

struktionen anzufertigen waren, konnten außer den herkömmlichen Zeichengeräten auch die Rechner eingesetzt werden. Bei den Konstruktionsproblemen (vorwiegend Dreiecks-Konstruktionen) wurden zunächst anhand einer Planfigur erste Überlegungen über die Reihenfolge der Konstruktions-Schritte angestellt. Das Programm wurde dann in Gruppenarbeit direkt an den Rechnern entwickelt.

Die hohe Motivation, mit der die Schüler an den Rechnern arbeiteten, ließ auch nach mehreren Wochen kaum nach. Der Umgang mit der Konstrukt-Sprache war

ihnen nach einiger Zeit so vertraut, daß sie in der Lage waren, auch ohne Kontrolle durch den Rechner Konstruktions-Programme auf dem Papier zu schreiben. So konnten auch in den Hausaufgaben und selbst in einer Klassenarbeit Konstrukt-Programme geschrieben werden.

Literatur

- [1] Vorläufige Richtlinien für das Gymnasium - Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen. Köln 1984.
- [2] *Senfileben, D.:* Programmieren mit Logo. Würzburg 1983.

Anschrift des Verfassers:

StR Gerhard Taake, Josef-Schröder-Str. 67, 4790 Paderborn

Numerische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen im Mathematikunterricht

Teil 2

Von Peter Rasfeld in Mülheim-Ruhr

7. Das klassische Runge-Kutta-Verfahren

Wie bereits ausgeführt, stimmt das Euler-Verfahren mit der Taylorentwicklung der exakten Lösung bis zum Gliede erster Ordnung, das Heun-Verfahren bis zu demjenigen zweiter Ordnung überein, weshalb man auch von Näherungsverfahren erster bzw. zweiter Ordnung spricht. Das klassische Runge-Kutta-Verfahren ist ein Näherungsverfahren vierter Ordnung, bei dem das Integral von (5) nach der Simpson-Regel approximiert wird (vgl. Ausführungen im folgenden). Da es sich nicht in so einfacher Weise aus dieser entwickeln läßt, wie z. B. das Heun-Ver-

fahren aus der Trapezregel, und die Simpson-Regel im übrigen den Schülern i. a. nicht vertraut sein dürfte, wird hier folgender Weg zu einer Erarbeitung vorgeschlagen:

Das Euler-Verfahren (4) läßt sich in der Form

$$(14) \quad k_{i1} = f(x_i, \eta_i) \quad \text{mit} \\ \eta_{i+1} = \eta_i + h k_{i1} \quad \text{schreiben,}$$

das Heun-Verfahren (13) in der Form

$$(15) \quad k_{i1} = f(x_i, \eta_i) \\ k_{i2} = f(x_i + h, \eta_i + h k_{i1}) \quad \text{mit} \\ \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{1}{2} h (k_{i1} + k_{i2}).$$

Zum klassischen *Runge-Kutta*-Verfahren gelangt man, indem man diese Formelsysteme in folgender Weise weiter ausbaut:

$$(16) \quad \begin{aligned} k_{i1} &= f(x_i, \eta_i) \\ k_{i2} &= f(x_i + \frac{1}{2}h, \eta_i + h \cdot \frac{1}{2}k_{i1}) \\ k_{i3} &= f(x_i + \frac{1}{2}h, \eta_i + h \cdot \frac{1}{2}k_{i2}) \\ k_{i4} &= f(x_i + h, \eta_i + h \cdot k_{i3}) \end{aligned}$$

mit $\eta_{i+1} = \eta_i + \frac{1}{6}h(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4})$

Sind *Taylorreihenentwicklungen* von Funktionen zweier Veränderlicher bekannt, kann man (16), ausgehend von (14) und (15), im Unterricht herleiten (vgl. z. B. [5, S. 378–380] und [11, S. 202–203]). Ansonsten muß man sich darauf beschränken, (16), nachdem man es auf die beschriebene Weise entwickelt hat, etwa wie folgt in seinem Aufbau zu erläutern (vgl. auch [8, S. 359]):

