Nichtsymmetrische sechsdimensionale Liesche Gruppen

Von *Detlev Poguntke* in Bielefeld

Einleitung. Eine Banachsche Algebra $\mathscr{A}$ mit isometrischer Involution $a \to a^*$ heißt symmetrisch, wenn das Spektrum $\operatorname{Sp} a^* a$ für jedes $a \in \mathscr{A}$ im Intervall $[0, \infty)$ gelegen ist. Nach einem Satz von Shirali und Ford, vgl. [2], ist dies äquivalent zu $\operatorname{Sp} b \subseteqq R$ für alle $b \in \mathscr{A}$ mit $b = b^*$. Eine lokalkompakte Gruppe G heißt nun (nicht)symmetrisch, wenn die Banachsche Algebra $L^1(G)$ (nicht)symmetrisch ist. Entsprechend heißt eine Liesche Algebra (nicht)symmetrisch, wenn die zugehörige einfachzusammenhängende Liesche Gruppe (nicht)symmetrisch ist. Mit dem Problem der Charakterisierung symmetrischer Gruppen haben sich verschiedene Autoren befaßt, eine Zusammenstellung der Ergebnisse findet man in [11] und [8]. Es gab einige recht allgemeine Vermutungen, die sich sämtlich als falsch herausgestellt haben. So ist es gerechtfertigt, weiteres Beispielmaterial zu sammeln, was in dieser Arbeit geschehen soll. Genauer gesagt, es wird eine (bis auf ein einfaches, rein algebraisches Erweiterungsproblem) vollständige Liste aller auflösbaren nichtsymmetrischen Lieschen Algebren bis zur Dimension 6 gegeben. Auf den auflösbaren Fall kann man sich aus dem folgenden Grunde beschränken. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liesche Algebra mit $\dim \mathfrak{g} \leqq 6$ und $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$ eine Levi-Zerlegung von $\mathfrak{g}$. Ist der halbeinfache Teil $\mathfrak{s}$ kompakt, so ist $\mathfrak{g}$ nach Theorem 1 in [8] symmetrisch (man beachte, daß $\mathfrak{r}$ wegen $\dim \mathfrak{r} \leqq 3$ symmetrisch ist, vgl. [8]). Ist aber $\mathfrak{s}$ nicht kompakt, so ist $\mathfrak{g}$ nach [3] nichtsymmetrisch. Man kann nun natürlich diese $\mathfrak{g}$'s klassifizieren, aber das ist für unsere Zwecke uninteressant. Im ersten Paragraphen wird neben der Zusammenstellung bereits bekannter Ergebnisse über Symmetrie ein neuer Satz bewiesen für Gruppen, welche die Heisenberg-Gruppe als Normalteiler enthalten. Diese Voraussetzung mutet recht speziell an, doch wird sich dieser Satz im folgenden als sehr nützlich erweisen. Im zweiten Paragraphen werden die erwähnte Liste eingeführt und das Hauptergebnis formuliert. Im dritten Paragraphen zeigen wir, daß die Mitglieder der Liste sämtlich nichtsymmetrisch sind. Im vierten Paragraphen schließlich wird bewiesen, daß alle nicht in der Liste aufgeführten auflösbaren Lieschen Algebren tatsächlich symmetrisch sind. Bemerkenswert ist dabei vor allem, daß die bekannten hinreichenden Kriterien für Symmetrie ausreichen, um diesen Beweis zu führen.

1. Hier werden die im folgenden verwendeten Ergebnisse (verschiedener Autoren) über (Nicht-)Symmetrie lokalkompakter Gruppen zusammengestellt; darüber hinaus wird ein neuer Satz (nämlich Satz 1) bewiesen, der für Gruppen der Dimension $\leqq 6$ zahlreiche Anwendungen gestattet.

0075-4102/79/0306-0010$02.00

(A) (vgl. [9] und [4]). *Es sei* $\mathfrak{g}$ *eine Liesche Algebra. Sind für jedes* $e \in \mathfrak{g}$ *sämtliche Eigenwerte von* $\mathrm{ad}(e): \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *rein-imaginär, so ist* $\mathfrak{g}$ *symmetrisch.*

(B) (vgl. [8]). *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Liesche Algebra und* $\mathfrak{a}$ *ein kommutatives Ideal in* $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *sei symmetrisch. Dann ist* $\mathfrak{g}$ *symmetrisch, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(1) $\dim \mathfrak{a} = 1$; $\mathfrak{a}$ *ist zentral in* $\mathfrak{g}$, *und es gibt ein zweidimensionales Ideal* $\mathfrak{b} \lhd \mathfrak{g}$, $\mathfrak{b} \supseteqq \mathfrak{a}$, *derart, daß* $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ *zentral in* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *ist und daß der Zentralisator von* $\mathfrak{b}$ *in* $\mathfrak{g}$ *symmetrisch ist.*

(2) $\dim \mathfrak{a} = 1$; $\mathfrak{a}$ *ist nicht zentral in* $\mathfrak{g}$, *und der Zentralisator von* $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{g}$ *ist symmetrisch.*

(3) $\dim \mathfrak{a} = 2$; *es gibt eine Basis* x, y *von* $\mathfrak{a}$ *und Linearformen* $\varphi, \psi \in \mathfrak{g}^*$, $\varphi \neq 0$, *mit* $[e, x] = \varphi(e)x - \psi(e)y$ *und* $[e, y] = \varphi(e)y + \psi(e)x$ *für alle* $e \in \mathfrak{g}$, *und der Kern von* φ *ist symmetrisch.*

(C) (vgl. [8]). *Seien G und H lokalkompakte Gruppen, und es sei eine stetige Wirkung* $G \times H \to H$, $(g, x) \mapsto x^g \in H$, *von G auf H mit* $(xg)^g = x^g y^g$, $(x^g)^h = x^{gh}$ *und* $x^e = x$ *gegeben. Die Modularfunktion* Δ *dieser Wirkung (d.h.* $d(x^g) = \Delta(g)dx$ *für ein linksinvariantes Maß* dx *auf H) sei nicht trivial. Weiter sei* $\mathcal{Q}$ *eine Unteralgebra von* $C_\chi(H)$ *mit den in Theorem* 4 *von* [8] *angegebenen Eigenschaften. Für* $g \in G$ *und* $u \in \mathcal{Q}$ *sei* $u \circ g: H \to \mathbb{C}$ *definiert durch* $(u \circ g)(x) = u(x^{g^{-1}})$. *Für jedes* $g \in G$ *sei* $u \mapsto u \circ g$ *ein isometrischer Isomorphismus von* $\mathcal{Q}$, *und* $g \mapsto u \circ g$ *sei für jedes* $u \in \mathcal{Q}$ *eine stetige Abbildung von G in* $\mathcal{Q}$. *Dann wird die verallgemeinerte* L^1*-Algebra (vgl. dazu* [5]) $\mathscr{A} = L^1(H, \mathcal{Q})$ *durch* $f^g(x) = \Delta(g)^{-1} f(x^{g^{-1}}) \circ g$ *zu einer G-Algebra, und die verallgemeinerte* L^1*-Algebra* $L^1(G, \mathscr{A})$ *ist nichtsymmetrisch.*

(D) **Folgerung** (aus (A) und (B)). *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine auflösbare, nichtsymmetrische Liesche Algebra. Dann ist* $\mathfrak{g}'$ *nicht kommutativ.*

Beweis. Nehmen wir an, (D) sei falsch. Es sei $\mathfrak{g}$ ein Gegenbeispiel minimaler Dimension. Dann sind alle echten Quotienten und alle echten Unteralgebren symmetrisch, da sie ja ebenfalls kommutative Ableitungen besitzen. Da $\mathfrak{g}$ nichtsymmetrisch ist, hat die Wirkung von $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ auf $\mathfrak{g}'$ nach (A) nicht nur rein-imaginäre Eigenwerte. Es gibt folglich ein nicht-zentrales eindimensionales Ideal (dann ist $\mathfrak{g}$ nach (B), (2) symmetrisch) oder ein zweidimensionales Ideal $\mathfrak{a}$, eine Basis x, y von $\mathfrak{a}$ und von Null verschiedene Linearformen $\varphi, \psi \in \mathfrak{g}^*$ mit $[e, x] = \varphi(e)x - \psi(e)y$ und $[e, y] = \varphi(e)y + \psi(e)x$. Dann ist aber $\mathfrak{g}$ nach (B), (3) symmetrisch. Widerspruch.

