr sollte man die ziffernweise Sprechweise benutzen und z. B. 3,25

---

[1] Für ihre fundierte Hilfe bei der Auswertung dieser gut 400 Testbögen bin ich Frau Sonja Ritz, Steinhagen zu Dank verpflichtet.

[2] Für genauere Informationen über die Testerstellung und Testdurchführung sei an dieser Stelle aus Platzgründen auf unsere Arbeit (5) verwiesen. Diese Arbeit (5) basiert auf der Auswertung von 50% der Testbögen je Klasse, die vorliegende auf der Auswertung der übrigen 50%.

Drei Komma Zwei Fünf lesen. Erfreulicherweise verwenden die von uns untersuchten Gymnasiasten weit überwiegend diese Sprechweise, nur etwa 3% benutzen die fehlerträchtige Sprechweise Drei–Komma– Fünfundzwanzig.

## 2. Dezimale Stellenwertschreibweise

Unerläßliche Grundlage für einen richtigen Umgang mit Dezimalbrüchen ist eine sichere Kenntnis ihrer Stellenwertschreibweise. Durch folgende drei Aufgabentypen versuchen wir, diese Kenntnisse festzustellen: [3]

(1) Schreibe als Dezimalbruch

- (a) 2 Zehntel
- (b) 5 Hundertstel
- (c) 8 Tausendstel
- (d) 25 Hundertstel
- (e) 345 Tausendstel
- (f) 97 Tausendstel
- (g) 2 Einer 3 Zehntel 5 Hundertstel
- (h) 345 Hundertstel
- (i) 28 Zehntel
- (j) 2 Einer 5 Zehntel 12 Hundertstel

(2)
- (k) Kreuze die Zehntel in 7,654 an
- (l) Kreuze die Hundertstel in 7,654 an

(3)
- (m) 8,65 bedeutet 8 Einer, 6_____, 5_____
- (n) 8,07 bedeutet 8 Einer, _______________
- (o) Die Zahl 56,789 besteht aus 5 Zehnern, 6 Einern, 7_____, 8_____, 9_____

Eine Analyse der Antworten ergibt, daß selbst Gymnasialschüler diese Fundamente keineswegs problemlos beherrschen. Die Erweiterung der dezimalen Stellenwertschreibweise vom Bereich der natürlichen Zahlen auf den Bereich der rationalen Zahlen bereitet ihnen durchaus Schwierigkeiten.

Erwartungsgemäß fallen den Schülern beim *Aufgabentyp (1)* die Aufgaben am leichtesten, bei denen nur *ein* Stellenwert gegeben ist und wo nicht umgebündelt werden muß. Am schwersten fällt hier mit einer Fehlerquote von 40%(!) die Aufgabe (j), bei der mehrere Stellenwerte gegeben sind und zusätzlich noch umgebündelt werden muß. Die besonderen Schwierigkeiten generell beim Umbündeln kann man der folgenden Übersicht entnehmen:

---

[3] Die Aufgaben werden hier – und auch in den folgenden Abschnitten – nach systematischen Gesichtspunkten angeordnet. Die Abfolge und Zusammenstellung entspricht *nicht* der Abfolge im Test. Den vollständigen Test kann man in der Publikation (6) finden.

| Aufgabe | Ergebnis | Prozentsatz der Schüler |
|---|---|---|
| 25 Hundertstel | 0,025 | 3 |
| 97 Tausendstel | 0,0097 | 7 |
| 345 Tausendstel | 0,00345 oder 0,0345 | 10 |
| 345 Hundertstel | 0,345 oder 0,0345 | 16 |
| 28 Zehntel | 0,28 | 24 |
| 2 Einer 5 Zehntel 12 Hundertstel | 2,512 | 27 |

*Tabelle 1:* Fehler beim Umbündeln

Neben der schon erwähnten Aufgabe (j) bereiten die Aufgaben (h) und (i), bei denen über das Komma umgebündelt werden muß, besondere Schwierigkeiten. Meist wird beim Umbündeln der Fehler gemacht, daß von dem vorgegebenen Ziffernblock statt der rechtsstehenden Ziffer die linksstehende Ziffer bei dementsprechenden Stellenwert notiert wird. (Z. B. müßte bei 97 Tausendstel die Ziffer 7 in die Tausendstelspalte und die Ziffer 9 davor in die Hundertstelspalte geschrieben werden. Stattdessen schreiben die Schüler die Ziffer 9 in die Tausendstelspalte und schreiben dann nach rechts hin weiter). Ursache hierfür ist vermutlich ein fehlerhafter Transfer von der Stellenwertschreibweise für natürliche Zahlen; denn 97 Tausender werden in **N** auf der Tausender– (und Zehntausenderstelle), nämlich als 97000, notiert, während die analoge Notation von 97 Tausendsteln auf der Tausendstel– (und Zehntausendstelstelle), nämlich als 0,0097, gerade obigem Hauptfehler entspricht.