Die k_i sind Näherungswerte für die Steigungen des Graphen der Funktion mit $y = y(x)$ an den Stellen $x_i, x_i + \frac{1}{2}h$ bzw. $x_i + h$. Der Wert k_{i1} , der sich mittels des zuvor berechneten Näherungswertes η_i (bzw. am Beginn mittels des Anfangswertes $\eta_0 = y(x_0)$) ergibt, repräsentiert die Steigung des Graphen an der Stelle x_i . Ferner ist k_{i2} ein Näherungswert für die Steigung des Graphen an der Stelle $x_i + \frac{1}{2}h$, der sich durch Anwendung des *Euler*-Verfahrens von (x_i, η_i) aus mit der Schrittweite $\frac{1}{2}h$ ergibt. Ein weiterer Näherungswert für die Steigung bei $x_i + \frac{1}{2}h$ ist k_{i3} , den man auf gleiche Weise wie k_{i2} , aber unter Verwendung der zuvor berechneten Steigung k_{i2} selbst, bestimmt. Schließlich ist k_{i4} ein Näherungswert für die Steigung des Graphen an der Stelle $x_i + h$, der durch Anwendung des *Euler*-Verfahrens vom Punkte (x_i, η_i) aus mit der Schrittweite h und dem zuvor ermittelten Steigungswert k_{i3} berechnet wird. Den Näherungswert η_{i+1} an der Stelle $x_i + h$ bestimmt man nunmehr, indem man von (x_i, η_i) aus längs der Geraden, deren Steigung durch $\frac{1}{6}(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4})$ fest-

gelegt ist, bis zum Schnittpunkt mit der Vertikalen durch $x_i + h$ fortschreitet.

Analog zum *Euler*-Verfahren läßt sich zeigen, daß der lokale Fehler beim *Runge-Kutta*-Verfahren mit der fünften Potenz von h gegen Null geht. Die Rechnungen sind natürlich umfangreicher und die bereits in Zusammenhang mit dem *Heun*-Verfahren genannten Schwierigkeiten bestehen hier in gleicher Weise, weshalb man auf sie ebenfalls u. U. verzichten muß. Wenn den Schülern die *Simpson*-Regel bekannt ist, läßt sich immerhin noch folgende Betrachtung anstellen:

Ist f von y unabhängig, so wird aus (5)

$$y(x_i + 1) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_i+1} f(t) dt$$

und aus (16)

$$\begin{aligned} k_{i1} &= f(x_i) \\ k_{i2} &= f(x_i + \frac{1}{2}h) \\ k_{i3} &= f(x_i + \frac{1}{2}h) \\ k_{i4} &= f(x_i + h) \end{aligned}$$

mit

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \frac{1}{6}h(f(x_i) + 4f(x_i + \frac{1}{2}h) + f(x_i + h)).$$

Dies zeigt, daß im Fall der gewöhnlichen Quadratur die *Runge-Kutta*-Formeln in die *Simpson*-Regel übergehen, bei der der Fehler von der Ordnung h^5 ist (womit natürlich noch nicht gesagt ist, daß dies damit auch für (16) gelten muß).

Der globale Fehler läßt sich gegebenenfalls auf dieselbe Weise wie beim *Euler*-Verfahren abschätzen, wobei sich zeigt, daß dieser mit der vierten Potenz von h gegen Null geht. Auf jeden Fall kann man diese Abhängigkeit an einem Beispiel wie $y' = y$ mit $y(0) = 1$ demonstrieren. Fig. 6 (Heft 5, S. 289) zeigt hierzu eine Gerade mit der Steigung 4. Es ist

$$-\log_2 |E| \approx 5,5 - 4 \log_2 h \quad \text{und damit} \\ |E| \approx 0,02 h^4$$

Das Anfangswertproblem $y' = y$, $y(0) = 1$ läßt sich ferner dazu heranziehen, die Güte des *Runge-Kutta*-Verfahrens im Vergleich zum *Euler*-Verfahren zu verdeutlichen. Berechnet man nach dem *Runge-Kutta*-Verfahren einen Näherungswert $\eta(x_i, h)$ an der Stelle $x = 1$ bei einer Schrittweite von $h = 2^{-1}$, so erhält man $\eta_{R.K.}(1, 2^{-1}) = 2,7173462$. Bei dieser Bestimmung sind 2 Schritte des Verfahrens durchzuführen mit insgesamt 8 Berechnungen von $f(x, y)$. Der erzielte Näherungswert ist besser als diejenigen, die man nach dem *Heun*-Verfahren bei einer Schrittweite von $h = 2^{-4}$ bzw. nach dem *Euler*-Verfahren bei $h = 2^{-9}$ erhält (vgl. Fig. 3; $\eta_{Heun}(1, 2^{-4}) = 2,7165935$, $\eta_{Euler}(1, 2^{-9}) = 2,7156317$). Dabei sind beim *Heun*-Verfahren 16 Schritte mit insgesamt 32 Berechnungen von $f(x, y)$ durchzuführen, beim *Euler*-Verfahren 512 Schritte mit 512 Berechnungen von $f(x, y)$.