(E) *Es sei* $\mathfrak{g}$ *eine nichtsymmetrische Liesche Algebra, alle echten Quotienten von* $\mathfrak{g}$ *seien symmetrisch. Dann ist die Dimension des Zentrums von* $\mathfrak{g}$ *höchstens gleich* 1.

Beweis. Klar, siehe dazu auch [6], [7] und [12].

Als nächstes wollen wir eine lokalkompakte Gruppe G auf Symmetrie untersuchen, von der Folgendes vorausgesetzt sei: G enthält einen zur dreidimensionalen Heisenberg-Gruppe isomorphen Normalteiler N, das Zentrum Z von N sei zentral in G, und N enthalte einen zweidimensionalen Normalteiler A von G. Für einen (unitären) Charakter χ von Z sei $L^1(G)_{\bar{\chi}}$ die involutive Banachsche Algebra aller meßbaren Funktionen $f: G \to \mathbb{C}$ mit $f(xz) = \bar{\chi}(z) f(x)$ $(x \in G, z \in Z)$, für welche $|f|$ über G/Z integrierbar ist; $L^1(G)_{\bar{\chi}}$ ist isomorph zu einem Quotienten von $L^1(G)$ (vgl. auch [12]). Weiter ist $L^1(G)$ dann und nur dann symmetrisch, wenn $L^1(G)_{\bar{\chi}}$ für alle χ symmetrisch ist (vgl. [6], [12]). Insbesondere ist also $\mathscr{L} = L^1(G)_{\bar{\chi}}$ für nicht-triviale χ auf Symmetrie zu untersuchen. Die adjungierte Algebra $\mathscr{L}^b$ (vgl. [5]) von $\mathscr{L}$ enthält $L^1(N)_{\bar{\chi}}$, welches entsprechend zu $L^1(G)_{\bar{\chi}}$ definiert ist. Weiter ist $L^1(N)_{\bar{\chi}}$ isomorph zu $L^1(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}))$ und enthält („viele") minimale Idempotente p mit $0 \neq p = p^* = p^2$ und $p\, L^1(N)_{\bar{\chi}} p = \mathbb{C}p$. Auf Grund des Lemmas in [12] ist $\mathscr{L}$ dann und nur dann symmetrisch, wenn $p\mathscr{L}p$ für ein solches p (und dann auch für alle, da die $p\mathscr{L}p$'s sämtlich zueinander isomorph sind) symmetrisch ist. In dem folgenden Satz wird $p\mathscr{L}p$ unter den angegebenen Voraussetzungen „berechnet". Bei gegebenem $\chi \neq 1$ wählen wir nun Koordinaten für N derart, daß gilt:

$$N = \{[x, y, z] \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}, \quad A = \{[0, y, z] \mid y, z \in \mathbb{R}\},$$

$$Z = \{[0, 0, z] \mid z \in \mathbb{R}\}, \quad \chi([0, 0, z]) = e^{iz}$$

und

$$[x, y, z]\,[x', y', z'] = [x + x', y + y', z + z' - x'y] .$$

Weiter seien $x, y : \mathbb{R} \to N$ definiert durch $x(t) = [t, 0, 0]$ und $y(t) = [0, t, 0]$, und es seien $X = \{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $Y = \{y(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Wegen der Voraussetzungen an G gibt es stetige Abbildungen $\tau, \sigma, \omega : G \to \mathbb{R}$ und einen stetigen Homomorphismus $\delta : G \to \mathbb{R}^\times$ mit

$$g[x, y, z]g^{-1} = \left[\delta(g)x,\ \delta(g)^{-1}y - \tau(g)x,\ z - \sigma(g)x + \omega(g)y + \frac{1}{2}x^2\,\delta(g)\,\tau(g)\right] \quad \text{für } g \in G.$$

Zur technischen Vereinfachung sei ferner vorausgesetzt, daß $\delta(g) > 0$ für alle $g \in G$ (das bedeutet allenfalls den Übergang zu einer Untergruppe vom Index 2, was für die Symmetrie ohne Einfluß ist). $H = \{h \in G \mid \omega(h) = 0\}$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von G, und jedes Element $g \in G$ läßt sich eindeutig in der Form $g = rh$ mit $r \in X$, $h \in H$ darstellen. Weiter ist Y normal in H. Unter den genannten Voraussetzungen gilt nun mit den eingeführten Bezeichnungen:

(F) **Satz 1.** *Für ein minimales hermitesches Idempotent $p \in L^1(N)_{\bar\chi}$ ist $p\,L^1(G)_{\bar\chi}p$ *-isomorph zur Beurlingschen Algebra $L^1(H/Y, w)_{\bar\chi}$, wobei $L^1(H/Y)_{\bar\chi}$ entsprechend zu $L^1(G)_{\bar\chi}$ definiert ist und das Gewicht w durch $w(h) = \{4(\delta(h) + \delta(h)^{-1})^2 + \tau(h)^2\}^{\frac{1}{4}}$ gegeben ist (für $h \in H$, aber δ und τ sind konstant auf Nebenklassen modulo A).*

Beweis. Zunächst führen wir noch einige weitere Bezeichnungen ein. Die Gruppe H/Y wird mit $\dot H$ bezeichnet, entsprechend ist $\dot h$ die Nebenklasse von h in $\dot H$. Da häufig $\delta(g)^{-1}$ auftreten wird, definieren wir $\alpha(g) = \delta(g)^{-1}$. Um Elemente xh, $x \in X$, $h \in H$, in die Form $h'x'$ zu überführen, sei h_s für $s \in \mathbb{R}$ definiert durch $h_s = x(s)h\,x(-\alpha(h)s)$. Diese Definition ist gerade so eingerichtet, daß $\{h_s\} = H \cap x(s)hX$. Weiter ist $\delta(h_s) = \delta(h)$. Wichtig wird im folgenden sein, daß sich $\dot h_s$ von $\dot h$ nur um ein Element aus Z (Z wird als kanonisch in $\dot H$ eingebettet angesehen) unterscheidet. Es gilt $\dot h_s = \dot h[0, 0, \mu(s, h)]$ mit

$$\mu(s, h) = -\frac{1}{2}\,\alpha(h)s^2\,\tau(h^{-1}) - s\,\sigma(h^{-1}) = \frac{1}{2}\,\alpha(h)s^2\,\tau(h) + s\,\alpha(h)\,\sigma(h),$$

wenn man $\tau(h^{-1}) = -\tau(h)$ und $\sigma(h^{-1}) = -\alpha(h)\,\sigma(h)$ beachtet. Die Gruppen X, Y, Z und A seien bei der naheliegenden Identifikation mit $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ mit dem Lebesgueschen Maß versehen, N trage das Produktmaß. Weiter sei ein linksinvariantes Maß dh auf H fest gewählt. Dann erhält man ein Haarsches Maß auf G durch $d(x(s)h) = \alpha(h)\,ds\,dh$, d.h. $\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \int_H \varphi(x(s)h)\,\alpha(h)\,ds\,dh$ ist ein linksinvariantes Integral auf G. Nach diesen Festlegungen seien die linksinvarianten Maße auf den Quotientengruppen G/N, G/A, H/Y etc. stets so normiert, daß die Weilsche Formel gilt.

Für $t \in \mathbb{R}$ und $f \in L^1(\mathbb{R})$ sei f^t gegeben durch $f^t(x) = e^{-itx}f(x)$. Die Fourier-Transformation für $f \in L^1(\mathbb{R})$ sei definiert durch $\hat f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^y(x)\,dx$. Es gilt dann (für passende f) die Umkehrformel $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iyw}\hat{f}(y)\,dy = 2\pi f(w)$. Weiter sei $u \in L^1(\mathbb{R})$ diejenige Funktion mit $\hat{u}(y) = C\,e^{-y^2}$, $C > 0$, und $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(y)^2\,dy = 1$, d.h. $C = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$ (in den folgenden Rechnungen werden wir es häufig vorziehen, das Symbol C statt des expliziten Wertes zu verwenden).