Fehllösungen wie 2 Zehntel = 0,02, 5 Hundertstel = 0,005, 8 Tausendstel = 0,0008 lassen einen *weiteren* fehlerhaften Transfer vom Bereich der natürlichen Zahlen auf den Bereich der Dezimalbrüche erkennen, der auch für die obige Fehllösung 0,0097 eine weitere Ursache sein könnte: Da in **N** die Zehner an zweiter, die Hunderter an dritter Stelle vor dem Komma stehen, meinen manche Schüler, daß entsprechend auch die Zehntel an zweiter, die Hundertstel an dritter Stelle nach dem Komma stehen. Diese Schüler bezeichnen z. T. folgerichtig die erste Stelle nach dem Komma bei den Aufgaben des Typs (3) als „Eintel". Inwieweit für obige Fehler dieser fehlerhafte Transfer die Ursache ist, läßt sich auch an den Aufgaben des Typs (2) gut abklären. So kreuzen 18% der untersuchten Schüler bei der Aufgabe „Kreuze die Zehntel in 7,654" die Ziffer 5 an. Hieraus allerdings den Schluß zu ziehen, daß fast jeder fünfte Gymnasialschüler die irrige Vorstellung besitzt, daß die Zehntel – analog zu den Zehnern – auf der zweiten Stelle nach dem Komma stehen, ist voreilig; denn die Ergebnisse der folgenden Aufgabe „Kreuze die Hundertstel in 7,654 an" belegen, daß ein *weiterer* fehlerhafter Transfer von der Stellenwertschreibweise für natürliche Zahlen für diese Fehllösung mit verantwortlich ist: So kreuzen 16% die Ziffer 6 und nur 4% die Ziffer 4 als Hundertstel an. Nur bei der letzteren – kleineren – Gruppe liegt offenbar der oben genannte Fehler vor, ein weit größerer Teil von Schülern (14%) kreuzt jedoch die Ziffer 5 als Zehntel *und* zugleich die Ziffer 6 als Hundertstel an. Diese Schüler sehen also unverändert wie schon in **N** so auch bei den Dezimalbrüchen die letzte Stelle des Zahlwortes (und nicht das Komma) als Bezugspunkt für die Dezimalen an. Verantwortlich hierfür ist zumindestens bei einigen dieser Schüler die Vorstellung, daß ein Dezimalbruch wie 56,789 aus zwei natürlichen Zahlen – nämlich aus 56 und 789 – besteht, die durch das Komma getrennt werden, eine Vorstellung (im folgenden kurz KT–Vorstellung genannt), die noch aus dem Grundschulunterricht herrühren kann. Dort trennt nämlich bei Größenangaben das Komma die größere von der kleineren Einheit (Beispiel: In 17,85 DM trennt das Komma die 17 DM von den 85 Pf.) Ein deutliches Indiz dafür, daß hier diese KT–Vorstellung wirklich zugrundeliegt, ist die Tatsache, daß fast 5% der Gymnasialschüler beim Aufgabentyp (3) beispielsweise in der Aufgabe (o) antworten: Die Zahl 56,789 besteht aus 5 Zehnern, 6 Einern, 7 Hundertern, 8 Zehnern, 9 Einern. Überhaupt fällt bei den Antworten zum Aufgabentyp (3) auf, daß die Benennung der Dezimalen öfter nicht korrekt ist und – aus Unsicherheit? – die Sprechweise der Stellenwerte von $\mathbb{N}$ einfach übernommen wird. So schreibt hier nämlich mehr als jeder zehnte Schüler statt Zehntel Zehner und statt Hundertstel Hunderter.

### 3. Erweitern/Kürzen und Einbettung

Durch folgende vier Aufgabentypen testen wir die Kenntnisse der Gymnasialschüler zu diesem Fragenkomplex:

(1) (a) Schreibe mit 2 Stellen nach dem Komma: 7 = 7,☐☐
(b) Schreibe mit 3 Stellen nach dem Komma: 4,56 = 4,56☐
(c) Schreibe mit 3 Stellen nach dem Komma: 0,4 = 0,4☐☐

(2) (d) Kreuze die richtige Aussage an:
0,3 < 0,30
0,3 = 0,30
0,3 > 0,30

(3) (e) Welche Zahlen sind gleich? Kreuze alle richtigen Lösungen an:
0,2 = 0,02
0,2 = 0,20
0,2 = 0,002
0,2 = 0,200

(4) (f) 4 Zehntel ist dasselbe wie _____ Hundertstel.
(g) 30 Hundertstel ist dasselbe wie _____ Zehntel.

