

Numerische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen im Mathematikunterricht

Teil 1

Von Peter Rasfeld in Mülheim-Ruhr

1. Einleitung

Differentialgleichungen besitzen eine zentrale Bedeutung bei der Beschreibung dynamischer Prozesse etwa aus der Physik, Chemie und Biologie. Als Beispiele seien hier nur erwähnt Einschaltvorgänge in elektrischen Netzwerken, Schwingungen mechanischer Massensysteme, Planetenbewegungen, Konzentrations-Zeit-Verläufe chemischer Reaktionen und Populationsentwicklungen. Insofern bieten Differentialgleichungen vielfache Gelegenheiten zum „Mathematisieren“, einem Prinzip, dessen Rolle für den Mathematikunterricht heute unumstritten ist (vgl. [1, S. 63], [2, S. 27]).

Ein Mathematisierungsprozeß endet aber nicht damit, daß zu einer gegebenen Ausgangssituation durch Abstraktion ein mathematisches Modell (d.h. hier eine Differentialgleichung oder ein Differentialgleichungssystem) entwickelt wird. Vielmehr müssen mit Hilfe geeigneter mathematischer Verfahren aus dem Modell Schlußfolgerungen gezogen und wieder auf die Ausgangssituation übertragen werden. An ihr ist zu prüfen, ob die auf diese Weise gewonnenen Aussagen realistisch und akzeptabel sind; anderenfalls ist das Modell zu verändern oder gar zu verwerfen (vgl. dazu das Schema in [1, S. 64]).

Differentialgleichungen als mathematische Modelle dynamischer Systeme können damit in einem anwendungsorientierten Mathematikunterricht nur dann von

Bedeutung sein, wenn mit den Schülern Verfahren erarbeitet werden, mit denen sich Lösungen von Differentialgleichungen sowie Eigenschaften derselben ermitteln lassen. Auf diese Weise können Vorhersagen über das modellierte System getroffen und Einsichten in sein Verhalten unter verschiedenen Bedingungen gewonnen werden.

Nun kommt eine analytische Behandlung von Differentialgleichungen in der Sekundarstufe II wohl nur in sehr einfachen Fällen in Frage. Ganz davon abgesehen, daß sich ohnehin nur die wenigsten Differentialgleichungen in hinreichend einfacher Form geschlossen lösen lassen, und man selbst dann oftmals keine brauchbare Möglichkeit gewonnen hat, zu vorgegebenen Werten der unabhängigen Veränderlichen die der abhängigen zu berechnen (vgl. z. B. (22)), sind bekanntlich je nach Art der vorliegenden Gleichungen ganz unterschiedliche Methoden anzuwenden. Von der Vielzahl dieser Verfahren können im Unterricht aus Zeitgründen und unter Berücksichtigung der Vorkenntnisse der Schüler sicherlich nur sehr wenig erarbeitet werden. Gegen eine analytische Behandlung in einem anwendungsorientierten Unterricht spricht ferner, daß eine solche bei geringfügigen Änderungen einer Differentialgleichung sehr erschwert oder gar unmöglich gemacht werden kann. Daher lassen sich entgegen den o. a. Zielvorstellungen Differentialgleichungen hier nicht ohne weiteres verändern, beispielsweise

um zu einer der Wirklichkeit besser angepaßten Beschreibung zu gelangen.

Gerade aus dieser Perspektive bieten sich numerische Verfahren an, die von der besonderen Form einer zu lösenden Differentialgleichung weitgehend unabhängig sind. Praktikabel wird ihre Anwendung wegen des hohen Rechenaufwandes allerdings erst in Kombination mit elektronischen Digitalrechnern, die heute aber in Schulen in Form von Klein-Computern weit verbreitet sind. Mit ihrer Hilfe lassen sich auch gemäß den genannten Forderungen Parameter und Anfangswerte leicht verändern und die hierdurch bedingten Auswirkungen bei Ausgabe der Lösungen in Form von Kurven auf einem Bildschirm oder Plotter beobachten.

Daneben sind andere Wege für die Bearbeitung von Differentialgleichungen in einem anwendungsorientierten Mathematikunterricht denkbar. Insbesondere ist die „instrumentelle“ Lösung mit Hilfe des Analogrechners zu erwähnen, der an Koeffizientenpotentiometern ebenfalls ein müheloses Variieren von Anfangswerten und Parametern gestattet. Die Lösungen werden in Kurvenform mittels eines Oszilloskops sichtbar gemacht oder mittels eines t/y - bzw. x/y -Schreibers aufgezeichnet. Es ist hier jedoch nicht der Platz ausführlich auf die Vorzüge und Nachteile von Digital- und Analogrechnern einzugehen. Im Augenblick bleibt festzuhalten, daß Analogrechner nur in geringem Umfang in Schulen zum Einsatz gelangen, u. a. sicherlich wegen ihres im Vergleich zum Digitalrechner sehr begrenzten Einsatzrahmens. Von daher erscheint die Anwendung numerischer Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen mittels Digitalrechnern für den Schulunterricht naheliegender.

Was weitere Verfahren betrifft, etwa graphische oder Betrachtungen in Phasenebenen, so sei auf die Ausführungen im folgenden verwiesen. Angemerkt sei ferner, daß man Differentialgleichungen auch unter anderen Perspektiven in den

Mathematikunterricht einbeziehen kann, etwa auf rein mathematischer Ebene zur Definition von Funktionen, was ein ganz anderes Vorgehen erfordern kann.

Im Rahmen einer Behandlung von Differentialgleichungen als mathematische Modelle dynamischer Systeme erscheinen numerische Verfahren aus den genannten Gründen am geeignetsten. Hier soll gezeigt werden, wie man diese im Unterricht mit den Schülern erarbeiten kann. Ein Verständnis für solche Verfahren beinhaltet, daß z. B. geklärt wird, unter welchen Voraussetzungen diese überhaupt angewendet werden können, welche Ursachen für die auftretenden Fehler vorliegen, wie man deren Größenordnung abschätzen und wie man sie im Verlauf einer Rechnung kontrollieren kann. Daher werden auch solche Fragen im folgenden behandelt.