Es genügt, die Algebra $p\,L^1(G)_{\bar{\chi}}\,p$ für ein p zu bestimmen, und wir werden dies tun für $p[x, y, z] = e^{-iz}(u^x * u)(y)$ (dieses p ist ein minimales hermitesches Idenpotent in $L^1(N)_{\bar{\chi}}$). Dazu definieren wir $S : L^1(\dot{H}, w)_{\bar{\chi}} \to L^1(G)_{\bar{\chi}}$ durch

$$(Sf)\big(x(t)h\,y(b)\big) = D\,\delta(h)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\,\hat{u}(-s)\,\hat{u}\big(t - \delta(h)s\big)e^{-isb} \cdot f(\dot{h}_{\delta(h)s})$$

für $b, r \in \mathbb{R}$ und $h \in H$ mit $D = (2\pi)^{-1}$. Man überzeugt sich zunächst, daß Sf etwa für stetige Funktionen f mit kompaktem Träger (modulo Z) eine wohlbestimmte Funktion auf G ist (da $Y \subsetneqq H$, ist $x(t)h\,y(b)$ natürlich keine eindeutige Zerlegung eines Elementes aus G). Unser Ziel ist es, zu zeigen, daß S ein isometrischer $*$-Isomorphismus von $L^1(H, w)_{\bar{\chi}}$ auf $p\,L^1(G)_{\bar{\chi}}\,p$ ist. Zur Bestimmung der Norm von Sf wird Sf unter Verwendung von $\dot{h}_s \equiv \dot{h} \bmod Z$ umgeformt. Es ist

$$\dot{h}_{\delta(h)s} = \dot{h}[0, 0, \mu(\delta(h)s, h)] \quad \text{und} \quad \mu(\delta(h)s, h) = \frac{1}{2}\,\delta(h)s^2\,\tau(h) + s\,\sigma(h)\,,$$

also $f(\dot{h}_{\delta(h)s}) = f(\dot{h})\,e^{-i\left\{s\sigma(h) + \frac{1}{2}\delta(h)s^2\tau(h)\right\}}$, und man findet $(Sf)\big(x(t)h\big) = D\,f(\dot{h})\,\Phi(t, h)$ mit $\Phi(t, h) = \delta(h)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\,\hat{u}(-s)\,\hat{u}\big(t - \delta(h)s\big)\,e^{-i\left\{s\sigma(h) + \frac{1}{2}\delta(h)s^2\tau(h)\right\}}$, was explizit berechenbar ist. Die Norm von Sf ist das Integral von $|Sf|$ über G/Z. Identifiziert man X mit seinem Bild in G/Z, so läßt sich jedes Element $g \in G/Z$ eindeutig in der Form $g = xh$ mit $x \in X$ und $h \in H/Z$ schreiben, und es gilt $d(xh) = \alpha(h)\,dx\,dh$ für die linksinvarianten Maße auf den jeweiligen Gruppen. Setzt man also $\tilde{w}(h) = \alpha(h) \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{Y} db\,|\Phi(t, hb)|$ für $h \in H$, so ist $\tilde{w}$ konstant auf Nebenklassen mod A, und es gilt $\|Sf\| = D \int_{H/A} |f|\,\tilde{w}$. Die Funktion $\tilde{w}$ ist nun zu berechnen. Bei festem h schreiben wir kurz $\tilde{w} = \tilde{w}(h)$, $\alpha = \alpha(h)$, $\delta = \delta(h)$ und $\tau = \tau(h)$. Berücksichtigt man $\tau\big(h\,y(b)\big) = \tau(h)$ und $\sigma\big(h\,y(b)\big) = \sigma(h) + b =: b'$, so findet man

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} db'\,|\varphi(t, b')| \quad \text{mit} \quad \varphi(t, b') = \delta^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\,\hat{u}(-s)\,\hat{u}(t - \delta s)\,e^{-i\left\{sb' + \frac{1}{2}s^2\delta\tau\right\}} \\ &= C^2\,\delta^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\,e^{-s^2}\,e^{-s^2\delta^2 + 2ts\delta - t^2}\,e^{-isb'}\,e^{-\frac{1}{2}is^2\delta\tau}\,.\end{aligned}$$

Diese Integration kann man ausführen, und man findet

$$\begin{aligned}|\varphi(t, b')| = C^2\,\delta^{\frac{1}{2}}\,e^{-t^2}\,\pi^{\frac{1}{2}} \left|1 + \delta^2 + \frac{1}{2}\,i\tau\delta\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\{t^2\delta^2(1 + \delta^2)^{-1}\} \\ \cdot \left|\exp\left\{-\frac{1}{4}\left(b' + t\tau\,\frac{\delta^2}{1 + \delta^2}\right)^2 \left(1 + \delta^2 + \frac{1}{2}\,i\tau\delta\right)^{-1}\right\}\right|.\end{aligned}$$

Als nächstes führe man die Integration über b', schließlich über $\alpha\,dt$ aus und erhält $\tilde{w} = 2\pi\left\{4\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right)^2 + \tau^2\right\}^{\frac{1}{4}}$, wobei man natürlich $C^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ zu verwenden hat, also $D\,\tilde{w}(h) = w(h)$. Damit ist nun gezeigt, daß S eine Isometrie ist.

Weiter ist nachzuprüfen, daß S mit der Involution verträglich ist. Zur Vorbereitung bemerken wir, daß die Modularfunktion Δ_G von G auf N verschwindet (da N ein unimodularer Normalteiler ist) und daß Δ_G auf H mit der Modularfunktion $\Delta_{H/A}$ und dann auch mit $\Delta_{H/Y}$ (aufgefaßt als Funktionen auf H) übereinstimmt. Ferner gelten $(h^{-1})_s = (h_{\delta(h)s})^{-1}$ und $h^{-1}s^{-1} = x(-\alpha(h)s)(h^{-1})_{s\alpha(h)}$ für alle $h \in H$ und $s \in \mathbb{R}$.

Nach Definition ist $(Sf^*)(x(t)h) = D\,\delta(h)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, \hat{u}(-s)\, \hat{u}(t-\delta(h)s) f^*(h^{\cdot}_{\delta(h)s})$ und $f^*(h^{\cdot}_{s\delta(h)}) = \Delta_{H/Y}(h_{s\delta(h)})^{-1} \bar{f}([(h_{s\delta(h)})^{-1}]^{\cdot}) = \Delta_G(h_{s\delta(h)})^{-1} \bar{f}((h^{-1})^{\cdot}_s)$, also

$$(Sf^*)(x(t)h) = D\,\delta(h)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, \hat{u}(-s)\, \hat{u}(t-\delta(h)s)\, \Delta_G(h)^{-1} \bar{f}((h^{-1})^{\cdot}_s).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}(Sf)^*(x(t)h) &= \Delta_G(h)^{-1}\, \overline{Sf}(h^{-1}x(-t)) = \Delta_G(h)^{-1}\, \overline{Sf}(x(-\alpha(h)t)(h^{-1})_{t\alpha(h)}) \\ &= \Delta_G(h)^{-1} D\,\delta(h)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, \hat{u}(-s)\, \hat{u}(-\alpha(h)t-\alpha(h)s) \cdot \bar{f}((h^{-1})^{\cdot}_{t\alpha(h)+s\alpha(h)}).\end{aligned}$$

Führt man in letzterem Integral die Variablentransformation $s' = (t+s)\,\alpha(h)$ durch, so geht es in das gewünschte Integral über.

Um nachzuweisen, daß S mit der Faltung vertauschbar ist und daß das Bild unter S wirklich in $p\mathscr{L}p$ gelegen, verwenden wir Darstellungstheorie, genauer gesagt dies: wenn man eine passende unitäre Darstellung π' von H mit $\pi'([0, y, z]) = \chi(z) = e^{iz}$ (etwa die „reguläre" Darstellung von H in $L^2(H/Y)_{\bar{\chi}}$ von H auf G induziert, erhält man eine treue Darstellung π von $\mathscr{L}$. Um etwa $S(f * g) = Sf * Sg$ zu zeigen, braucht man also nur die Gleichung $\pi(S(f*g)) = \pi(Sf)\,\pi(Sg)$ nachzuprüfen.