8. Kontrolle des Fehlers im Verlauf einer Rechnung

In Kap. 5 ist in Zusammenhang mit dem *Euler*-Verfahren ausgeführt worden, daß die beschriebenen Fehlerabschätzungen für die Praxis zu aufwendig und zu grob sind. Man versucht deshalb vielfach, den Fehler im Verlauf einer Rechnung auf anderem Wege zu kontrollieren, was im folgenden beispielhaft am *Runge-Kutta*-Verfahren in einer für Unterrichtszwecke geeigneten Weise dargestellt werden soll.

Wie erläutert, stimmt das *Runge-Kutta*-Verfahren mit der *Taylor*-Entwicklung der exakten Lösung bis einschließlich zum Glied 4. Ordnung überein. Für die zu beschreibende Fehlerkontrolle wird vorausgesetzt, daß die Schrittweite h so klein gewählt ist, daß selbst bei Gebrauch der Schrittweite $2h$ noch die Fehlerglieder höherer h -Potenzen gegenüber dem ersten Fehlerglied mit h^5 vernachlässigbar sind.

Der lokale Fehler beim *Runge-Kutta*-Verfahren ist annähernd proportional zu h^5 . Berechnet man einen Näherungswert,

ausgehend von x_i an der Stelle $x_i + 2h$ durch zweimalige Anwendung des *Runge-Kutta*-Verfahrens mit der Schrittweite h , so beträgt der Fehler beim 1. Schritt $c_1 \cdot h^5$ und beim 2. Schritt $c_2 \cdot h^5$. Bestimmt man dagegen, ausgehend von x_i , einen Näherungswert bei $x_i + 2h$ durch einmalige Anwendung mit der Schrittweite $2h$, so beträgt der Fehler $c^* \cdot (2h)^5$. Bei kleinem h kann man nach [5, S. 381] mit ausreichender Genauigkeit $c_1 = c_2 = c^* = \bar{c}$ setzen. Im 1. Fall beträgt der Fehler nach 2 Schritten ungefähr $2\bar{c}h^5$ und es ist

$$(17) \quad \eta(x_i + 2h, h) \approx y(x_i + 2h) + 2\bar{c}h^5.$$

Dagegen erhält man im 2. Fall

$$\eta(x_i + 2h, 2h) \approx y(x_i + 2h) + 32\bar{c}h^5.$$

Damit ist

$$\eta(x_i + 2h, 2h) - \eta(x_i + 2h, h) \approx 30\bar{c}h^5 \text{ oder}$$

$$(18) \quad \frac{1}{15}(\eta(x_i + 2h, 2h) - \eta(x_i + 2h, h)) \approx 2\bar{c}h^5.$$

Mithin beträgt der Fehler im 1. Fall etwa $\frac{1}{15}$ der Differenz der Näherungswerte aus der Rechnung mit doppelter und einfacher Schrittweite. Nach Wahl einer Fehlertoleranz e (z. B. eine Einheit der letzten als gesichert vorgeschriebenen Stelle) läßt sich mit

$$\delta(x_i + 2h) = \left| \frac{\eta(x_i + 2h, 2h) - \eta(x_i + 2h, h)}{15} \right|$$

nach [4, S. 425] die Schrittweite in folgender Weise steuern:

- Falls $0,15e < \delta(x_i + 2h) < 10e$,
 Schrittweite h beibehalten,
 falls $\delta(x_i + 2h) \geq 10e$,
 (19) Rechnung mit halber Schrittweite wiederholen,
 falls $\delta(x_i + 2h) \leq 0,15e$,
 Rechnung mit doppelter Schrittweite fortsetzen.

Einsetzen von (18) in (17) führt schließlich zu einer verbesserten Näherungslösung an der Stelle $x_i + 2h$ mit

X	NAEHERUNG	EXAKTER WERT	ABS. FEHLER	REL. FEHLER
0	1	1		
1	2.717947	2.7182818	-.33478718E-03	-.12316132E-03
2	7.3881071	7.3890561	-.94896369E-03	-.12842827E-03
3	20.082852	20.085537	-.26853085E-02	-.13369364E-03
4	54.59084	54.59815	-.73102415E-02	-.13389174E-03
5	148.39326	148.41316	-.019901335	-.13409414E-03
6	403.37462	403.42879	-.054177403	-.13429236E-03
7	1096.4859	1096.6332	-.14728594	-.13430739E-03
8	2980.5576	2980.958	-.40040493	-.13432089E-03
9	8101.9954	8103.0839	-1.0885353	-.13433593E-03
10	22023.507	22026.466	-2.9591446	-.13434496E-03