Auch bei diesen Aufgaben wird – wie schon in 2. – die sichere Kenntnis der dezimalen Stellenwertschreibweise untersucht, allerdings unter den speziellen Gesichtspunkten der Einbettung der natürlichen Zahlen in die Menge der Dezimalbrüche (Aufgabe (a)) sowie des Erweiterns/Kürzens (übrige Aufgaben). Da das Kürzen und Erweitern bei Dezimalbrüchen wesentlich einfacher ist als bei gemeinen Brüchen und durch das Anhängen bzw. Streichen von Endnullen erfolgt, untersuchen die Aufgabentypen (1), (2) und (3), wo bei einem Dezimalbruch Nullen angehängt bzw. weggenommen werden dürfen, ohne daß sich sein Wert ändert. Die Untersuchung ergibt folgende Ergebnisse:

| Aufg.typ | Aufgabe | r | f | n.b. |
|---|---|---|---|---|
| (1) | (a) | 92 | 4 | 5 |
| | (b) | 88 | 4 | 7 |
| | (c) | 89 | 5 | 5 |
| (2) | (d) | 91 | 6 | 3 |
| (3) | (e) | 92 | 6 | 3 |
| (4) | (f) | 63 | 27 | 11 |
| | (g) | 66 | 25 | 9 |

*Tabelle 2:* Prozentsätze der richtigen, falschen und fehlenden Antworten bei den Aufgaben zum Erweitern/Kürzen und zur Einbettung[4]

Im Unterschied zu den von Günther (1) untersuchten Haupt- und Realschülern und den von Hart (2) untersuchten Schülern in Großbritannien beherrschen die Gymnasialschüler in unserer Untersuchung die Aufgabentypen (1), (2) und (3) zum Einbetten sowie zum Kürzen und Erweitern hochprozentig richtig. Deutliche Schwierigkeiten sind nur beim Aufgabentyp (4) zu erkennen.

Typische Fehler sind beim *Aufgabentyp (1)* nicht zu beobachten. Beim *Aufgabentyp (2)* kreuzen 2% der Schüler 0,3 < 0,30 und 3% der Schüler 0,3 > 0,30 an. Das erste fehlerhafte Ergebnis kann durch die schon erwähnte KT–Vorstellung zustandekommen: 0,3 < 0,30, da 3 < 30. 30% der Schüler, die diese Aussage ankreuzen, machen übrigens bei den Aufgaben zum Größenvergleich den KT–Fehler *systematisch*. Daneben kommt als Fehlerursache die in 1. erwähnte problematische Sprechweise in Frage. Ursache für die fehlerhafte Lösung 0,3 > 0,30 ist vermutlich die sogenannte MK–Strategie. Hierbei halten Schüler einen Dezimalbruch für umso kleiner, je mehr Dezimalen er hat und für umso größer, je weniger Dezimalen er besitzt. Der Dezimalbruch 0,3 ist daher für diese Schüler größer als 0,30, weil er weniger Dezimalen besitzt. Ursache dieser Strategie ist die fehlerhafte Übergeneralisierung des richtigen Grundgedankens, daß Zehntel (1 Dezimale) größer sind als Hundertstel (2 Dezimalen) usw. Von den Schülern, die 0,3 > 0,30 ankreuzen, machen 64% beim Größenvergleich von Dezimalbrüchen diese MK–Fehler *systematisch*.

Die Aufgabe (e) des *Aufgabentyps (3)* bereitet den Schülern keine Schwierigkeiten. Am schwersten fällt den Schülern das stärker inhaltliche Argumentieren beim *Aufgabentyp (4)*, das bei den Aufgaben (f) und (g) erforderlich ist. *Häufigste* Fehllösungen bei diesen Aufgaben sind „4 Zehntel ist dasselbe wie 0,4 Hundertstel" und „30 Hundertstel ist dasselbe wie 300 Zehntel" (jeweils 10%). Ursache dieser Fehler könnte folgender Gedankengang sein:

Zehntel $\xrightarrow{:10}$ Hundertstel
also: 4 Zehntel $\xrightarrow{:10}$ 0,4 Hundertstel
bzw. Hundertstel $\xrightarrow{\cdot 10}$ Zehntel
also: 30 Hundertstel $\xrightarrow{\cdot 10}$ 300 Zehntel

Der Fehler könnte jedoch auch durch eine fehlerhafte Übertragung von $\mathbb{N}$ entstehen; denn dort gilt: 30 Hunderter ist dasselbe wie 300 Zehner.

[4]Es bedeutet n. b. : nicht beantwortet.

*Weitere* Fehllösungen bei den Aufgaben (f) und (g) sind $\frac{40}{100}$ (9%) und $\frac{3}{10}$ (8%). Vermutlich haben diese Schüler richtig $\frac{4}{10} = \frac{40}{100}$ bzw. $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ gedacht und dann diese Brüche hingeschrieben, ohne zu beachten, daß bereits „Hundertstel" bzw. „Zehntel" in der Aufgabenstellung notiert steht. Andere Schüler scheinen das Umformen von Zehnteln in Hundertstel und umgekehrt als Verdoppeln und Halbieren aufzufassen. So schreiben 2% der Schüler „4 Zehntel ist dasselbe wie 8 Hundertstel" und 1% der Schüler „30 Hundertstel ist dasselbe wie 15 Zehntel".