Ist $\mathfrak{K}$ der Darstellungsraum von π', so kann man π in $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{K})$ realisieren, und es gilt:

$$\begin{aligned}\{\pi(x(s)h)\xi\}(r) &= \alpha(h)^{\frac{1}{2}} \pi'(x(s-r)h)x((r-s)\alpha(h))\xi((r-s)\alpha(h)) \\ &= \alpha(h)^{\frac{1}{2}} \pi'(h_{s-r})\xi((r-s)\alpha(h)) \quad \text{für} \quad \xi \in \mathfrak{H}, \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h \in H.\end{aligned}$$

Als nächstes wird $\pi(p)$ berechnet. Ist $h = [0, y, z] \in A$, so ist

$$h_{s-r} = [s-r, 0, 0]\ [0, y, z]\ [r-s, 0, 0] = [s-r, y, z]\ [r-s, 0, 0] = [0, y, z+(s-r)y],$$

also $\{\pi([s, y, z])\xi\}(r) = e^{iz} e^{i(s-r)y} \xi(r-s)$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\{\pi(p)\xi\}(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, dy (u^s * u)(y)\, e^{i(s-r)y}\, \xi(r-s) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, dy \int_{-\infty}^{\infty} dw\, u^s(y+w)\, u(-w)\, e^{i(s-r)}\, \xi(r-s) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, dy \int_{-\infty}^{\infty} dw\, u(y+w)\, e^{-is(y+w)}\, u(-w)\, e^{i(s-r)y}\, \xi(r-s) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} dw\, u(-w)\, \hat{u}(r)\, e^{-i(s-r)w}\, \xi(r-s) \\ &= \hat{u}(r) \int_{-\infty}^{\infty} ds\, \hat{u}(r-s)\, \xi(r-s) = \hat{u}(r) \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \hat{u}(t)\, \xi(t).\end{aligned}$$

Wie es sein muß, projiziert also $\pi(p)$ auf einen zu $\mathfrak{K}$ kanonisch isomorphen Hilbertschen Raum $\mathfrak{K}'$: $(V\eta)(r)=\hat{u}(r)\eta$ definiert eine Isometrie $V\colon \mathfrak{K}\to\mathfrak{K}'=\pi(p)\mathfrak{H}$.

Nun wird $\pi(Sf)$ für $f\in L^1(H/Y,w)_{\bar{\chi}}$ bestimmt. Es gilt

$$\{\pi(Sf)\xi\}(r)=\int_{G/Z} dg\,(Sf)(g)\{\pi(g)\xi\}(r)$$

$$=\int_{H/A} d\ddot{h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dt\,db\,\alpha(h)(Sf)(x(t)h\,y(b))\{\pi(x(t)h\,y(b))\xi\}(r)\,,$$

wobei $\ddot{h}$ die Nebenklasse von h modulo A bezeichnet. Nach Definition von π gilt

$$\{\pi(x(t)h\,y(b))\xi\}(r)=e^{-i(r-t)\alpha(h)b}\{\pi(h)\xi\}(r-t)\,.$$

Wie oben gezeigt wurde, ist

$$(Sf)(x(t)h\,y(b))=D\,f(\dot{h})\,\Phi(t,h\,y(b))\,.$$

Man erhält

$$\{\pi(Sf)\xi\}(r)=\int_{H/A} d\ddot{h}\,f(\dot{h})\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dt\,db\,D\alpha(h)\,\Phi(t,h\,y(b))\,e^{-i(r-t)\alpha(h)b}\cdot\{\pi(h)\xi\}(r-t)$$

$$=\int_{H/A} d\ddot{h}\,f(\dot{h})\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dt\,db\,D\alpha(h)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} ds\,\hat{u}(-s)\,\hat{u}(t-\delta(h)s)\,e^{-isb}\,e^{-i\mu(\delta(h)s,h)}$$

$$\cdot\, e^{-i(r-t)\alpha(h)b}\{\pi(h)\xi\}(r-t)\,.$$

Die Integration über s und b kann man nach der Umkehrformel ausführen und findet:

$$\{\pi(Sf)\xi\}(r)=\int_{H/A} d\ddot{h}\,f(\dot{h})\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\alpha(h)^{\frac{1}{2}}\,\hat{u}(\alpha(h)(r-t))\,\hat{u}(r)\,e^{-i\mu(t-r,h)}\{\pi(h)\xi\}(r-t)$$

$$=\hat{u}(r)\int_{H/A} d\ddot{h}\,f(\dot{h})\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\alpha(h)^{\frac{1}{2}}\,\hat{u}(\alpha(h)t)\,e^{-i\mu(-t,h)}\{\pi(h)\xi\}(t)\,.$$

An dieser Gleichung erkennt man, daß $\pi(Sf)(\mathfrak{H})$ in $\pi(p)(\mathfrak{H})$ gelegen ist. Folglich gilt $\pi(p)\,\pi(Sf)=\pi(Sf)$ und dann auch $p*Sf=Sf$. Da S mit der Involution vertauscht, ist auch $Sf*p=Sf$ und mithin das Bild unter S in $p\mathscr{L}p$ gelegen. Wegen $\pi(p)\,\pi(Sf)\,\pi(p)=\pi(Sf)$ kann man $\pi(Sf)$ als Operator in $\mathfrak{K}'$ auffassen. Wir wollen den in $\mathfrak{K}$ verpflanzten Operator $V^{-1}\,\pi(Sf)\,V$ bestimmen. Sei also $\eta\in\mathfrak{K}$ und $\xi=V\eta$, d.h. $\xi(r)=\hat{u}(r)\eta$. Dann ist

$$\{\pi(h)\xi\}(t)=\alpha(h)^{\frac{1}{2}}\,\pi'(\dot{h}_{-t})\,\xi(t\,\alpha(h))=\alpha(h)^{\frac{1}{2}}\,e^{i\mu(-t,h)}\,\pi'(\dot{h})\eta\,\hat{u}(t\,\alpha(h))$$

und folglich

$$\{\pi(Sf)\xi\}(r)=\hat{u}(r)\int_{H/A} d\ddot{h}\,f(\dot{h})\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\alpha(h)\,\hat{u}(t\,\alpha(h))^2\,\pi'(\dot{h})\eta$$

$$=\hat{u}(r)\int_{H/A} d\ddot{h}\,f(\dot{h})\,\pi'(\dot{h})\eta=\hat{u}(r)\,\pi'(f)\eta\,,$$

d.h. $\pi(Sf)\,V\eta=V\pi'(f)\eta$ oder $V^{-1}\,\pi(Sf)\,V=\pi'(f)$. Daraus folgt aber insbesondere, daß S mit der Faltung verträglich ist. Bislang haben wir also gezeigt, daß S ein isometrischer $*$-Isomorphismus von $L^1(H/Y,w)_{\bar{\chi}}$ in $p\mathscr{L}p$ ist.

Es bleibt noch die Surjektivität zu beweisen. Dazu genügt es natürlich, zu zeigen, daß das Bild unter S dicht in $p\mathscr{L}p$ ist. Dies geschieht auf die folgende Weise. Für „anständige" Funktionen F in $\mathscr{L}$ (etwa stetige Funktionen, für welche $|F|$ einen kompakten Träger in G/Z hat) definieren wir eine Funktion TF in $L^1(H/Y, w)_{\bar{\chi}}$ und zeigen, daß $pFp = S(TF)$ gilt. Da die Funktionen der Form pFp (F wie oben beschrieben) dicht in $p\mathscr{L}p$ liegen, ist der Satz dann bewiesen.

Es sei

$$(TF)(\dot{h}) = \alpha(h)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dr\, ds\, da\, \hat{u}(r)\, \hat{u}(\alpha(h)(r-s))\, e^{i\mu(s-r,\, hy(a))} \cdot F(x(s)h\, y(a)).$$

Offenbar ist TF stetig, und $|TF|$ hat einen kompakten Träger modulo Z, also liegt TF in $L^1(H/Y, w)_{\bar{\chi}}$. Um $pFp = S(TF)$ zu beweisen, genügt es, $\pi(p)\,\pi(F)\,\pi(p) = \pi(S(TF))$ oder $\pi(p)\,\pi(F)\,V\eta = \pi(S(TF))\,V\eta$ für alle $\eta \in \mathfrak{K}$ zu zeigen. Nach dem oben Bewiesenen ist

$$\{\pi(S(TF))V\eta\}(t) = \hat{u}(t) \int_{H/A} d\ddot{h}\,(TF)(\dot{h})\, \pi'(\dot{h})\eta.$$

Weiter ist

$$\{\pi(p)\,\pi(F)V\eta\}(t) = \hat{u}(t) \int_{-\infty}^{\infty} dr\, \hat{u}(r)\{\pi(F)V\eta\}(r)$$

und

$$\begin{aligned}
\{\pi(F)V\eta\}(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{H/Z} ds\, dh\, \alpha(h)\, F(x(s)h)\{\pi(x(s)h)V\eta\}(r) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{H/Z} ds\, dh\, \alpha(h)\, F(x(s)h)\, \alpha(h)^{\frac{1}{2}}\, \hat{u}(\alpha(h)(r-s))\, \pi'(\dot{h}_{s-r})\eta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{H/Z} ds\, dh\, \alpha(h)^{\frac{3}{2}}\, F(x(s)h)\, \hat{u}(\alpha(h)(r-s))\, e^{i\mu(s-r,\,h)}\, \pi'(\dot{h})\eta,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dr\, \hat{u}(r)\{\pi(F)V\eta\}(r) \\
&= \int_{H/A} d\ddot{h} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dr\, ds\, da\, \hat{u}(r)\, \alpha(h)^{\frac{3}{2}}\, F(x(s)h\, y(a))\, \hat{u}(\alpha(h)(r-s))\, e^{i\mu(s-r,\, hy(a))}\, \pi'(\dot{h})\eta \\
&= \int_{H/A} d\ddot{h}\,(TF)(\dot{h})\, \pi'(\dot{h})\eta,
\end{aligned}$$

woraus die behauptete Gleichung folgt.