Nicht eingegangen werden soll dagegen auf die Umsetzung der Verfahren in Programme für digitale Rechenanlagen. Hierzu sind nur recht bescheidene Programmierkenntnisse erforderlich, so daß auch solche Schüler mitarbeiten können, die nicht das Fach Informatik gewählt haben. Wünschenswert, wenn auch ebenfalls nicht unbedingt erforderlich ist, daß die Schüler bereits numerische Kenntnisse bei anderen Gelegenheiten gewinnen konnten. Gegebenenfalls müssen Begriffe wie z. B. der der Konvergenzordnung an entsprechenden Stellen eingeführt werden.

In den folgenden Abschnitten soll beschrieben werden, wie man die Schüler mit unterschiedlich schnell konvergierenden „Einschrittverfahren“ zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung, die in der expliziten Form

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

vorliegen mögen, vertraut machen kann. Anschließend wird gezeigt, wie man solche Verfahren leicht für explizite Differentialgleichungssysteme erweitern kann. Damit läßt sich schließlich auch die Be-

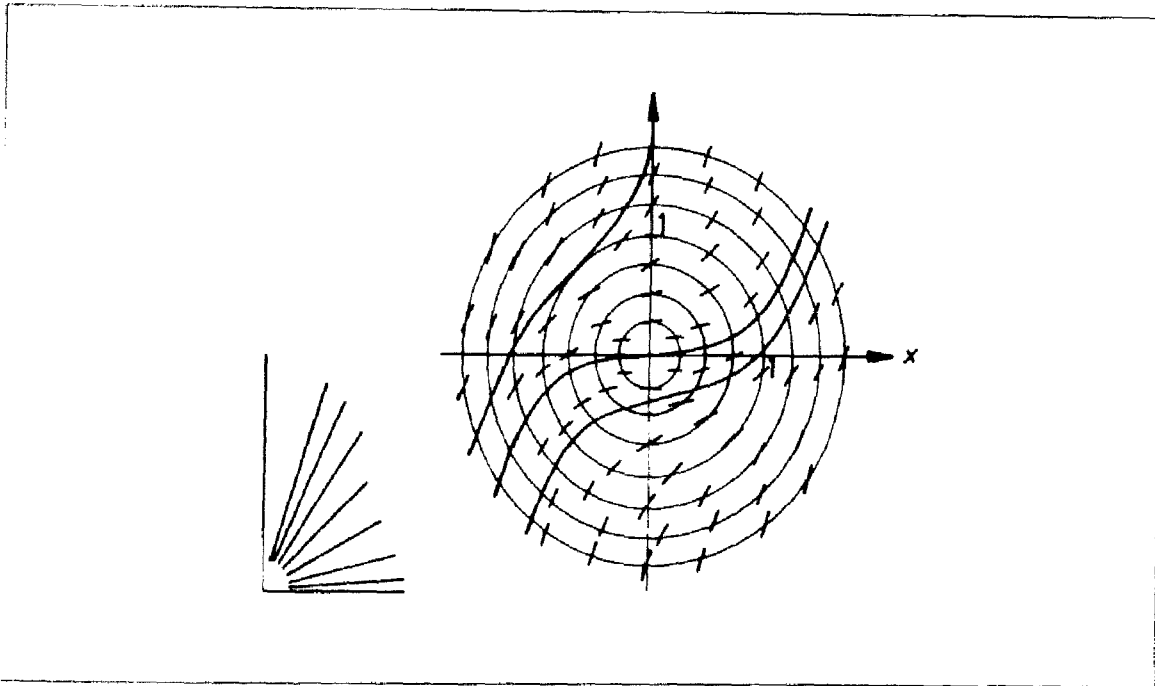


Fig. 1

arbeitung expliziter Differentialgleichungen höherer Ordnung erschließen, da sich solche in explizite Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung verwandeln lassen (vgl. die Bearbeitung von (24) sowie [3, S. 27]).

Die Anwendbarkeit dieser Verfahren stellt an die Differentialgleichungen bzw. Systeme solcher, außer daß sie in expliziter Form vorliegen müssen, einige Voraussetzungen. Insbesondere erfordert die Konvergenz der Verfahren u. a. die Erfüllung einer *Lipschitzbedingung*, worauf, wie im folgenden vorgeschlagen wird, im Zusammenhang mit graphischen Verfahren eingegangen werden kann.

2. Das Richtungsfeld als geometrisch-intuitive Interpretation einer Differentialgleichung

Durch (1) wird jedem Punkt (x, y) eines Gebietes G der x - y -Ebene, in dem f als reellwertige Funktion erklärt sei, eine Steigung y' zugeordnet. Jeder Punkt (x, y) wird auf diese Weise zu einem Linienelement (x, y, y') , deren Gesamtheit ein Richtungsfeld bildet (zum Richtungsfeld

vgl. z. B. [4, S. 382–388], detaillierte Hinweise zur Konstruktion findet man in [5, S. 361–376]).

Fig. 1 zeigt das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = x^2 + y^2$, die sich nicht elementar integrieren läßt, mit einigen, durch Polygonzüge angenäherten Lösungskurven. Für deren Konstruktionen sind die sogen. Isoklinen hilfreich, Kurven, in deren Punkten jeweils die durch (1) festgelegte Steigung konstant ist. In Fig. 1 bilden die Isoklinen konzentrische Kreise $x^2 + y^2 = c$ um den Ursprung mit den Radien $r = \sqrt{c} = \sqrt{y'}$.

Aus mehreren Gründen erscheint es ratsam, mit dem Zeichnen solcher Richtungsfelder im Unterricht zu beginnen:

- Sie liefern eine anschauliche Interpretation von (1).
- Von ihnen aus kann man zwanglos zu einem ersten numerischen Verfahren, dem *Eulerschen* Polygonzugverfahren, übergehen.
- Während ein numerisches Verfahren zu einem gegebenen Anfangswert

$$(2) \quad y(x_0) = y_0$$

näherungsweise stets nur eine spezielle (partikuläre) Lösung liefert, gewinnt man mit einem Richtungsfeld zumindest einen groben

Überblick über die allgemeine Lösung. Wann immer es notwendig erscheinen mag, kann man bei späteren Gelegenheiten auf Richtungsfelder zurückgreifen.

- Richtungsfelder zu Differentialgleichungen wie z.B. $y' = 3y^{2/3}$ (vgl. [3, S. 14 u. 51], [4, S. 386-387]) bieten sich dazu an zu „erörtern“, unter welchen Voraussetzungen es zu einem gegebenen Punkt (x, y) genau eine Lösungskurve gibt, die durch diesen Punkt verläuft.