SENDETIGTE ZEIT: 000205
 SCHRITTWEITE AM ANFANG: A= 1, H= 0,5
 SCHRITTWEITE AM ENDE: A= 5, H= 0.03125
 KRITISCHER WERT E FUER VERGLEICH: .1E-03
 DIFFERENTIALGLEICHUNG: Y'=Y
 ANFANGSWERT: Y(0)=1
 EXAKTE LOESUNG: Y(X)=EXP(X)

Fig. 7

$$(20) \quad \begin{aligned} y(x_i + 2h) &\approx \eta^*(x_i + 2h) \\ &= \eta(x_i + 2h, h) \\ &\quad - \frac{1}{15}(\eta(x_i + 2h, h) \\ &\quad - \eta(x_i + 2h, 2h)) \end{aligned}$$

Fig. 7 zeigt nach dem Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweitensteuerung und Korrektur berechnete Näherungslösungen des Anfangswertproblems $y' = y$, $y(0) = 1$. Man sieht, daß der prozentuale Fehler während der gesamten Rechnung unter 0,135% bleibt, während er beim einfachen Euler-Verfahren mit der konstanten Schrittweite $h = 0,125$ auf fast 43,9% anwächst (vgl. Fig. 3).

9. Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung

Das Runge-Kutta-Verfahren läßt sich im Unterricht problemlos auf Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung ausweiten. Für ein System von 2 Differentialgleichungen (die unabhängige Veränderliche wird im folgenden mit t bezeichnet)

$$x' = f(t, x, y) \quad y' = g(t, x, y)$$

mit den Anfangswerten $x(t_0) = x_0$ und $y(t_0) = y_0$ lautet es z. B.

$$\begin{aligned} k_{11} &= f(t_i, \eta_i, \gamma_i), \quad l_{11} = g(t_i, \eta_i, \gamma_i), \\ k_{12} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, \eta_i + h \cdot \frac{1}{2}k_{11}, \gamma_i + h \cdot \frac{1}{2}l_{11}), \\ l_{12} &= g(t_i + \frac{1}{2}h, \eta_i + h \cdot \frac{1}{2}k_{11}, \gamma_i + h \cdot \frac{1}{2}l_{11}), \\ k_{13} &= f(t_i + \frac{1}{2}h, \eta_i + h \cdot \frac{1}{2}k_{11}, \gamma_i + h \cdot \frac{1}{2}l_{11}), \\ l_{13} &= g(t_i + \frac{1}{2}h, \eta_i + h \cdot \frac{1}{2}k_{11}, \gamma_i + h \cdot \frac{1}{2}l_{11}), \\ k_{14} &= f(t_i + h, \eta_i + h \cdot k_{13}, \gamma_i + h \cdot l_{13}), \\ l_{14} &= g(t_i + h, \eta_i + h \cdot k_{13}, \gamma_i + h \cdot l_{13}), \\ \eta_{i+1} &= \eta_i + \frac{1}{6}h(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14}), \\ \gamma_{i+1} &= \gamma_i + \frac{1}{6}h(l_{11} + 2l_{12} + 2l_{13} + l_{14}) \end{aligned}$$

mit den Näherungswerten η_{i+1} , γ_{i+1} für die exakten Werte $x(t_{i+1})$, $y(t_{i+1})$ und $t_{i+1} = t_i + h = t_0 + (i+1)h$ für $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Der Fehler bei wiederholter Anwendung des Verfahrens läßt sich wieder durch Rechnung mit einfacher und doppelter Schrittweite beobachten. Als Kontrolle zur Schrittweitensteuerung verwendet man in (19) anstelle von $\delta(x_i + 2h)$ hier $\delta = \max(|\delta_\eta(t_i + 2h)|, |\delta_\gamma(t_i + 2h)|)$ mit

$$\delta_\eta(t_i + 2h) = \left| \frac{\eta(t_i + 2h, 2h) - \eta(t_i + 2h, h)}{15} \right|$$

und

$$\delta_\gamma(t_i + 2h) = \left| \frac{\gamma(t_i + 2h, 2h) - \gamma(t_i + 2h, h)}{15} \right|$$

Analog zu (20) lassen sich als verbesserte Näherungswerte

$$\eta^*(t_i + 2h) = \eta(t_i + 2h) - \frac{\eta(t_i + 2h, h) - \eta(t_i + 2h, 2h)}{15}$$

T	X	Y
0	7	4
1	3.499528	4.9911585
2	1.4896743	4.9081795
3	0.68498961	4.3465305
4	0.45227392	3.7175554
5	0.40405031	3.1470971
6	0.469725	2.6662565
7	0.67795464	2.2826982
8	1.1548598	2.006056
9	2.1869337	1.8677663
10	4.2146271	1.9600847