Bemerkung 1. Viele der obigen Rechnungen kann man unter der wesentlich schwächeren Voraussetzung durchführen, daß eine (zusammenhängende Liesche) Gruppe G vorliegt, welche auf einem Normalteiler $A \cong \mathbb{R}^2$ durch innere Automorphismen wie $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid a > 0, b \in \mathbb{R}\right\}$ wirkt. Wie oben kann man dann H, α und Y definieren. Weiter wähle man eine einparametrige Untergruppe $X = \{x(s) \mid s \in \mathbb{R}\}$, welche auf A wie $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$ wirkt. Ferner kann man Sf wie oben für geeignete $f \in L^1(H/Y)_{\bar{\chi}}$ (etwa unendlich oft differenzierbar mit kompaktem Träger modulo Z) definieren. Setzt man

$$TF(\dot{h}) = \chi(h)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, dr\, da\, \hat{u}(r)\, \hat{u}(s)\, F(x(r) h\, y(a)\, x(-s)),$$

so ist T ein beschränkter Operator von $\mathscr{L}$ (bzw. $p\mathscr{L}p$) in $L^1(H/Y)_{\bar{\chi}}$, und S ist (auf passenden Definitionsbereichen) invers zu T, insbesondere stimmt dieses T in der im Satz untersuchten speziellen Situation mit dem dort definierten T überein. Was mir in diesem allgemeineren Fall nicht gelungen ist, ist die genaue Beschreibung des Bildes unter T oder, was im wesentlichen auf dasselbe hinausläuft, eine „vernünftige" Beschreibung der Norm von Sf in $\mathscr{L}$ durch f. Nur dazu war im Beweis des Satzes die Spezialisierung auf $\hat{u}(x) = C\, e^{-x^2}$ erforderlich, alles übrige hätte sich auch für allgemeineres u durchführen lassen (auf welches man die Umkehrformel anwenden darf).

Bemerkung 2. Betrachten wir die in Satz 1 von [12] (vgl. auch [8]) beschriebene Algebra $\mathscr{B} = L^1(R, \mathscr{A})$ und ein minimales hermitesches Idempotent $0 \neq p \in L^1(R, \mathscr{U})$, $p(t) = u' u$. Weiter sei $\eta : \mathscr{U} \to \mathbb{C} \in \hat{\mathscr{U}} \cong R$ ein Charakter von $\mathscr{U}$, η entspreche bei der Identifikation mit R dem neutralen Element e. Dann sei $\mathscr{I}$ der Abschluß von $\operatorname{Kern} \eta * \mathscr{A}$ in $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}' = \mathscr{A}/\mathscr{I}$ und $P : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ der Quotientenmorphismus. Nimmt man noch $\hat{u}(e) = \eta(u) \neq 0$ an, so ist $M : p\mathscr{B}p \to \mathscr{A}'$, definiert durch $Mf = \eta(u)^{-2}\, P(f(e))$ — man beachte, daß $p\mathscr{B}p$ aus stetigen Funktionen besteht, wie der Beweis von Satz 1 in [12] lehrt —, ein beschränkter dichter *-Morphismus (das wird hier ohne Beweis angegeben). T ist jedoch im allgemeinen nicht surjektiv, wie schon das Beispiel der vierdimensionalen einfachzusammenhängenden nilpotenten Gruppe $G = G_{4,3}$ (in der Bezeichnungsweise von [1], p. 181) zeigt. G ist isomorph zum semidirekten Produkt $\mathbb{R} \ltimes N$, wobei N wie in (F) die dreidimensionale Heisenberg-Gruppe bezeichnet und $\mathbb{R}$ auf N durch innere Automorphismen wie $t[x, y, z]t^{-1} = \left[x, y - tx, z + \frac{1}{2} tx^2\right]$ wirkt. Man kann also G mit $\mathbb{R}^4$ identifizieren, wobei die Multiplikation in

$$[t, x, y, z]\, [t', x', y', z'] = \left[t + t', x + x', y + y' + t'x, z + z' - \frac{1}{2} t'^2 x^2 - x'y - x'xt'\right]$$

übergeht. Wie in (F) seien χ, A, Y, X und H sowie $L^1(G)_{\bar{\chi}}$ etc. definiert. H ist gerade der dreidimensionale kommutative Normalteiler $\{[t, 0, y, z] \mid t, y, z \in \mathbb{R}\}$. $L^1(H/Y)_{\bar{\chi}}$ ist kanonisch isomorph zu $L^1(\mathbb{R})$. Anwendung von (F) liefert einen injektiven *-Morphismus $T : pL^1(G)_{\bar{\chi}}\, p \to L^1(\mathbb{R})$ (für das im Beweis von (F) angegebene p), dessen Bild gerade aus den gegen $(16 + t^2)^{\frac{1}{4}}$ integrierbaren Funktionen besteht. Andererseits liegt hier auch die zu Beginn der Bemerkung beschriebene Situation vor: $\mathscr{B} = L^1(G)_{\bar{\chi}} = L^1(\mathbb{R}, L^1(H)_{\bar{\chi}})$ mit $\mathscr{U} = L^1(A)_{\bar{\chi}} \cong L^1(\mathbb{R})$. $\mathscr{A}' = \mathscr{A}/\mathscr{I}$ ist kanonisch isomorph zu $L^1(\mathbb{R})$, und man überzeugt sich leicht, daß $M : p\mathscr{B}p \to \mathscr{A}' \cong L^1(\mathbb{R})$ mit T übereinstimmt, insbesondere ist M nicht surjektiv, jedenfalls nicht für das im Beweis von (F) angegebene p und damit für alle minimalen hermiteschen Idempotente, da die Bilder unter den verschiedenen M's gleich sind.

Bemerkung 3. Man kann versuchen, Satz 1 in verschiedene Richtungen zu verallgemeinern. Zum einen kann man N durch höherdimensionale Heisenberg-Gruppen ersetzen, wobei ZN zentral in G sein soll und — wie in Satz 1 — die Wirkung von G auf N ggf. Restriktionen unterworfen sein soll. Aber auch schon im Falle $\dim N = 3$ scheint mir ein interessantes Problem vorzuliegen, wenn G auf $N/Z \cong \mathbb{C}$ durch Multiplikation mit $e^{i\alpha(g)}$ wirkt.