Dies ist unter folgenden Bedingungen der Fall:

Ist die Funktion f auf einem Streifen $S = \{(x, y) | a \leq x \leq b, y \in \mathbb{R}\}$ definiert, stetig und erfüllt eine *Lipschitzbedingung* bezüglich y , d. h. gilt

$$(3) \quad |f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L |y - \bar{y}|$$

mit $L \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, $x \in [a, b]$ und $y, \bar{y} \in \mathbb{R}$, dann gibt es zu jedem $x_0 \in [a, b]$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $y = y(x)$ des Anfangswertproblems (1), (2), die im ganzen Intervall $[a, b]$ existiert (vgl. [6, S. 97 u. 98]).

Die *Lipschitzbedingung* ist insbesondere dann erfüllt, wenn f in S partiell nach y differenzierbar ist, und $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig und beschränkt ist. Von diesem Satz wird an späteren Stellen beim Nachweis der Konvergenz der Verfahren und Fehlerabschätzungen wiederholt Gebrauch gemacht.

Wenn auch Richtungsfelder eine wertvolle Hilfe bei der Erarbeitung numerischer Verfahren und ihrem anschließenden Gebrauch sein können, so ist eine alleinige Beschränkung auf solche, orientiert man sich an den eingangs genannten Leitideen, abzulehnen: Für die Unterrichtspraxis kommt wohl nur die Konstruktion von Richtungsfeldern für Differentialgleichungen 1. Ordnung in Frage, die bereits hier sehr aufwendig und zeitraubend sein kann. Variationen von Parametern zur Einsicht in das durch die betreffende Differentialgleichung modellierte System erfordern jeweils eine völ-

lige Neukonstruktion des Richtungsfeldes und sind damit kaum durchführbar.

3. Die Herleitung des Eulerschen Polygonzugverfahrens über eine graphisch motivierte Version

Vom Richtungsfeld aus läßt sich leicht die Durchführung einer graphischen Version des *Eulerschen Polygonzugverfahrens* motivieren. Ist man nicht an der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung, sondern nur an einer durch einen vorgegebenen Anfangswert festgelegten partikulären Lösung interessiert, so wird man sich auf das Zeichnen eines einzelnen Polygonzuges, der die durch den betreffenden Punkt (x_0, y_0) gehende Lösungskurve annähert, anstelle des gesamten Richtungsfeldes beschränken wollen. Nach vorangehend erfolgten Übungen zum Richtungsfeld ist es naheliegend, die Konstruktion eines solchen Polygonzuges in folgender Weise vorzunehmen:

Das in Frage kommende Intervall $[x_0, x_n]$ wird mit der Schrittweite h in zunächst n gleiche Teile zerlegt, wodurch man die Gitterpunkte $x_i = x_0 + i \cdot h$ mit $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $n > 0$ gewinnt. Da die Steigung der Tangente an die gesuchte Lösungskurve im Punkte (x_0, y_0) durch die Differentialgleichung bekannt ist, geht man von diesem Punkt aus längs der Tangenten bis zum Schnittpunkt mit der Vertikalen durch $x_1 = x_0 + h$ weiter und erhält hier die Ordinate $\eta_1 = \eta(x_1, h)$, die einen Näherungswert für den exakten Wert $y_1 = y(x_1)$ darstellt. (Im folgenden wird anstelle von $y(x_i)$ und $\eta(x_i, h)$ i. a. kurz y_i bzw. η_i geschrieben, wobei zu betonen ist, daß die Näherungswerte außer von x auch von der benutzten Schrittweite h abhängen). Durch Einsetzen von x_1 und η_1 in (1) gewinnt man die Steigung im Punkte (x_1, η_1) (die wegen $\eta_1 \approx y_1$ i. a. nur näherungsweise mit der Steigung im Punkte (x_1, y_1) übereinstimmen wird), von dem aus sich das Verfahren fortsetzen läßt.