BENÖTIGTE ZEIT:000113
 KRITISCHER WERT FUER VERGLEICH: .1E-03
 DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEM: X'=1.6*X-0.5*X*X
 Y'=-0.2*Y+0.08*X*Y
 ANFANGSWERTE: X(0)=7, Y(0)=4

▲ Fig. 8

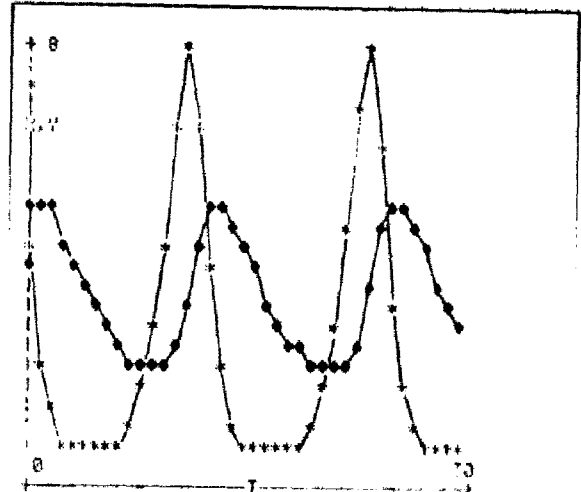


Fig. 9 ▶

○○○X=F(T), ●●●Y=F(T)
 DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEM: X'=1.6*X-0.5*X*X
 Y'=-0.2*Y+0.08*X*Y
 ANFANGSWERTE: X(0)=7, Y(0)=4

$$y^*(t_i + 2h) = y(t_i + 2h) - \frac{y(t_i + 2h, h) - y(t_i + 2h, 2h)}{15}$$

heranziehen (vgl. [4, S. 435]).

Von den Funktionen f und g sei wiederum gefordert, daß sie der Bedingung (3) genügen, wobei die Lipschitzbedingung für beide Funktionen bezüglich x und y erfüllt sein muß. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn f und g in S partiell nach x und y differenzierbar und die partiellen Ableitungen stetig und beschränkt sind.

Beispielhaft seien hier Anfangswertprobleme der Form

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy \quad \frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

mit $x(t_0) = x_0$ und $y(t_0) = y_0$ betrachtet, die u. a. in der Biologie zur Beschreibung einfacher Räuber-Beute-Systeme (*Lotka-Volterra*) herangezogen werden (vgl. z. B. [12, S. 38–41]). Sie lassen sich nicht geschlossen lösen, so daß man letztlich auf numerische Methoden angewiesen ist. Als Spezialfall soll

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1,6x - 0,5xy \\ \frac{dy}{dt} &= -0,2y + 0,08xy \end{aligned}$$

mit $x(0) = 7$ und $y(0) = 4$ untersucht werden.

Fig. 8 zeigt den Computerausdruck und Fig. 9 die zugehörige, mittels eines Matrixdruckers hergestellte graphische Darstellung. Mit Hilfe eines Plotters, der leider nicht zur Verfügung stand, könnten die Kurven eindrucksvoller und genauer aufgezeichnet werden. Deutlich ablesbar sind dennoch deren Periodizität und Phasendifferenz.

Die Trajektorien in der Phasenebene bilden demgemäß geschlossene Kurven um den Gleichgewichtspunkt (Wirbelpunkt) $(2,5, 3,2)$, dessen Koordinaten sich leicht aus (21) unter Berücksichtigung von $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ ergeben (ein zweiter Gleichgewichtspunkt (Sattelpunkt) ist $(0, 0)$). Fig. 10 zeigt zwei Trajektorien zu den Anfangswerten $x(0) = 7, y(0) = 4$ und $x(0) = 4, y(0) = 3$.

Zu Phasendiagrammen sei an dieser Stelle gesagt, daß sie ein nützliches Instrument sind, um Eigenschaften von Lösungen aufzuspüren, und insofern als ergänzende Maßnahme zu numerischen Verfahren durchaus ihren Wert haben, etwa um numerische Ergebnisse hinsichtlich der Erfüllung solcher Eigenschaften