Multiplikationstabelle

$\dim \mathfrak{g}$	Name	$e_0, \ldots, e_n$ ist eine Basis von $\mathfrak{g}$: die von Null verschiedenen Produkte $[e_i, e_j]$ sind für $i<j$ angegeben.
4	$\mathfrak{g}_{4,9}(0)$	$[e_1, e_2]=e_3$, $[e_0, e_1]=-e_1$, $[e_0, e_2]=e_2$
5	$\mathfrak{g}_5$	$[e_1, e_2]=e_3$, $[e_1, e_3]=e_4$, $[e_0, e_1]=-e_1$, $[e_0, e_2]=e_2$, $[e_0, e_4]=-e_4$
	$\mathfrak{g}_5(\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$	$[e_1, e_2]=e_3$, $[e_0, e_1]=-e_1$, $[e_0, e_2]=e_2$, $[e_0, e_4]=\alpha e_4$
	$\tilde{\mathfrak{g}}_5$	$[e_1, e_2]=e_3$, $[e_0, e_1]=-e_1$, $[e_0, e_2]=e_2+e_4$, $[e_0, e_4]=e_4$
	$\mathfrak{b}_5$	$[e_2, e_3]=e_4$, $[e_1, e_2]=-e_2$, $[e_1, e_3]=e_3$, $[e_0, e_2]=e_2$, $[e_0, e_4]=e_4$
	$\mathfrak{g}_{5,4}$	$[e_1, e_2]=e_3$, $[e_1, e_3]=e_4$, $[e_0, e_3]=e_3$, $[e_0, e_2]=2e_2$, $[e_0, e_1]=-e_1$
6	$\mathfrak{g}_{6,4}$	$[e_2, e_3]=e_4$, $[e_1, e_5]=e_4$, $[e_0, e_2]=e_2$, $[e_0, e_3]=-e_3$, $[e_0, e_1]=e_5$
	$\mathfrak{g}_{6,5}$	$[e_1, e_2]=e_3$, $[e_1, e_3]=e_4$, $[e_1, e_4]=e_5$, $[e_0, e_1]=-e_1$, $[e_0, e_2]=3e_2$, $[e_0, e_3]=2e_3$, $[e_0, e_4]=e_4$
	$\mathfrak{g}_{6,6}$	$[e_1, e_2]=e_4$, $[e_1, e_4]=e_5$, $[e_2, e_3]=e_5$, $[e_0, e_1]=-e_1$, $[e_0, e_2]=2e_2$, $[e_0, e_3]=-2e_3$, $[e_0, e_4]=e_4$
	$\mathfrak{g}_{6,7}$	$[e_2, e_3]=e_4$, $[e_1, e_2]=-e_2$, $[e_1, e_3]=e_3$, $[e_0, e_1]=e_4$, $[e_0, e_5]=e_5$
	$\mathfrak{g}_{6,8}$	$[e_2, e_3]=e_5$, $[e_1, e_2]=-e_2$, $[e_1, e_3]=e_3$, $[e_0, e_3]=e_3$, $[e_0, e_4]=e_4+e_5$, $[e_0, e_5]=e_5$
	$\mathfrak{g}_{6,0}(\alpha)$ mit $\alpha \neq 0$	$[e_1, e_2]=e_4$, $[e_1, e_3]=e_5$, $[e_0, e_1]=\alpha e_1$, $[e_0, e_2]=-\alpha e_2-e_3$, $[e_0, e_3]=e_2-\alpha e_3$, $[e_0, e_4]=-e_5$, $[e_0, e_5]=e_4$
	$\mathfrak{g}_{6,1}(\alpha)$ mit $\alpha \neq 0$	$[e_1, e_3]=e_5$, $[e_2, e_4]=e_5$, $[e_0, e_1]=-e_1-\alpha e_2$, $[e_0, e_2]=-e_2+\alpha e_1$, $[e_0, e_3]=e_3-\alpha e_4$, $[e_0, e_4]=e_4+\alpha e_3$
	$\mathfrak{g}_{6,2}(\alpha)$ mit $\alpha \neq 0$	$[e_1, e_3]=e_5$, $[e_2, e_4]=e_5$, $[e_0, e_1]=-e_1$, $[e_0, e_2]=\alpha e_4$, $[e_0, e_3]=e_3$, $[e_0, e_4]=-\alpha e_2$
	$\mathfrak{g}_{6,3}(\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$	$[e_1, e_3]=e_5$, $[e_2, e_4]=e_5$, $[e_0, e_1]=-e_1$, $[e_0, e_2]=\alpha e_2$, $[e_0, e_3]=e_3$, $[e_0, e_4]=-\alpha e_4$
	$\mathfrak{g}_{6,3}$	$[e_1, e_3]=e_5$, $[e_2, e_4]=e_5$, $[e_0, e_1]=e_1+e_4$, $[e_0, e_2]=-e_2+e_3$, $[e_0, e_3]=-e_3$, $[e_0, e_4]=e_4$

2. Hier erhalten die Mitglieder der in der Einleitung angesprochenen Liste einen Namen. Weiter formulieren wir das Hauptergebnis, nämlich Satz 2.

Satz 2. *Die in der obigen Liste angegebenen Lieschen Algebren sind sämtlich nichtsymmetrisch. Ist* $\mathfrak{g}$ *eine nichtsymmetrische, auflösbare Liesche Algebra der Dimension* $\leqq 6$, *so ist* $\mathfrak{g}$ *in der Liste aufgeführt, oder es gilt* $\dim \mathfrak{g} = 6$ *und ein echter Quotient von* $\mathfrak{g}$ *ist isomorph zu einer der in der Liste angegebenen Algebren.*

Dem Beweis dieses Satzes sind die beiden folgenden Paragraphen gewidmet.

3. Hier wird der Reihe nach gezeigt, daß die in der Liste angegebenen Algebren nichtsymmetrisch sind.

In [8] wurde bereits ausgeführt, daß $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$ die einzige nichtsymmetrische auflösbare Liesche Algebra der Dimension $\leqq 4$ ist (die Nichtsymmetrie folgt aus (C) oder aus (F)).

Modulo dem von e_4 erzeugten Ideal (e_4) sind $\mathfrak{g}_5$, $\tilde{\mathfrak{g}}_5$ und $\mathfrak{g}_5(\tau)$ isomorph zu $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$, also nichtsymmetrisch.

Zu $\mathfrak{b}_5$. $\mathfrak{b}_5$ ist die Liesche Algebra der Gruppe der reellen oberen 3×3 Dreiecksmatrizen, vermindert um die abspaltende Untergruppe aller Vielfachen der Einheitsmatrix, also etwa

$$B_5 = \left\{ \begin{pmatrix} e^s & x & z \\ 0 & e^t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| s, t, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir wollen die Nichtsymmetrie von B_5 mit Hilfe von (C) beweisen. Dazu führen wir zunächst einige Untergruppen von B_5 ein. Es sei

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} e^s & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| s, x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| z, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad K = GH = G \ltimes H .$$

Dann ist $B_5 = K \ltimes R$, also $L^1(B_5) = L^1(K, L^1(R)) \cong L^1(K, A(\mathbb{R}^2))$, wobei K auf $\mathbb{R}^2$ (und dann auch auf $A(\mathbb{R}^2)$) durch $k(u, v) = (e^{-t}u - xe^{-s-t}v, e^{-s}v)$ wirkt, falls $k = \begin{pmatrix} e^s & x & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$.

Es sei X die Bahn durch $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Es gilt $X = K(0, 1) = H(0, 1) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, und X läßt sich durch $h \leftrightarrow (-xe^{-s}, e^{-s})$ mit H identifizieren, wobei die Wirkung von H in die Translation übergeht. Faßt man $\mathcal{Q} := \{f|_X | f \in A(\mathbb{R}^2), f(0, 0) = 0\}$ auf als Algebra von Funktionen auf H (mit der Quotienten-Norm), so erfüllt $\mathcal{Q}$ dort die Bedingungen 1)—5) von Theorem 4 aus [8]. Weiter ist $L^1(K, \mathcal{Q})$ ein Subquotient von $L^1(B_5)$, und $L^1(K, \mathcal{Q}) \cong L^1(G, L^1(H, \mathcal{Q}))$ ist nach (C) nichtsymmetrisch. Also ist auch $L^1(B_5)$ nichtsymmetrisch, vgl. etwa [13].

Bemerkung. Während für Liesche Gruppen bis zur Dimension 4 die Wienersche Eigenschaft und die Symmetrie noch zusammenfallen, besitzt B_5 zwar die Wienersche Eigenschaft, ist aber nichtsymmetrisch, vgl. dazu auch [7], [8] und [10].

Zu $\mathfrak{g}_{5,4}$. Die zu $\mathfrak{g}_{5,4}$ gehörige Gruppe $G_{5,4}$ kann man als semidirektes Produkt aus der zweidimensionalen nicht-kommutativen Gruppe S_2 und $\mathbb{R}^3$ schreiben. Also ist $L^1(G_{5,4}) \cong L^1(S_2, L^1(\mathbb{R}^3)) \cong L^1(S_2, A(\mathbb{R}^3))$, wobei S_2 auf $A(\mathbb{R}^3)$ bzw. auf $\mathbb{R}^3$ durch die Matrizen $\begin{pmatrix} e^{2t} & se^t & \frac{s^2}{2} \\ 0 & e^t & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wirkt. Die Bahn X des Punktes $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, d.h. $X = \left\{\left(\frac{s^2}{2}, s, 1\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$ läßt sich mit $\mathbb{R}$ identifizieren, wobei S_2 gerade als Gruppe der affinen Transformationen der reellen Geraden wirkt (genauer: deren Zusammenhangskomponente). Setzt man nun $\mathcal{Q} = \{f|X| f \in A(\mathbb{R}^3)\}$, so ist $L^1(S_2, \mathcal{Q})$ ein Quotient von $L^1(G_{5,4})$. Schreibt man $L^1(S_2, \mathcal{Q})$ in $L^1(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}, \mathcal{Q}))$ um, so sieht man, daß diese Algebra von dem in (C) beschriebenen Typ, also nichtsymmetrisch ist.