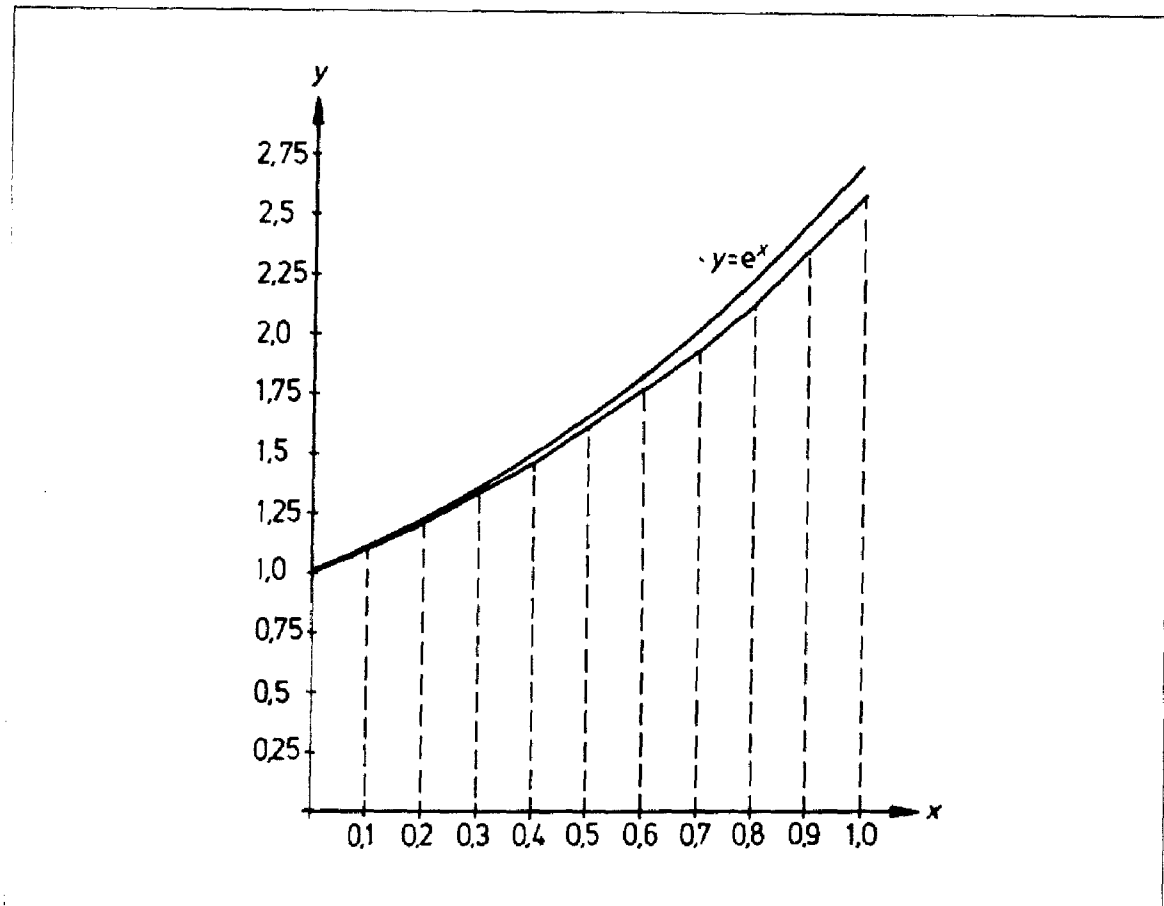


Fig. 2

Fig. 2 zeigt es für das Anfangswertproblem $y' = y$, $y(0) = 1$ bei einer Schrittweite von $h = 0,1$ im Intervall $[0, 1]$. Die exakte Lösung ist bekanntlich $y = e^x$.

Die rechnerische Formulierung des Verfahrens führt nun zu einer Rekursionsformel, zu der sich leicht ein Programm für einen Rechner schreiben läßt. Für die Steigung der Tangente durch die Punkte (x_0, y_0) und (x_1, η_1) gilt

$$\frac{\eta_1 - y_0}{x_1 - x_0} = y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Mit $\eta_0 = y_0$ und $x_1 - x_0 = h$ erhält man

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_0 + f(x_0, \eta_0)h \text{ und entsprechend} \\ \eta_2 &= \eta_1 + f(x_1, \eta_1)h \\ &\vdots \\ \eta_n &= \eta_{n-1} + f(x_{n-1}, \eta_{n-1})h. \end{aligned}$$

Dies führt zu der Rekursionsformel

$$(4) \quad \eta_{i+1} = \eta_i + f(x_i, \eta_i)h$$

mit $x_{i+1} = x_i + h = x_0 + (i+1)h$
für $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Die Herleitung von (4) aus dem Anfangswertproblem (1), (2) läßt sich auch ohne Rückgriff auf die geometrische Interpretation im Unterricht vornehmen, wenn auch dem hier beschriebenen Weg aus den o.a. didaktischen Erwägungen der Vorzug gegeben werden sollte. Eine Möglichkeit besteht darin, in (1) y' durch einen Differenzenquotienten zu ersetzen (vgl. z. B. [6, S. 101–102], [7, S. 83]). Daneben kann man (4) über die Integralgleichung (5) oder über eine Taylorentwicklung der exakten Lösung herleiten (vgl. [8, S. 342]).

Wie schon bemerkt, läßt sich das Verfahren, leicht auf einer Rechenanlage implementieren. Fig. 3 zeigt den Computerausdruck für das Anfangswertproblem $y' = y$, $y(0) = 1$ mit der exakten Lösung $y = e^x$. Es wurde hier wie im folgenden bewußt dieses ganz einfache Beispiel gewählt, da dessen exakte Lösung den Schülern sicherlich bekannt und somit Gelegenheit gegeben ist, die Güte der Näherungs-

x	NÄHERUNG	EXAKTER WERT	ABS. FEHLER	REL. FEHLER
0	1	1		
1	2.5657845	2.7182818	-0.15249733	-0.056100632
2	6.5832501	7.3890561	-0.805806	-0.10905398
3	16.891201	20.085537	-3.1943358	-0.15903662
4	43.339182	54.59815	-11.258968	-0.20621519
5	111.199	148.41316	-37.214158	-0.25074702
6	285.31267	403.42879	-118.11612	-0.29278059
7	732.05083	1096.6332	-364.58232	-0.33245605
8	1878.2847	2980.958	-1102.6733	-0.36990568
9	4819.2737	8103.0839	-3283.8102	-0.40525437
10	12365.218	22026.466	-9661.2479	-0.43861998

BENÖTIGTE ZEIT: 000011
 H= 3, H= 0.125=2⁻³
 DIFFERENTIALGLEICHUNG: Y'=Y
 ANFANGSWERT: Y(0)=1
 EXAKTE LÖSUNG: Y(X)=EXP(X)

Fig. 3

werte zu kontrollieren. Auch Numeriker selbst verfahren oft in dieser Weise. „Will man die Güte des Verfahrens testen, so ist es durchaus vernünftig, mit Beispielen zu arbeiten, die unmittelbar zu durchschauen sind, deren theoretisches Ergebnis man genau kennt, so daß die numerisch gewonnenen Resultate an den theoretischen gemessen und damit die Fehler genau angegeben werden können. Dies ist der Grund, daß allzu oft dem Außenstehenden naiv oder selbstverständlich erscheinende Beispiele als Beleg angegeben werden“ [9, S. 23].

Fig. 3 entnimmt man, daß bei einer Schrittweite von $h=2^{-3}$ bereits bei $x=1$ ein prozentualer Fehler von rund 5,6% auftritt, der zunehmend größer wird und bei $x=10$ schon etwa 43,9% beträgt. Die Näherungswerte weichen bei wiederholter Anwendung des Verfahrens immer stärker von den exakten Werten ab (vgl. auch Fig. 2) und werden schnell völlig unbrauchbar. Erneute Anwendungen des Eulerschen Polygonzugverfahrens mit kleineren Schrittweiten liefern geringere Fehlerwerte (h darf allerdings nicht beliebig klein gewählt werden; vgl. Ausführungen zu Fig. 5).

Im Unterricht kann dies zum Anlaß genommen werden zu erörtern, wie diese Fehler zustande kommen, wie man deren

Größenordnung abschätzen kann, und ob das Verfahren konvergiert, d.h. ob für $h \rightarrow 0$ an einer festen Stelle x_i die Näherungswerte $\eta(x_i, h)$ gegen die exakte Lösung $y(x_i)$ streben.