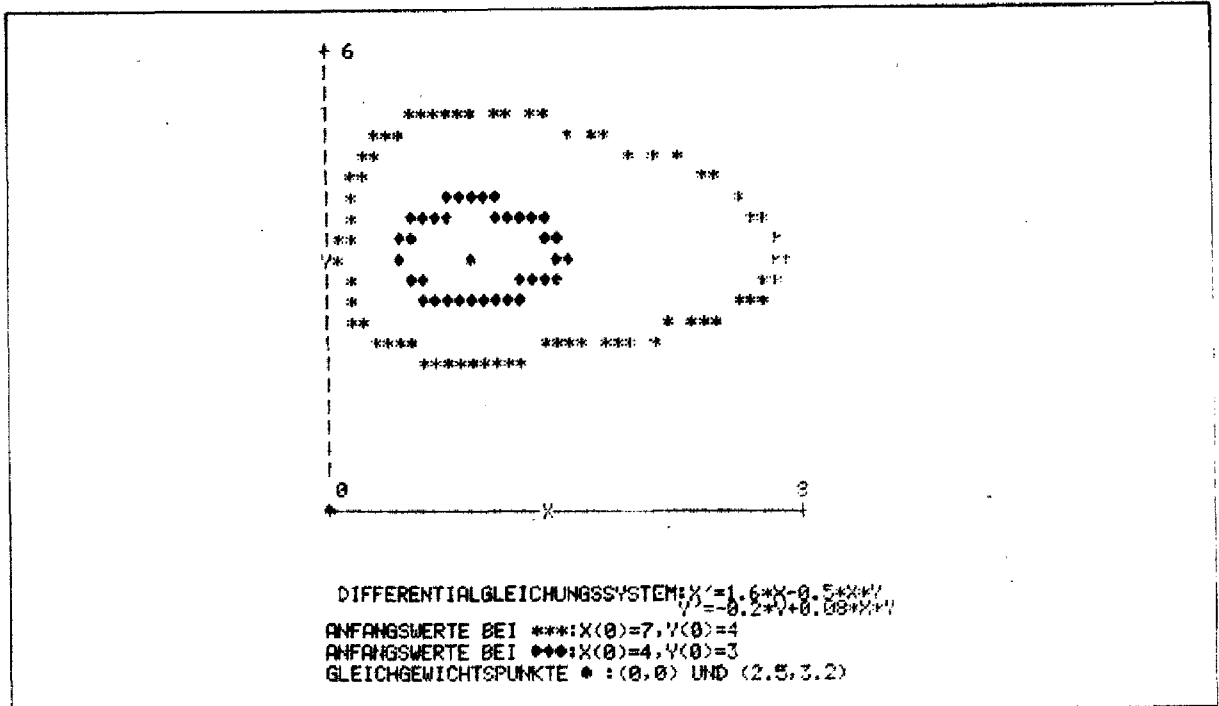


Fig. 10

zu überprüfen. Für quantitative Betrachtungen, beispielsweise um Vorhersagen über den Zustand eines Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt zu treffen, sind jedoch numerische Methoden i. a. unersetzlich.

So ergibt sich die Gleichung der Trajektorien in dem behandelten Beispiel aus (21) durch Elimination von t und anschließender Trennung der Variablen zu

$$(22) \frac{y^{1.6} \cdot x^{0.2}}{e^{0.08x} \cdot e^{0.5y}} = K$$

Sofern eine solche Rechnung im Unterricht überhaupt durchführbar ist, liefert (22) dennoch keine unmittelbare Möglichkeit zur Konstruktion der Kurven. Andererseits lassen sich aus (22) leicht eine Reihe von Aussagen über ihren Verlauf gewinnen, z. B. ihre Geschlossenheit (vgl. [12, S. 40], [13, S. 144-146]). Die unter Verwendung der numerischen Ergebnisse erzeugten Trajektorien können dann bezüglich solcher Aussagen überprüft werden.

Natürlich bietet (22) auch die Möglichkeit zur Kontrolle der Güte der Rechnung. Aus der Anfangsbedingung

$x(0)=7, y(0)=4$ erhält man als Wert für die Integrationskonstante $K \approx 1,0483872$. Einsetzen der beiden Näherungswerte an der Stelle $t=10$ (s. Fig. 8) in (22) liefert dagegen 1,0483889 und damit eine Abweichung von lediglich $1,7 \cdot 10^{-6}$.

10. Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wie bereits in der Einleitung ausgeführt, läßt sich jede explizite Differentialgleichung höherer Ordnung in ein explizites System von Differentialgleichungen 1. Ordnung um- und damit auf die unter 9. beschriebene Weise behandeln. Dies soll exemplarisch an Hand der homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(23) y'' + py' + qy = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $p, q \in \mathbb{R}$ dargestellt werden, deren analytische Behandlung selbst in Leistungskursen in der Regel nicht möglich sein wird, die aber andererseits von besonderer Bedeutung in Zusammenhang mit Schwingungsvorgängen in der Physik sind.