Zu $\mathfrak{g}_{6,4}$. Um die Nichtsymmetrie der zugehörigen einfachzusammenhängenden Gruppe $G_{6,4}$ einzusehen, verwenden wir (F). Der dem Ideal $\mathfrak{n} = (e_2, e_3, e_4)$ entsprechende Normalteiler N erfüllt die Voraussetzungen von (F). Die Liesche Algebra der Gruppe H/Y (in der Bezeichnungsweise von (F)) ist $(\bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_4, \bar{e}_5)$ mit den nicht-verschwindenden Produkten $[\bar{e}_0, \bar{e}_1] = \bar{e}_5$ und $[\bar{e}_1, \bar{e}_5] = \bar{e}_4$, also isomorph zur nilpotenten Algebra $\mathfrak{g}_{4,3}$. Die zugehörige Gruppe $G_{4,3}$ haben wir in Bemerkung 2 am Ende von § 1 hingeschrieben. (F) lehrt nun, daß $pL^1(G_{6,4})_{\bar{\chi}}p$ (p und χ wie dort) *-isomorph zur Beurlingschen Algebra $L^1(G_{4,3}, w)_{\bar{\chi}}$ ist mit dem Gewicht $w([t, x, y, z]) = \{4(e^t + e^{-t})^2\}^{\frac{1}{4}} = 2(\cosh t)^{\frac{1}{2}}$. Nun schreibe man $G_{4,3}$ als semidirektes Produkt aus $\mathbb{R} \cong \{[0, x, 0, 0]\}$ und dem kommutativen Normalteiler $\{[t, 0, y, z]\}$. Dann kann man $L^1(G_{4,3}, w)_{\bar{\chi}}$ mit $L^1(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ identifizieren, wobei $\mathscr{A} = L^1(\mathbb{R}^3, w)_{\bar{\chi}} \cong L^1(\mathbb{R}^2, w)$ mit $w(u, v) = 2(\cosh u)^{\frac{1}{2}}$. Weiter liegt mit

$$\mathscr{U} = L^1(\{[0, 0, y, z] \mid y, z \in \mathbb{R}\})_{\bar{\chi}} \subset \mathscr{A}^b$$

dann die Situation von Satz 1 aus [12] vor. Wie in Bemerkung 2 von § 1 angegeben, findet man für ein minimales hermitesches Idempotent $q \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ einen dichten *-Morphismus

$$M: qL^1(\mathbb{R}, \mathscr{A})q \to \mathscr{A}/\mathscr{I} \cong L^1(\mathbb{R}, 2\cosh^{\frac{1}{2}}).$$

Mit letzterer Algebra ist dann auch $qL^1(\mathbb{R}, \mathscr{A})q$ nichtsymmetrisch, also auch

$$L^1(\mathbb{R}, \mathscr{A}) \cong pL^1(G_{6,4})_{\bar{\chi}}p$$

und letztlich $L^1(G_{6,4})$.

Zu $\mathfrak{g}_{6,5}$. Die Nichtsymmetrie dieser Algebra läßt sich wie im Falle $\mathfrak{g}_{5,4}$ zeigen: $G_{6,5}$ ist ein semidirektes Produkt aus S_2 und $\mathbb{R}^4$, und $L^1(G_{6,5})$ hat einen Quotienten der Form $L^1(S_2, \mathcal{Q})$.

Bemerkung. Die Beispiele $\mathfrak{g}_{5,4}$ und $\mathfrak{g}_{6,5}$ lassen sich offenbar verallgemeinern zur Algebra $\mathfrak{s}_2 \ltimes \mathbb{R}^{n+1}$, wobei $\mathfrak{s}_2$ die nicht-kommutative zweidimensionale Liesche Algebra bezeichnet, welche auf $\mathbb{R}^{n+1}$ per

$$\begin{pmatrix} nt & & & \\ s & (n-1)t & 0 & \\ & s & \ddots t & 0 \\ 0 & & \ddots s & 0 \end{pmatrix}$$

wirkt. Im Falle $n=1$ erhält man gerade $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$. Die zugehörigen Gruppenalgebren haben sämtlich „$L^1(S_2, \mathcal{Q})$" als Quotienten.

Zu $\mathfrak{g}_{6,6}$. Der (e_1, e_4, e_5) entsprechende Normalteiler N von $G_{6,6}$ genügt den Voraussetzungen von (F). Die Liesche Algebra von H/Y ist $(\bar{e}_0, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_5)$ mit den Relationen $[\bar{e}_2, \bar{e}_3] = \bar{e}_5$, $[\bar{e}_0, \bar{e}_2] = 2\bar{e}_2$ und $[\bar{e}_0, \bar{e}_3] = -2\bar{e}_3$, also isomorph zu $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$. Folglich gilt

$$H/Y \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & e^{2t} & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, t, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ und mit dem Gewicht } w \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & e^{2t} & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \{4(e^t + e^{-t})^2 + x^2\}^{\frac{1}{4}}$$

$pL^1(G_{6,6})_{\bar{\chi}}\, p \cong L^1(G_{4,9}(0), w)_{\bar{\chi}}$. Betrachtet man nun ein minimales hermitesches Idempotent $q \in L^1(\mathbb{R}, A(\mathbb{R})) \subseteqq L^1(G_{4,9}(0))^b$ wie im Beweis von Theorem 5 in [8] (d.h. $q = u \circ u$, wobei u einen kompakten Träger hat), so ist q auch in $L^1(G_{4,9}(0), w)^b_{\bar{\chi}}$ enthalten und $qL^1(G_{4,9}(0), w)_{\bar{\chi}}\, q$ liegt dicht in der kommutativen, nichtsymmetrischen Algebra $qL^1(G_{4,9}(0))_{\bar{\chi}}\, q$, ist also selbst nichtsymmetrisch.

Zu $\mathfrak{g}_{6,7}$. Der (e_2, e_3, e_4) entsprechende Normalteiler N von $G_{6,7}$ genügt den Voraussetzungen von (F). Die Liesche Algebra von H/Y ist $(\bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_4, \bar{e}_5)$ mit den Produkten $[\bar{e}_0, \bar{e}_1] = \bar{e}_4$ und $[\bar{e}_0, \bar{e}_5] = \bar{e}_5$. Zu zeigen bleibt folglich die Nichtsymmetrie der Algebra $L^1(H/Y, w)_{\bar{\chi}} \cong L^1(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ mit $\mathscr{A} = \{f \in L^1(\mathbb{R}^2) \mid \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)| \cosh(x)^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy < \infty\}$, wobei $\mathbb{R}$ auf $\mathscr{A}$ durch $f^t(x, y) = e^{-itx} e^t f(x, e^t y)$ wirkt. Dazu sei $\mathscr{U} \subseteqq L^1(\mathbb{R})$ das Ideal aller f mit $\hat{f} \equiv 0$ auf $(-\infty, 0]$. Wir betrachten $\mathscr{U}$ als Teil von $\mathscr{A}^b$, indem wir $\mathscr{U}$ durch Faltung in der y-Variablen wirken lassen, d.h. $(u * f)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y-z)\, u(z)\, dz$. Weiter sei $\mathscr{A}_0$ der Abschluß von $\mathscr{U} * \mathscr{A} = \mathscr{A} * \mathscr{U}$ in $\mathscr{A}$; $\mathscr{L}_0 = L^1(\mathbb{R}, \mathscr{A}_0)$ ist dann ein Ideal in $L^1(\mathbb{R}, \mathscr{A})$, und $L^1(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ liegt in $\mathscr{L}_0^b$. Fixieren wir nun noch einen Charakter $\eta: \mathscr{U} \to \mathbb{C}$, etwa $\eta(u) = \hat{u}(1)$. Wie in Bemerkung 2 von §1 angegeben, findet man für ein minimales hermitesches Idempotent $q \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{U})$ einen dichten *-Morphismus $M: q\mathscr{L}_0 q \to \mathscr{A}_0/\mathscr{I}$ mit $\mathscr{I} = \overline{\operatorname{Kern} \eta * \mathscr{A}_0}$. Durch $Rf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, e^{-iy}\, dy$ ist ein surjektiver *-Morphismus $R: \mathscr{A}_0 \to L^1(\mathbb{R}, \cosh^{\frac{1}{2}})$ erklärt mit $R(\mathscr{I}) = 0$. Durch Zusammensetzung erhält man einen dichten *-Morphismus $q\mathscr{L}_0 q \to L^1(\mathbb{R}, \cosh^{\frac{1}{2}})$. Folglich ist $q\mathscr{L}_0 q$ und dann auch $L^1(G_{6,7})$ nichtsymmetrisch.