4. Fehlerquellen

Zunächst ist festzustellen, daß zwei Arten von Fehlern vorkommen, Verfahrensfehler und Rundungsfehler. Letztere treten prinzipiell bei Berechnungen mit Digitalrechnern auf und sind kein spezifisches Problem bei numerischen Behandlungen von Differentialgleichungen, weshalb hier nur die Verfahrensfehler genauer beschrieben werden sollen. Soweit nicht in Zusammenhang mit anderen numerischen Problemen bereits geschehen, ist im Unterricht natürlich auch auf die Rundungsfehlerproblematik einzugehen (vgl. z.B. [10, S. 4 bis 8]). Bei Abschätzungen für Verfahrensfehler im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß in den durchzuführenden Rechnungen keine Rundungsfehler auftreten.

Die Differenz $E(x_n, h) = \eta_n - y_n$ zwischen dem durch n -malige Anwendung eines Verfahrens (also hier dem Eulerschen Polygonzugverfahren) berechneten Näherungswert η_n und dem exakten Wert y_n der Lösung des Anfangswertproblems (1),

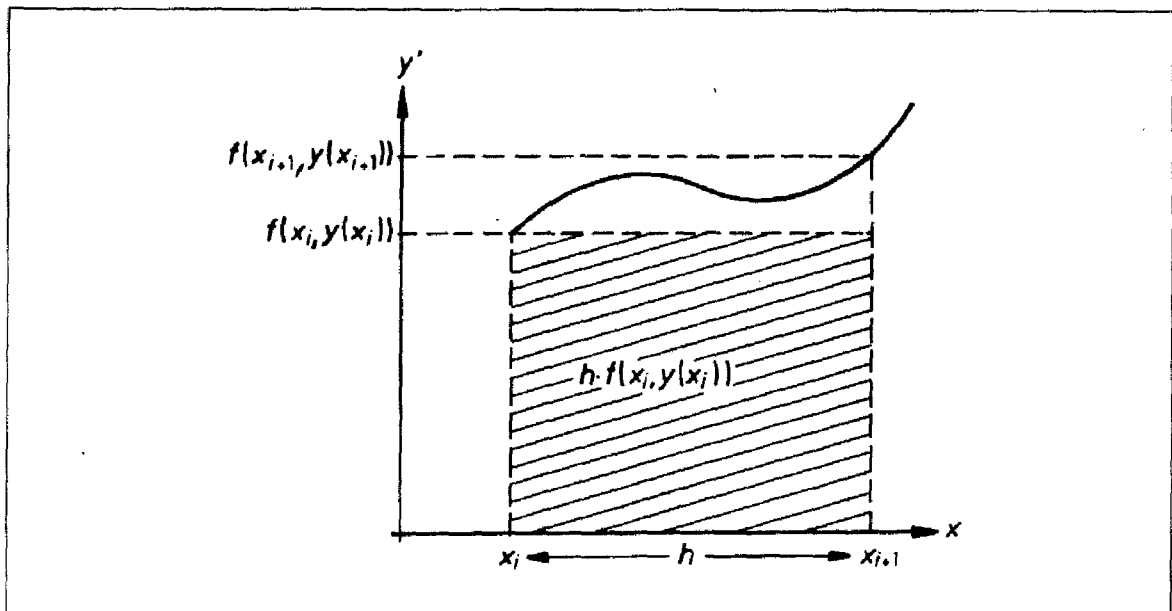


Fig. 4

(2) an der Stelle x_n bezeichnet man als globalen Fehler. Er hat folgende Ursachen:

Ist $y = y(x)$ eine Lösung des Anfangswertproblems (1), (2), so gilt für alle x aus dem Definitionsbereich dieser Funktion

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

Hieraus gewinnt man durch Integration die äquivalente Integralgleichung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

und für den exakten Wert $y(x_{i+1})$

$$(5) \quad y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Ein Vergleich von (5) mit (4) zeigt, daß das Integral beim *Eulerschen* Polygonzugverfahren nach der Rechteckmethode approximiert wird (vgl. Fig. 4, [4, S. 389-391], [8, S. 341-342]).

Der Quadraturfehler, der bei Berechnung von $y(x_{i+1})$ von dem in Fig. 4 exakt vorgegebenen Wert $y(x_i)$ aus hervorgerufen wird, geht in die nachfolgenden Berechnungsschritte ein. Von x_{i+1} an weicht nicht nur die berechnete Ordinate η_{i+1} von dem exakten Wert y_{i+1} ab, sondern wegen der y -Abhängigkeit der Funktion f

in (1) auch die berechnete Steigung im Punkt (x_{i+1}, η_{i+1}) von dem exakten Wert der Steigung der Funktion $y = y(x)$ im Punkte (x_{i+1}, y_{i+1}) . Dies kann dazu führen, daß die Näherungswerte immer stärker von den wahren Werten abweichen, wie das bei der Exponentialfunktion zu beobachten ist (vgl. auch Fig. 2 u. 3).

5. Konvergenz des *Eulerschen* Polygonzugverfahrens und Fehlerabschätzungen

Der im folgenden beschriebene Weg zum Nachweis der Konvergenz des *Euler-Verfahrens* sowie zur Fehlerabschätzung ist recht anspruchsvoll. Bei fehlenden Vorkenntnissen der Schüler kann man gegebenenfalls hierauf verzichten und stattdessen empirisch vorgehen, wie dies im Anschluß gezeigt wird.

Es wird vorausgesetzt, daß f der Bedingung (3) genügt und daß die damit existierende Lösungsfunktion $y = y(x)$ des Anfangswertproblems (1), (2) in dem interessierenden Intervall $a \leq x \leq b$ zweimal stetig differenzierbar sei.

Als lokalen Fehler $\varepsilon(x_{i+1}, h)$ an der Stelle x_{i+1} bezeichnet man den Fehler, der durch einmalige Anwendung eines Ver-

fahrens (hier dem *Euler-Verfahren*) von dem exakten Anfangswert (x_i, y_i) aus bei der Schrittweite h hervorgerufen wird $(x_i, x_{i+1} \in [a, b]$; vgl. Fig. 4). Um diesen zunächst abzuschätzen, bestimmt man y_{i+1} mit Hilfe des *Taylorpolynoms* der Ordnung 1 zu $y = y(x)$ an der Stelle x_i :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2} y''(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)^2$$

mit $x_i < \xi_i < x_{i+1}$.