## 4. Zusammenhang: Gemeine Brüche – Dezimalbrüche

Für ein gründliches Verständnis des Dezimalbruchbegriffs ist neben einer fundierten Kenntnis der Schreibweise von Dezimalbrüchen mit Hilfe des dezimalen Stellenwertsystems auch eine gründliche Kenntnis des Zusammenhanges zwischen Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen notwendig. Daher enthält unser Test eine größere Zahl verschiedenartiger Aufgabentypen zur Umformung von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche sowie umgekehrt zur Umformung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche. Bei der Darstellung der Testergebnisse unterscheiden wir zwischen echten und unechten Brüchen sowie zwischen Brüchen mit einer Zehnerpotenz als Nenner und übrigen Brüchen:

| | Aufgabe | r | f | n.b. |
|---|---|---|---|---|
| Umformung von einem Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch | 0,7 | 81 | 7 | 12 |
| | 0,03 | 79 | 7 | 14 |
| | 2,7 | 76 | 8 | 16 |
| | 0,009 | 73 | 11 | 15 |
| | 0,357 | 71 | 14 | 15 |
| | 4,03 | 70 | 13 | 16 |
| | 0,29 | 69 | 17 | 14 |
| | 0,017 | 67 | 18 | 15 |
| Umformung von einem gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch | $\frac{3}{10}$ | 82 | 10 | 8 |
| | $\frac{48}{100}$ | 81 | 7 | 11 |
| | $\frac{3}{100}$ | 79 | 9 | 11 |
| | $\frac{5}{1000}$ | 79 | 15 | 6 |
| | $\frac{37}{1000}$ | 78 | 9 | 13 |

| Aufgabe | r | f | n.b. |
|---|---|---|---|
| $\frac{526}{1000}$ | 75 | 15 | 10 |
| $\frac{287}{100}$ | 73 | 18 | 9 |
| $\frac{23}{10}$ | 71 | 16 | 13 |
| $4\frac{3}{10}$ | 70 | 17 | 12 |
| $5\frac{38}{100}$ | 66 | 20 | 14 |
| $\frac{1}{2}$ | 85 | 8 | 7 |
| $\frac{2}{5}$ | 67 | 18 | 15 |
| $\frac{3}{4}$ | 62 | 18 | 20 |
| $\frac{2}{3}$ | 45 | 26 | 29 |
| $\frac{3}{8}$ | 42 | 29 | 29 |

*Tabelle 3:* Prozentsätze der richtigen, falschen und fehlenden Antworten bei den Aufgaben zur Umformung

Vergleicht man jeweils entsprechende Aufgaben miteinander, so erkennt man, daß den Schülern die Umformung von Brüchen mit Zehnerpotenzen als Nennern in Dezimalbrüche überraschenderweise im allgemeinen leichter fällt als umgekehrt die Umformung von Dezimalbrüchen in Zehnerbrüche. Genau anders herum ist die Situation allerdings bei der Umformung von gemischten Zahlen in Dezimalbrüche bzw. umgekehrt. Die großen Schwierigkeiten der Gymnasiasten bei der Umformung von gemeinen Brüchen, die im Nenner keine Zehnerpotenz haben, in Dezimalbrüche überraschen.

## 4.1 Umformung von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche

Daß die Schüler Schwierigkeiten bei der Umformung von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche haben, wird allein dadurch schon deutlich, daß 12% der Gymnasialschüler *keine einzige* Aufgabe dieses Aufgabentyps lösen.

Der *häufigste* Fehler bei diesem Aufgabentyp ist, daß die Zehnerpotenz im Nenner des Bruches um eine Potenz zu niedrig ist. Folgende fehlerhaften Lösungen werden hierdurch bewirkt:

$0,29 = \frac{29}{10}$ (12%); $0,017 = \frac{17}{100}$ (13 %); $0,357 = \frac{357}{100}$ (9%); $0,03 = \frac{3}{10}$ (3 %); $4,03 = 4\frac{3}{10}$ (4%) oder $\frac{403}{10}$ (1%); $0,009 = \frac{9}{100}$ (4%). Ursache für diese Fehler kann der schon erwähnte fehlerhafte Transfer von den natürlichen Zahlen sein: In $\mathbb{N}$ stehen die Zehner an zweiter Stelle, also stehen die Zehntel für manche Schüler ebenfalls an zweiter Stelle. Konsequent ordnen manche dieser Schüler auch hier der ersten Stelle nach dem Komma die Stellenwertbezeichnung „Einter" zu und schreiben: $2,7 = 2\frac{7}{1}$ oder $0,7 = \frac{7}{1}$.