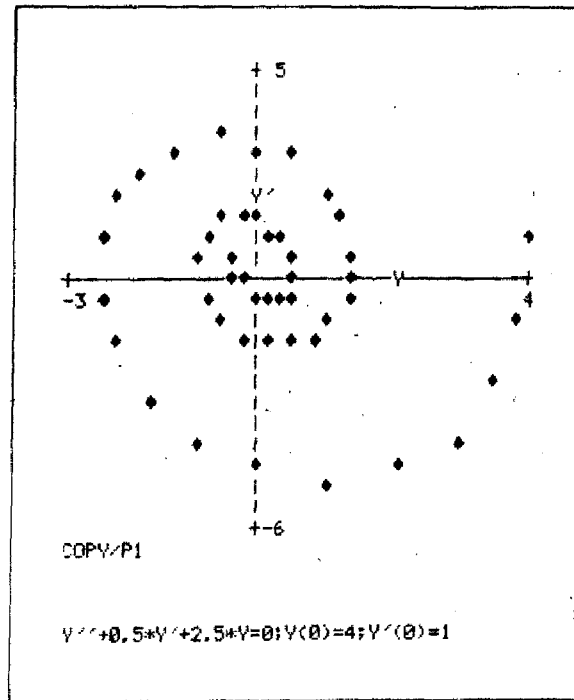
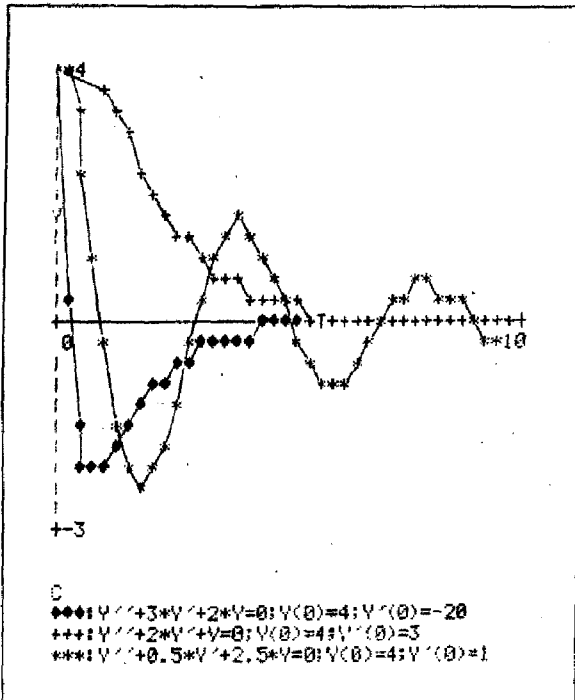
T	NAEHERUNG	EXAKTE LOESUNG	ABS.FEHLER	REL.FEHLER
0	4			
1	1.0273579	1.0273578	.33527613E-07	.32634795E-07
2	-2.4108462	-2.4108459	-.25052577E-06	.10391613E-06
3	-0.65897051	-0.65897313	.26265625E-05	-.39850415E-05
4	1.4524639	1.4524531	.10804273E-04	.74386384E-05
5	0.4212691	0.42128528	-.16177772E-04	-.38400989E-04
6	-0.87492756	-0.87469283	-.23472426E-03	.2683505E-03
7	-0.26850842	-0.26852906	.20637643E-04	-.76854411E-04
8	0.52681617	0.52653501	.28115977E-03	.53398114E-03
9	0.17068567	0.17070065	-.14974037E-04	-.87721034E-04
10	-0.31707619	-0.31682132	-.25406841E-03	.80445474E-03

BENOETIGTE ZEIT: 000131
 DIFFERENTIALGLEICHUNG: $Y'' + 0.5*Y' + 2.5*Y = 0$
 ANFANGSWERTE: $Y(0) = 4, Y'(0) = 1$
 EXAKTE LOESUNG:
 $Y = 4*EXP(-0.25*T)*COS(0.25*SQR(39)*T) + (8/39)*SQR(39)*EXP(-0.25*T)*$
 $SIN(0.25*SQR(39)*T)$
 KRITISCHER WERT E: .1E-03

▲ Fig. 11

▼ Fig. 12

▼ Fig. 13



Als Beispiel soll das Anfangswertproblem

$$(24) \quad y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{5}{2}y = 0 \quad \text{mit} \\ y'(0) = 1, \quad y(0) = 4$$

untersucht werden, das als exakte Lösung

$$y(t) = 4e^{-\frac{1}{4}t} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{39}t\right) + \frac{8}{39}\sqrt{39}e^{-\frac{1}{4}t} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{39}t\right)$$

besitzt, was hier der Vollständigkeit halber erwähnt sei. Durch die Substitution $y' = x$ läßt sich (24) überführen in das Differentialgleichungssystem

$$y' = x \quad x' = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}y \\ \text{mit } x(0) = 1, \quad y(0) = 4.$$