Mit $x_{i+1} - x_i = h$ und $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$ erhält man

$$(6) \quad y(x_{i+1}) = y(x_i) + h f(x_i, y_i) + \frac{1}{2} h^2 y''(\xi_i).$$

Wendet man das *Eulersche Polygonzugverfahren* von dem exakt vorgegebenen Punkt (x_i, y_i) aus an, so erhält man

$$(7) \quad \eta_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i).$$

Aus (6) und (7) gewinnt man

$$\varepsilon(x_{i+1}, h) = \eta_{i+1} - y(x_{i+1}) = -\frac{1}{2} h^2 y''(\xi_i), \quad x_i < \xi_i < x_{i+1}.$$

Nach den oben gemachten Annahmen ist $y''(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt, also $|y''(x)| \leq M$ und mit $\frac{1}{2} M = c$ wird

$$(8) \quad |\varepsilon(x_{i+1}, h)| \leq c \cdot h^2.$$

Nunmehr ist es möglich, den Betrag des globalen Fehlers an einer Stelle x_n , abzuschätzen (vgl. [7, S. 92-93]). Für $E(x_i, h)$ und $\varepsilon(x_i, h)$ wird abkürzend E_i und ε_i geschrieben.

Es ist $|E_{j+1}| = |\eta_{j+1} - y_{j+1}| = |y_{j+1} - \eta_{j+1}|$, und es sei $\bar{\eta}_{j+1}$ ein durch einmalige Anwendung des *Euler-Verfahrens* von der exakten Stelle (x_j, y_j) aus berechneter Näherungswert an der Stelle x_{j+1} mit

$$\bar{\eta}_{j+1} = y_j + h f(x_j, y_j).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} |E_{j+1}| &= |y_{j+1} - \bar{\eta}_{j+1} + \bar{\eta}_{j+1} - \eta_{j+1}| \\ &= |y_{j+1} - \bar{\eta}_{j+1} + y_j + h f(x_j, y_j) - \eta_j - h f(x_j, \eta_j)| \\ &= |(y_{j+1} - \bar{\eta}_{j+1}) + (y_j - \eta_j) + h(f(x_j, y_j) - f(x_j, \eta_j))| \\ &\leq |\varepsilon_{j+1}| + |E_j| + |h(f(x_j, y_j) - f(x_j, \eta_j))|. \end{aligned}$$

Da f , wie gefordert, der Bedingung (3) genügen soll, gilt

$$|f(x_j, y_j) - f(x_j, \eta_j)| \leq L |y_j - \eta_j| = L |E_j| \text{ mit } L \in \mathbb{R}^{\geq 0}.$$

Damit ist

$$|E_{j+1}| \leq |\varepsilon_{j+1}| + |E_j| + h L |E_j| = |E_j|(1 + hL) + |\varepsilon_{j+1}|.$$

Mit (8) erhält man

$$|E_{j+1}| \leq |E_j|(1 + hL) + ch^2.$$

Ist $E_0 = 0$, so gilt

$$|E_1| \leq ch^2,$$

$$|E_2| \leq |E_1|(1 + hL) + ch^2$$

$$\leq ch^2(1 + hL) + ch^2$$

$$= ch^2[1 + (1 + hL)],$$

$$|E_3| \leq |E_2|(1 + hL) + ch^2$$

$$\leq ch^2[1 + (1 + hL)](1 + hL) + ch^2$$

$$= ch^2[(1 + hL) + (1 + hL)^2] + ch^2$$

$$= ch^2[1 + (1 + hL) + (1 + hL)^2]$$

Mittels vollständiger Induktion folgert man

$$(9) \quad |E_n| \leq ch^2[1 + (1 + hL) + (1 + hL)^2 + \dots + (1 + hL)^{n-1}].$$

Ist $L = 0$, so erhält man $|E_n| \leq ch^2 n = chnh$ und mit $rh = x_n - x_0$ wird

$$(10) \quad |E_n| \leq ch(x_n - x_0).$$

Für $L > 0$ wird, da der Term auf der rechten Seite in (9) eine geometrische Reihe darstellt,

$$\begin{aligned} |E_n| &\leq ch^2 \cdot \frac{(1 + hL)^n - 1}{(1 + hL) - 1} \\ &= ch \cdot \frac{(1 + hL)^n - 1}{L}. \end{aligned}$$

Mit $(1 + hL)^n \leq e^{nhL}$ erhält man schließlich

$$(11) \quad |E_n| \leq ch \cdot \frac{e^{nhL} - 1}{L} = ch \cdot \frac{e^{(x_n - x_0)L} - 1}{L}.$$