Analysiert man die Fehlerhäufigkeit *genauer*, so fällt auf, daß dieser Fehler bei den Aufgaben, die *mehrere* von Null verschiedene Dezimalen besitzen, wesentlich häufiger auftritt als bei den Aufgaben mit nur *einer* von Null verschiedenen Dezimalen (Beispiel: 0,29 bzw. 0,03). Dies läßt darauf schließen, daß der Fehlertyp noch eine *andere* Ursache hat. Die Schüler lesen offensichtlich — entsprechend wie auch schon im Abschnitt 2 — den Stellenwert an der äußersten *linken* Stelle des jeweiligen Ziffernblocks ab und notieren ihn als Nenner des Bruches (Beispiel: Die Ziffer 1 in dem Dezimalbruch 0,017 besitzt den Stellenwert Hundertstel, also formen diese Schüler den Dezimalbruch 0,017 in den Bruch $\frac{17}{100}$ um). Dieses fehlerhafte Umbündeln machen 6% der Schüler *systematisch*.

Ist der Dezimalbruch *größer* als 1, so wird außerdem häufiger das Komma mit dem Bruchstrich gleichgesetzt, also gerechnet: $2,7 = \frac{2}{7}$; (2%); $4,03 = \frac{4}{3}$ oder $\frac{4}{03}$ (1%). *Systematisch* wird dieser Fehler von 1% der Schüler gemacht.

Dieser Fehler tritt auch (jedoch wesentlich seltener) bei den Dezimalbrüchen auf, die *kleiner* als 1 sind, z. B. $0,29 = \frac{0}{29}$; $0,03 = \frac{0}{3}$ oder $0,7 = \frac{0}{7}$. Zum Teil wird hierbei der Zähler 0 durch den Zähler 1 ersetzt und z. B. geschrieben: $0,017 = \frac{1}{17}$.

## 4.2 Umformung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche

Wir gehen zunächst auf den — für die Schüler wesentlich leichteren — Fall ein, daß die Nenner der gemeinen Brüche *Zehnerpotenzen* sind. Relativ am meisten Schwierigkeiten bereiten hier die Aufgaben, bei denen über das Komma hinweg umgebündelt werden muß oder bei denen der Bruch als gemischte Zahl vorgegeben ist.

Auch hier läßt sich — wie schon in 4.1 — ein fehlerhafter Transfer von der dezimalen Stellenwertschreibweise in $\mathbb{N}$ auf die Dezimalbrüche beobachten. Fehllösungen wie $\frac{5}{1000} = 0,0005$ (3%); $\frac{3}{100} = 0,003$ (2%); $\frac{287}{100} = 0,287$ (5%) oder $\frac{526}{1000} = 0,0526$ (3%) können so erklärt werden.

Wenn umgebündelt werden muß, passiert es auch hier häufig, daß von dem Ziffernblock des Zählers die linke Ziffer auf den entsprechenden Stellenwert gesetzt und dann nach rechts hin weitergeschrieben wird. Dadurch entstehen die fehlerhaften Ergebnisse $\frac{287}{100} = 0,0287$; $\frac{526}{1000} = 0,00526$; $\frac{48}{100} = 0,048$; $\frac{37}{1000} = 0,0037$, die jeweils zwischen 3% und 4% der Schüler — meist *systematisch* – - unterlaufen. Deutlich höher liegt die Fehlerquote bei $5\frac{38}{100} = 5,038$ mit 6% und bei $\frac{23}{10} = 0,23$ mit gar 12%. Natürlich können auch hier diese Ergebnisse (bis auf $\frac{287}{100} = 0,0287$ und $\frac{526}{1000} = 0,00526$) durch die oben genannte Fehlerstrategie (Zehntel stehen an zweiter Stelle) entstanden sein.

*Weitere* Fehler, die bei der Umformung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche auftreten, sind:

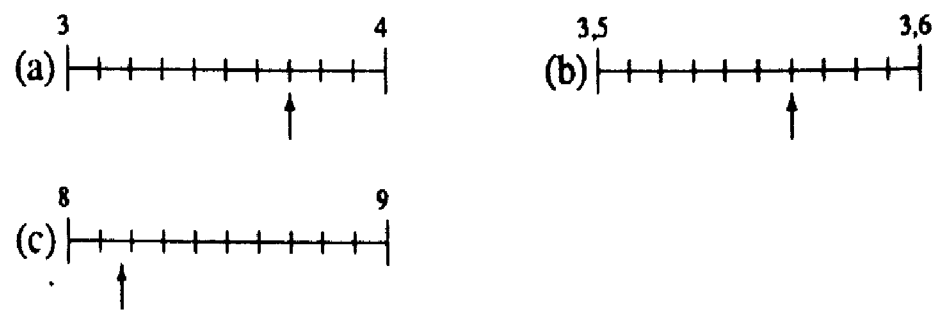
- Bruchstrich und Komma werden gleichgesetzt.
  (Beispiele: $\frac{3}{10} = 3,10$; $\frac{5}{1000} = 5,1000$ oder $\frac{287}{100} = 287,100$ (jeweils 1% bis 2% der Schüler))
- Der Nenner wird durch den Zähler dividiert.
  (Beispiele: $\frac{3}{10} = 3,\overline{3}$; $\frac{5}{1000} = 200$ und $\frac{3}{100} = 33,\overline{3}$)

Die niedrigen Lösungsquoten bei der Umformung von $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{4}$ sowie insbesondere von $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{8}$ in Dezimalbrüche überraschen, besonders auch die Tatsache, daß die Schüler die Dezimalbrüche zu so häufig vorkommenden Brüchen wie $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{4}$ offensichtlich nicht auswendig beherrschen. *Häufigster* Fehler ist hier die Gleichsetzung von Komma und Bruchstrich. So schreiben jeweils rund 3% der Schüler $\frac{1}{2} = 1,2$; $\frac{2}{5} = 2,5$; $\frac{3}{4} = 3,4$; $\frac{3}{8} = 3,8$ und $\frac{2}{3} = 2,3$. Dabei machen die betreffenden Schüler diese Fehler meistens nicht zufällig, sondern *systematisch*.