Fig. 11 zeigt den Computerausdruck und Fig. 12 die graphische Darstellung im kartesischen Koordinatensystem. Bei dem Graphen von $y = y(t)$ handelt es sich

um eine Wellenlinie mit exponentiell abnehmender Amplitude, einer sogen. gedämpften Schwingung. Die Phasenkurve in Fig. 13 zeigt spiralförmigen Verlauf und ist zum Nullpunkt hin orientiert. Man sagt, der Nullpunkt als Strudel- punkt ist asymptotisch stabil.

Im Unterricht könnte man hieran anschließend untersuchen, wie sich Veränderungen der Anfangswerte und der Parameter p und q auf den Funktionsverlauf auswirken. Bei alleiniger Variation von p in (24) erhält man z. B. im Falle $p=0$ eine ungedämpfte, im Falle $p<0$ eine angefachte Schwingung. Desweiteren läßt sich etwa die besondere Bedeutung des Terms

$$(25) T(p, q) = \frac{1}{4}p^2 - q$$

demonstrieren, der bei (24) einen negativen Wert annimmt. Bei dem Anfangswertproblem $y'' + 3y' + 2y = 0$ mit $y'(0) = -20$, $y(0) = 4$ ist dagegen z. B. $T(p, q) > 0$. Der Graph der Lösungsfunktion, deren Gleichung übrigens $y(t) = 16e^{-2t} - 12e^{-t}$ lautet, ist ebenfalls in Fig. 12 dargestellt. Man sieht, daß sich in diesem Fall der Graph, evtl. wie hier nach Durchlaufen eines Minimums (oder Maximums) asymptotisch der t -Achse nähert. Physikalisch gesehen tritt also kein oszillierendes Abklingen mehr auf, sondern eine Kriechbewegung; man spricht von einem aperiodischen Vorgang. Das Anfangswertproblem $y'' + 2y' + y = 0$ mit $y'(0) = 3$, $y(0) = 4$ mit der exakten Lösung $y(t) = (4 + 7t)e^{-t}$ ist schließlich ein Beispiel für den Fall $T(p, q) = 0$, den man als aperiodischen Grenzfall bezeichnet. Der

Graph der Lösung ist ebenfalls in Fig. 12 enthalten.

Dem mit der Materie vertrauten Leser wird im übrigen bekannt sein, worauf abschließend hingewiesen sei, daß (25) die Diskriminante der sog. charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

ist, auf die man bei der Bestimmung der Lösungen von (23) über den Ansatz $y = e^{\lambda t}$ trifft.

11. Schlußbemerkungen

Zum Abschluß sei betont, daß sich im Rahmen eines solchen Artikels das gestellte Thema nicht erschöpfend behandeln läßt. Vieles konnte lediglich angedeutet, manches, wie etwa Stabilitätsfragen, überhaupt nicht angesprochen werden. Festzuhalten bleibt, daß durch das Vordringen elektronischer Digitalrechner im Unterricht heute ein breites Spektrum von Problemen, die auf Differentialgleichungen führen, angegangen werden kann, obwohl deren analytische Behandlung, soweit sie überhaupt durchführbar ist, meist an den Voraussetzungen der Schüler scheitert. In [14] wird gezeigt, daß sich solche z. T. sogar schon im Mittelstufenunterricht mit den dort zur Verfügung stehenden Kenntnissen ansprechen lassen, wenn man für diese unmittelbar Beschreibungen mittels Differenzgleichungen sucht, die durch eine von Beginn an eingeschlagene diskretisierende Betrachtungsweise gewonnen werden.

Anschrift des Verfassers:

Dr. Peter Rasfeld, An den Buchen 43, 4330 Mülheim/Ruhr

Das Verhältnis der heutigen Schüler und Studenten zur Informationstechnik entspricht dem des Analphabeten vor 300 Jahren: So wie dieser zwar wußte, daß es Bücher gab – die damals fast ausschließlich von Gelehrten, Priestern, Militärs und Herrschern genutzt wurden, aber für ihn selbst unerreichbar waren –, so steht der mittlere Bürger der Industrienationen heute der Informationstechnik gegenüber: beeindruckt, besorgt, interessiert – aber letztlich unwissend.

aus: K. Haefner, Die neue Bildungskrise, Basel 1982, S. 19.