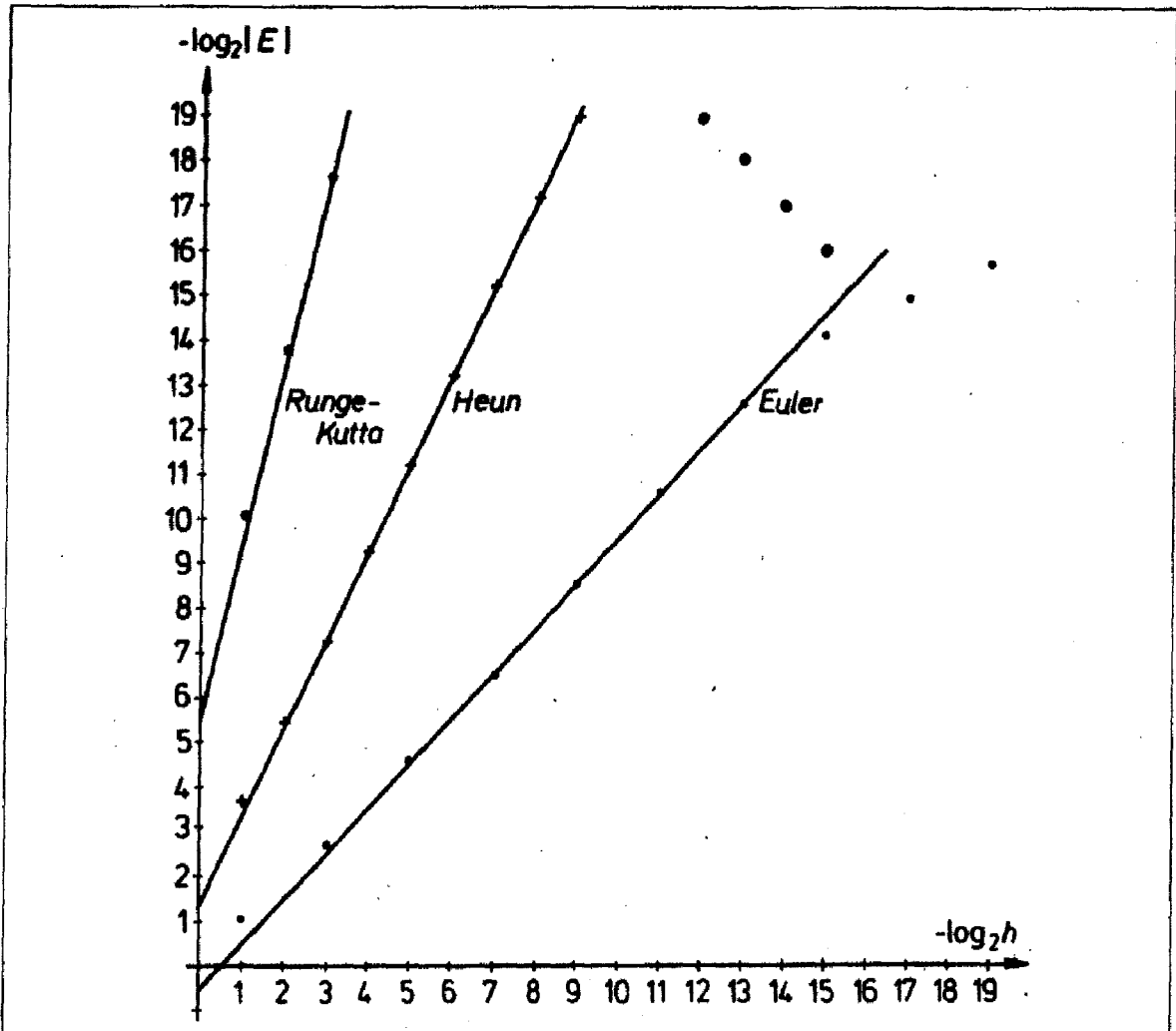
(10) und (11) entnimmt man, daß unter den genannten Voraussetzungen für einen festen Punkt x_n der globale Fehler mit h gegen 0 geht und das *Euler-Verfahren* damit konvergiert.

Prinzipiell ließen sich mit diesen beiden Ungleichungen obere Schranken für den Betrag des globalen Fehlers bestimmen. Für Fehlerabschätzungen in der Praxis

i	h	NAEHERUNG	ABS. FEHLER
1	0.5	2.25	-0.46828183
3	0.125	2.5657845	-0.15249733
5	0.03125	2.6769901	-0.04129173
7	.78124999E-02	2.7077389	-0.010542886
9	.1953125E-02	2.7156317	-.26501128E-02
11	.48828124E-03	2.7176175	-.66436175E-03
13	.12207031E-03	2.718112	-.16986299E-03
15	.30517578E-04	2.7182245	-.57308935E-04
17	.76293944E-05	2.7182495	-.32301061E-04
19	.19073486E-05	2.7182434	-.38456172E-04

Fig. 5

Fig. 6



sind solche aber zu grob und die damit verbundenen Rechnungen zu aufwendig.

So hat man zur Abschätzung von $c \max |y''(x)|$ in $[a, b]$ zu bestimmen (oder, falls $y = y(x)$ nicht bekannt ist, wegen

$$y''(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) \cdot y'(x) \\ = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) \cdot f(x, y(x))$$

Schranken für die Beträge von f, f_x, f_y in

$[a, b]$), sowie zur Abschätzung von $L \max \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|$.

Wendet man (11) auf das Anfangswertproblem $y' = y$ mit $y(0) = 1$ an der Stelle $x = 1$ und der Schrittweite $h = 2^{-3}$ an, so ergibt sich folgende Situation: Mit $\max |y''(x)| = c$ wird $c = \frac{1}{2}e$ und wegen

$\max \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| = 1$ werde $L = 1$ gesetzt. Mit-

hin ist $|E_n| \leq \frac{1}{2} \cdot 0,125(e-1) \approx 0,29192339$. Tatsächlich ist der Betrag des Fehlers (einschließlich Rundungsfehler) aber $0,15249733$ (vgl. Fig. 3), die angegebene Schranke also fast doppelt so groß.

Aus diesen Gründen versucht man, den jeweiligen Fehler im Verlaufe einer Rechnung nicht über (10) bzw. (11), sondern auf andere Weise zu kontrollieren, worauf im weiteren noch eingegangen wird. Für die Anwendung des *Eulerschen* Polygonzugverfahrens im Unterricht ist die Herleitung von (10) und (11) daher nicht unbedingt erforderlich. Bei fehlenden Vorkenntnissen der Schüler kann man sich, wie schon gesagt, darauf beschränken, die Konvergenz empirisch zu verifizieren.

Fig. 5 zeigt mit Hilfe des *Euler-Verfahrens* berechnete Näherungslösungen des Anfangswertproblems $y' = y$, $y(0) = 1$ an der Stelle $x = 1$ für Schrittweiten von $h = 2^{-n}$, $n = 1, 3, 5, \dots, 19$. Verwendet wurde ein Rechner mit 15stelliger Genauigkeit.

Der Betrag des globalen Fehlers nimmt mit kleiner werdendem h erwartungsgemäß zunächst ab, ist aber bei $h = 2^{-19}$ wieder größer als bei $h = 2^{-17}$. Grund dafür ist, daß mit kleiner werdendem h immer mehr Rechenschritte durchzuführen sind, wodurch die Rundungsfehler (die in die o.a. Betrachtung ja nicht einbezogen worden sind) immer stärker ins Gewicht fallen und schließlich den Verfahrensfehler überwuchern.

Einen guten Überblick über das Verhalten des globalen Fehlers bei veränderlicher Schrittweite h gewinnt man mit einer graphischen Darstellung. In Fig. 6 ist allerdings nicht $|E|$ gegen h aufgetragen worden, sondern, da sich die Werte beider Größen über mehrere Zehnerpotenzen erstrecken, die negativen Logarithmen derselben. Bequemerweise sind die Logarithmen zur Basis 2 gewählt worden,

da alle h -Werte Potenzen von 2 sind (vgl. auch [7, S. 84-86].

Fig. 6 entnimmt man, daß im Intervall $5 \leq -\log_2 h \leq 13$ die Punkte ziemlich genau auf einer Geraden mit der Steigung 1 liegen, für die näherungsweise gilt

$$-\log_2 |E| \approx -0,55 - 1 \cdot \log_2 h \text{ und damit } |E| \approx 1,5h.$$

Der Betrag des globalen Fehlers nimmt hier also annähernd proportional zu h ab.