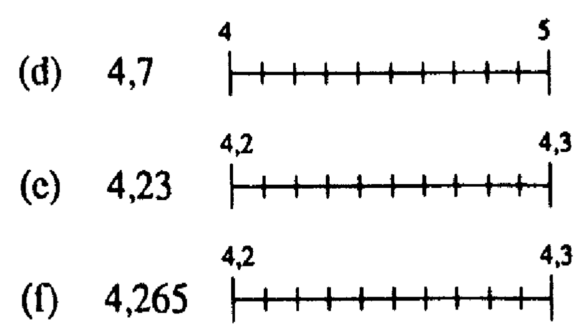
## 5. Anschauliche Vorstellungen

Für ein verständiges Umgehen mit Dezimalbrüchen ist es schließlich auch wichtig, daß die Schüler neben einer gründlichen Kenntnis der Stellenwertschreibweise und des Zusammenhangs zwischen Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen auch anschauliche Vorstellungen mit den Dezimalbrüchen verbinden. Durch folgende drei Aufgabentypen versuchen wir in unserem Test, genauere Informationen über diese anschaulichen Vorstellungen zu gewinnen.

- Veranschaulichungen am *Zahlenstrahl:*
  Welche Zahl wird durch den Pfeil markiert?




Markiere durch einen Pfeil




- Veranschaulichungen am *Quadrat*
  Hier sollen die Schüler in zwei ersten Aufgaben 0,4 (Aufgabe (g)) bzw. 0,45 (Aufgabe (h)) eines gegebenen Quadrates dunkel färben. In zwei weiteren Aufgaben sind umgekehrt 3 Zehntel (Aufgabe (i)) bzw. 8 Hundertstel (Auf-

gabe (j)) eines Quadrates schraffiert, und es soll angegeben werden, welcher Dezimalbruch veranschaulicht wird.

- *Größenvorstellungen* von Dezimalbrüchen
  Hier stellen wir die Aufgaben „Wieviel Liter sind in einer kleinen Cola–Dose?" (Aufgabe (k)) und „Wie schwer ist ungefähr ein 14–jähriger Junge?" (Aufgabe (l)) als Multiple–choice–Aufgaben.

Die beiden letztgenannten Aufgaben zur Größenvorstellung von Dezimalbrüchen bereiten den Gymnasiasten keine Schwierigkeiten und werden von fast allen Schülern richtig gelöst, wie die folgende Tabelle zeigt:

| | Aufgabe | r | f | n.b. |
|---|---|---|---|---|
| Veranschaulichung | (a) | 94 | 5 | 1 |
| am Zahlenstrahl | (b) | 85 | 11 | 3 |
| | (c) | 79 | 21 | 0 |
| | (d) | 97 | 2 | 1 |
| | (e) | 85 | 13 | 1 |
| | (f) | 71 | 23 | 6 |
| Veranschaulichung | (g) | 65 | 15 | 20 |
| am Quadrat | (h) | 59 | 21 | 19 |
| | (i) | 66 | 26 | 8 |
| | (j) | 46 | 34 | 20 |
| Größenvorstellung | (k) | 94 | 4 | 2 |
| | (l) | 97 | 2 | 1 |

*Tabelle 4:* Prozentsätze [5] der richtigen, falschen und fehlenden Antworten bei den Aufgaben zur anschaulichen Vorstellung

Das *Ablesen* einer Zahl an einem *Zahlenstrahl,* bei dem das betrachtete Intervall durch zwei natürliche Zahlen eingegrenzt wird (Aufgabe (a)), bereitet den Schülern kaum Probleme.

Deutlich niedriger ist die Lösungsquote bei der Aufgabe (b), bei der die Grenzen des gegebenen Intervalles Dezimalbrüche sind. Häufigster Fehler ist das unnötige Einfügen einer Null. So geben 2% der Schüler 3,506 als Ergebnis an. Hierbei wird die Null offensichtlich als trennendes Symbol zwischen den gegebenen Skalenwerten und der Anzahl der „kleinen" Striche benutzt (vgl. auch Günther (1)).

Die meisten Schwierigkeiten bereitet die Aufgabe (c) bei der ein Zwischenwert abgelesen werden muß. Die häufigsten Fehler sind hier:

- Ungenaues Ablesen
  8,12 oder 8,13

[5] Die Aufgaben zur Veranschaulichung am Zahlenstrahl kommen in beiden Testversionen vor. Wir beschränken uns jedoch bei den Angaben zu diesen Aufgaben auf die Auswertung der Gruppe A, da in der Testversion B diese Aufgaben am Ende des Tests stehen und von einer Reihe von Schülern aus Zeitmangel nicht vollständig gelöst wurden.

- Keine Unterteilung des entsprechenden Intervalls
  8,1 oder 8,2
- Mitte bilden durch Anhängen von $\frac{1}{2}$
  $8,1\frac{1}{2}$
- Falsches „Abzählen"
  8,25

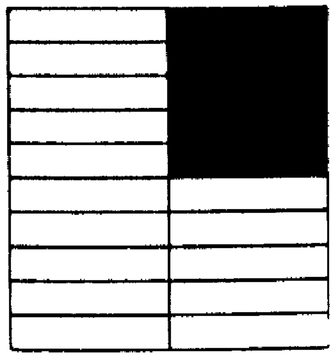
Beim *Eintragen* eines Dezimalbruchs auf einen *Zahlenstrahl* läßt sich dieselbe Stufung des Schwierigkeitsgrades erkennen.

Beim Eintragen einer Zahl auf einen Zahlenstrahl, bei dem das betreffende Intervall durch natürliche Zahlen abgegrenzt wird (Aufgabe (d)) haben die Schüler keine Schwierigkeiten. Deutlich niedriger ist die Lösungsquote, wenn die Grenzen des Intervalls Dezimalbrüche sind. Die häufigsten Fehllösungen bei der Aufgabe (e) sind 4,203 (4%) und 4,223 (3%). Beide fehlerhaften Ergebnisse resultieren aus dem Nichtbeachten der Intervallgrenzen. Während beim ersten Fehler die Schüler nur die rechte Grenze des Intervalls nicht beachten und von der linken Grenze 4,2 aus 4,3; 4,4 usw. weiterzählen, mißachten die Schüler beim zweiten Fehler beide Intervallgrenzen und zählen von der Zahl 4 aus 4,1; 4,2; 4,3; usw. weiter.

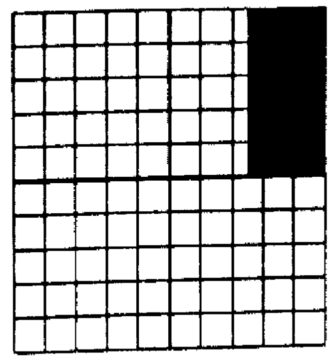
Am schwersten ist für die Schüler auch hier das Eintragen von Zwischenwerten (Aufgabe (f)), zumal hierbei drei Dezimalen beachtet werden müssen. Der am häufigsten auftretende Fehler ist wiederum die Mißachtung der Intervallgrenzen, was dazu führt, daß das falsche Intervall richtig unterteilt wird. So markieren 5% der Schüler 4,2065 und sogar 10% 4,2265. Insgesamt sind die von uns untersuchten Schüler deutlich erfolgreicher bei der Bearbeitung dieser Fragestellungen als die von Hart (2) in England und von Hiebert/Wearne (3) in den USA untersuchten Schüler.

Die Veranschaulichung von Dezimalbrüchen an *zweidimensionalen Veranschaulichungsmitteln*, nämlich an *Quadraten*, fällt den Schülern deutlich *schwerer* als ihre Veranschaulichung am Zahlenstrahl. Dies hängt zum Teil sicher auch mit der geringeren Vertrautheit der Schüler mit diesem Veranschaulichungsmittel zusammen. Bei den ersten beiden Aufgaben ist positiv zu erwähnen, wie variationsreich die Gymnasiasten 0,4 und vor allem 0,45 von einem Quadrat dunkel färben. Immerhin 5% der Schüler färben allerdings statt 0,4 der Fläche 0,25 der Fläche dunkel. Ursache dieses Fehlers dürfte die falsche gedankliche Verbindung von 0,4 mit einem Viertel sein oder aber die Gleichsetzung $0,4 = \frac{1}{4}$ (vgl. 4.1).

In diesem Zusammenhang ist auch die folgende Fehllösung eines Schülers interessant, insbesondere der Zusammenhang zwischen 0,4 und 0,45

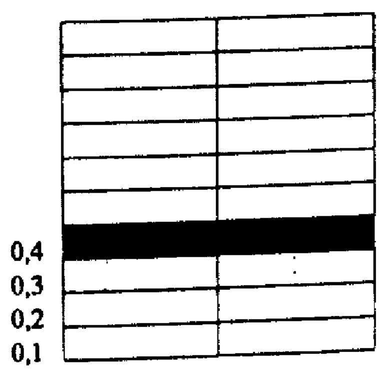


0,4



0,45

Eine häufigere Fehllösung von Aufgabe (g) ist auch 0,1. Wie sie entstehen kann, verdeutlicht die folgende Zeichnung:




Bei den Aufgaben (i) und (j), bei denen die Schüler umgekehrt angeben sollen, welcher Dezimalbruch durch die schraffierte Fläche eines Quadrates veranschaulicht wird, ist für die Schüler die Aufgabe (j) die mit Abstand schwierigste, vermutlich da hier bei der Notation als Dezimalbruch eine Null vorkommt. Fehler, die bei dieser Aufgabe auftreten, sind:

- Statt des Dezimalbruchs wird der gemeine Bruch $\frac{8}{100}$ geschrieben (8%)
- Falscher Stellenwert 0,8 (9%); 0,008 (2%)
- Gedankliche Verbindung mit einem Achtel: 0,125 (1%)

### 6. Schlußbemerkungen

Selbst *Gymnasialschüler* haben schon beim grundlegenden *Dezimalbruchbegriff deutliche Defizite*. Es kann daher nicht verwundern, daß als Folge hiervon auch die *Rechenoperationen* mit Dezimalbrüchen entsprechend mit Fehlern behaftet sind (vgl. (5)). Im Unterricht sollte daher zunächst eine *gründliche, anschauliche Einführung der Dezimalbrüche* unter starker Betonung von Stellenwerttafeln, Zahlenstrahl und Flächenmodellen erfolgen, und es sollte *nicht* vorschnell zu den Kalkülen für die vier Rechenoperationen übergegangen werden.

Bei der Einführung der Dezimalbrüche wird ferner offensichtlich zu häufig die *Analogie* zwischen natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen *überbetont*, während die *Unterschiede* nicht genügend klar herausgestellt werden. Hieraus resultieren die aufgezeigten fehlerhaften *Übergeneralisierungen*, die sich in den verschiedensten Bereichen des Tests beobachten lassen:

- falscher Bezugspunkt für die Dezimalen (letzte Stelle statt Komma) / KT–Vorstellung,
- Verwendung der Stellenwertbezeichnungen von **N** für die Dezimalen,
- fehlerhafte Übertragung der Position der Dezimalen von **N** (Zehntel stehen wie Zehner an zweiter, Hundertstel wie Hunderter an dritter Stelle usw.; „Eintel"),
- charakteristische Fehler beim Umbündeln (so werden 97 Tausender in **N** auf die Tausenderstelle und die nächste — weiter vom Komma entfernte — Stelle notiert, dagegen ist die entsprechende Notation bei 97 Tausendstel selbstverständlich falsch, jedoch ein häufiger Fehler),
- die Zusammenhänge zwischen Tausendern, Hundertern, Zehnern und Einern werden fehlerhaft auf die so ähnlich klingenden Stellenwerte Tausendstel, Hundertstel und Zehntel übertragen. (Hieraus resultiert dann beispielsweise wegen 30 H = 300 Z die Gleichsetzung von 30 h mit 300 z.)

Daher muß im Unterricht gründlich auf diese *Unterschiede* in der Stellenwertnotation von natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen eingegangen werden.

Zum Schluß noch eine Bemerkung zur *KT–Strategie*, die uns bei der Auswertung des *Gesamt*tests an vielen Stellen begegnet. Die Ursache dieser Fehlerstrategie liegt vermutlich in der Kommaschreibweise für Größen, wie sie in der Grundschule benutzt wird. Bei dieser Schreibweise dient das Komma als Trennungszeichen zwischen Größeneinheiten, so trennt es z. B. in dem Ausdruck 8,45 DM die Einheiten DM und Pf voneinander. Viele Schüler schaffen es bei der Einführung der Dezimalbrüche nicht, auf eine *andere* Sichtweise überzugehen. Denn jetzt trennt das Komma nicht mehr Einheiten, sondern es markiert den Übergang von den Einern zu den Zehnteln.

Ein unter dem Gesichtspunkt der vielen KT–Fehler wünschenswerter Verzicht auf die Kommaschreibweise beim Arbeiten mit Größen in der Grundschule dürfte allerdings nicht sinnvoll sein, da diese Kommaschreibweise für Größen den Grundschülern im Alltag ständig begegnet.

## Literaturverzeichnis


(1) Günther, K.: *Dezimalzahlen und auftretende Schülerfehler.* In: Mathematische Unterrichtspraxis, 1/1987, S. 25 – 40

(2) Hart, K.M. u. a.: *Children's Understanding of Mathematics: 11 – 16*, London 1980

(3) Hiebert, J. Wearne, D.: *A Model of students' Decimal Computation Procedures.* In: Cognition and Instruction, 1985, S. 175 – 205

(4) Padberg, F.: *Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche — Dezimalbrüche.* Mannheim 1989

(5) Padberg, F.: *Problembereiche bei der Behandlung von Dezimalbrüchen — eine empirische Untersuchung an Gymnasialschülern.* In: Der Mathematikunterricht, 2/1991, S. 39 – 69

(6) Padberg, F.: *Testaufgaben bei Dezimalbrüchen.* In: Mathematik lehren, Heft 46, Juni 1991, S. 49 – 56