6. Das Verfahren von Heun

Auf dem hier beschriebenen Weg ist es im Unterricht naheliegend, das *Eulersche* Polygonzugverfahren zu verbessern, indem man zur Verringerung des Quadraturfehlers anstelle der rohen Rechtecksummen z. B. die Trapezregel heranzieht. Mit dieser erhält man

$$(12) \quad \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{f(x_i, \eta_i) + f(x_{i+1}, \eta_{i+1})}{2} \cdot h$$

Der unbekannte Wert η_{i+1} tritt auch auf der rechten Seite in (12) als einer der Argumente von f auf. Da eine Auflösung der Gleichung nach η_{i+1} in der Regel nicht möglich ist, bietet sich an, zunächst mit Hilfe des *Euler-Verfahrens* einen ersten Näherungswert $\hat{\eta}_{i+1} = \eta_i + h f(x_i, \eta_i)$ abzuschätzen und unter Verwendung dieses Wertes anstelle von η_{i+1} auf der rechten Seite in (12) einen verbesserten Näherungswert η_{i+1} zu bestimmen. Auf diese Weise gewinnt man

$$(13) \quad \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{f(x_i, \eta_i) + f(x_{i+1}, \eta_i + h f(x_i, \eta_i))}{2} \cdot h$$

mit $x_{i+1} = x_i + h = x_0 + (i+1)h$ für $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Um zu zeigen, daß (13), auch als Verfahren von *Heun* oder als *Prädiktor-Korrektur-Methode* bezeichnet, eine wirkliche Verbesserung gegenüber dem *Eulerschen* Polygonzugverfahrens liefert, kann man eine Schranke für den lokalen Fehler her-

leiten und mit der des *Euler*-Verfahrens vergleichen. Unter den schon bei der Herleitung von (8) gemachten Voraussetzungen sowie der zusätzlichen Annahme, daß $y = y(x)$ in dem fraglichen Intervall dreimal stetig differenzierbar sei, läßt sich zeigen, daß das *Heun*-Verfahren mit der *Taylor*-entwicklung der exakten Lösung bis zum Glied 2. Ordnung übereinstimmt und der lokale Fehler mit einer um 1 größeren Potenz von h gegen Null geht als beim *Euler*-Verfahren (vgl. z. B. [8, S. 355]). Eine Halbierung der Schrittweite führt daher beim *Eulerschen* Polygonzugverfahren zu einer Reduzierung der Schranke des lokalen Fehlers um den Faktor $\frac{1}{4}$, beim *Heun*-Verfahren dagegen um den Faktor $\frac{1}{8}$.

Der globale Fehler des *Heun*-Verfahrens kann analog zu dem des *Euler*-Verfahrens ermittelt werden, wobei sich zeigt, daß dieser mit h^2 gegen Null geht.

Die Fehlerabschätzungen beim *Heun*-Verfahren sind allerdings schwieriger als beim *Euler*-Verfahren (es werden u. a. partielle Differentiation und *Taylor*-reihenentwicklungen von Funktionen zweier Veränderliche benötigt), so daß, wenn schon dort, hier erst recht fraglich ist, ob sie im Unterricht behandelt werden können.

Möglich ist es dagegen, das Verhalten des globalen Fehlers für $h \rightarrow 0$ wieder empirisch z. B. im Zusammenhang mit dem Anfangswertproblem $y' = y$, $y(0) = 1$ zu untersuchen. Die graphische Darstellung hierzu in Fig. 6 zeigt eine Gerade mit der Steigung 2. Es ist

$$-\log_2 |E| \approx 1,32 - 2 \log_2 h \text{ und damit} \\ |E| \approx 0,40 h^2.$$

Der Betrag des globalen Fehlers nimmt hier also annähernd proportional zu h^2 ab.

Literatur

- [1] *Burscheid, J.*: Beiträge zur Anwendung der Mathematik im Unterricht. *ZDM* 12 (1980), Heft 2, S. 63 ff.
- [2] *Biehler, R.*: Zur Rolle der Anwendungen der Mathematik in Mathematikdidaktik und Mathematikunterricht in der BRD – Ein Bericht über Literatur, Projekte und Konzeptionen. *ZDM* 13 (1981), Heft 1, S. 22–31.
- [3] *Erwe, F.*: Gewöhnliche Differentialgleichungen. B.I., Mannheim 1964.
- [4] *Zurmühl, R.*: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Springer, Berlin 1965.
- [5] *Willers, F. A.*: Methoden der praktischen Analysis. de Gruyter, Berlin 1971.
- [6] *Stoer, J./R. Bulirsch*: Einführung in die numerische Mathematik II. Springer, Berlin 1973.
- [7] *Werner, H. u.a.*: Probleme der praktischen Mathematik II. B.I., Mannheim 1980.
- [8] *Boyce, W. E./R. C. Di Prima*: Elementary Differential Equations. Wiley & Sons, New York 1977.
- [9] *Werner, H.*: Zur Methodologie der Numerik. In: Numerische Mathematik in der Sek. II. Curriculum Heft 28. Landesinstitut für Curriculumentwicklung, Lehrerfortbildung u. Weiterbildung, Neuss 1982, S. 22–65.
- [10] *Stoer, J.*: Einführung in die numerische Mathematik I. Springer, Berlin 1972.
- [11] *Scheid, F.*: Numerische Analysis. Theorie und Anwendungen. McGraw-Hill, Düsseldorf 1979.
- [12] *Engel, A.*: Anwendungen der Analysis zur Konstruktion math. Modelle. *MU* 17 (1971), Heft 3, S. 5–56.
- [13] *Manogg, P.*: Die Räuber-Beute-Wechselbeziehung als Beispiel für numerische Modelluntersuchungen. *MNU* 31 (1978), Heft 3, S. 143–147.
- [14] *Dürr, R./J. Ziegenbalg*: Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung durch Differenzgleichungen. Verlag Schöningh, Paderborn 1984.
- [15] *Kroll, W.*: Integration numerischer Methoden in den Unterricht. 3 Teile. *PM* 26 (1984) 225–234, 270–280, 308–311.

Anschrift des Verfassers:

Dr. Peter Rasfeld, An den Buchen 43, 4330 Mülheim-Ruhr