Zu $\mathfrak{g}_{6,8}$. $\mathfrak{g}_{6,8}$ ist die semidirekte Summe aus der Unteralgebra $\mathfrak{k} = (e_0, e_1, e_2)$ und dem kommutativen Ideal $\mathfrak{r} = (e_3, e_4, e_5)$. Dem entspricht eine Zerlegung $G_{6,8} = K \ltimes R$, und wir finden $L^1(G_{6,8}) = L^1(K, L^1(R)) \cong L^1(K, A(\mathbb{R}^3))$, wobei K auf $\mathbb{R}^3$ (und dann auch auf $A(\mathbb{R}^3)$) durch $K=\left\{\begin{pmatrix} e^s & 0 & b \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \,\middle|\, s,t,b\in\mathbb{R}\right\}$ wirkt. Wir schreiben K als semidirektes Produkt $K=G\ltimes H$ mit $G=\left\{\begin{pmatrix} e^s & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s\in\mathbb{R}\right\}$ und $H=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \,\middle|\, t,b\in\mathbb{R}\right\}$. Weiter sei $x=(0,0,1)\in\mathbb{R}^3$ und $X=Kx=Hx$ sowie $\mathcal{Q}=\{f|_X \,|\, f\in A(\mathbb{R}^3), f(y,0,0)=0 \text{ für alle } y\in\mathbb{R}\}$. X läßt sich durch $h\to hx$ mit H identifizieren. Die Wirkung von H auf X geht dann in die Translation über, und die Wirkung von G entspricht der Konjugation. Weiter erfüllt $\mathcal{Q}$, aufgefaßt als Algebra von Funktionen auf H, die Voraussetzungen 1)—5) von Theorem 4 in [8]. Also ist $L^1(K,\mathcal{Q})\cong L^1(G, L^1(H,\mathcal{Q}))$ nach (C) nichtsymmetrisch. Und $L^1(K,\mathcal{Q})$ ist ein Subquotient von $L^1(G_{6,8})$.

Zu $\mathfrak{g}_{6,0}(\alpha)$. $\mathfrak{g}_{6,0}(\alpha)$ ist die semidirekte Summe aus $\mathfrak{s}=(e_0,e_1)$ und dem kommutativen Ideal $\mathfrak{r}=(e_2,e_3,e_4,e_5)$, also $G_{6,0}(\alpha)=S\ltimes R$ und folglich

$$L^1(G_{6,0}(\alpha))=L^1(S,L^1(R))=L^1(S,A(\mathbb{R}^4))\cong L^1(S,A(\mathbb{C}^2)),$$

wobei S durch $S=\left\{e^{it}\begin{pmatrix} e^{\alpha t} & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t,b\in\mathbb{R}\right\}$ auf $\mathbb{C}^2$ wirkt. Erneut betrachten wir die Bahn X durch den Punkt $(0,1)$, d.h. $X=\{(bz,z)\mid b\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{T}\}$, wobei $\mathbb{T}$ die Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrage 1 bezeichnet. Setzen wir nun

$$\mathcal{Q}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\mid \exists\varphi\in A(\mathbb{C}^2) \text{ mit } \varphi(xz,z)=f(x), \forall z\in\mathbb{T}\},$$

so ist $L^1(S,\mathcal{Q})$ ein Subquotient von $L^1(G_{6,0}(\alpha))$, wobei $s=e^{it}\begin{pmatrix} e^{\alpha t} & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in S$ auf $f\in\mathcal{Q}$ durch $f^s(x)=f(e^{\alpha t}x+b)$ operiert. $L^1(S,\mathcal{Q})\cong L^1(\mathbb{R},L^1(\mathbb{R},\mathcal{Q}))$ ist aber nach (C) nichtsymmetrisch.

Zu $\mathfrak{g}_{6,1}(\alpha)$. Für einen nicht-trivialen Charakter χ des Zentrums von $G_{6,1}(\alpha)$ kann man $L^1(G_{6,1}(\alpha))_{\bar\chi}$ als $L^1(\mathbb{R},L^1(\mathbb{R}^2,A(\mathbb{R}^2)))$ schreiben, welches nach (C) nichtsymmetrisch ist.

Zu $\mathfrak{g}_{6,2}(\alpha)$. Der (e_1,e_3,e_5) entsprechende Normalteiler N von $G_{6,2}(\alpha)$ genügt den Voraussetzungen von (F). Also ist $pL^1(G_{6,2}(\alpha))_{\bar\chi}p$ isomorph zu $L^1(H/Y,w)_{\bar\chi}$, wobei die Liesche Algebra von H/Y isomorph zu $(\bar e_0,\bar e_2,\bar e_4,\bar e_5)$ mit $[\bar e_2,\bar e_4]=\bar e_5$, $[\bar e_0,\bar e_2]=\alpha\bar e_4$ und $[\bar e_0,\bar e_4]=-\alpha\bar e_2$ ist. Man findet $pL^1(G_{6,2}(\alpha))_{\bar\chi}p\cong L^1(\mathbb{R},\mathcal{A},\cosh^{\frac{1}{2}})$ mit $\mathcal{A}\cong L^1(\mathbb{R},A(\mathbb{R}))$, wobei $\mathbb{R}$ als kompakte Gruppe auf $\mathcal{A}$ wirkt. Wichtig an dieser Feststellung ist lediglich, daß der Raum $\mathcal{A}$ der Fixpunkte von Null verschieden ist (was man unmittelbar verifiziert). also enthält $pL^1(G_{6,2}(\alpha))_{\bar\chi}p$ die abgeschlossene Unteralgebra

$$L^1(\mathbb{R},\mathcal{A}^{\mathbb{R}},\cosh^{\frac{1}{2}})\cong L^1(\mathbb{R},\cosh^{\frac{1}{2}})\,\hat\otimes\,\mathcal{A}^{\mathbb{R}},$$

und letztere Algebra ist offensichtlich nichtsymmetrisch.

Zu $\mathfrak{g}_{6,3}(\alpha)$ *und* $\mathfrak{g}_{6,3}$. Sei G die zugehörige einfachzusammenhängende Gruppe und χ ein nicht-trivialer Charakter des Zentrums von G. Dann ist $L^1(G)_{\bar\chi}$ isomorph zu $L^1(\mathbb{R},L^1(\mathbb{R}^2,A(\mathbb{R}^2)))$, wobei $\mathbb{R}^2$ der Unteralgebra (e_1,e_4) bzw. (e_2,e_3) entspricht. Aus (C) folgt nun die Nichtsymmetrie von $L^1(G)$.

4. Hier wollen wir den zweiten Teil von Satz 2 beweisen, d.h. die Vollständigkeit der in § 2 gegebenen Liste. Dazu haben wir unten ein Lemma und vier Sätze formuliert, welche wichtige Etappen des Beweises zusammenfassen, die aber natürlich für sich ohne Interesse sind, da es sich sozusagen um „Teilsätze" von Satz 2 handelt.

In [8] wurde bereits ausgeführt, daß $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$ die einzige nichtsymmetrische auflösbare Liesche Algebra in Dimensionen $\leqq 4$ ist. Um alle nichtsymmetrischen fünfdimensionalen auflösbaren Lieschen Algebren festzustellen, haben wir zunächst diese zu bestimmen, welche $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$ als Quotienten zulassen.

Lemma. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine fünfdimensionale Liesche Algebra. Es gebe ein Ideal* $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{g}$ *mit* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{4,9}(0)$. *Dann ist* $\mathfrak{g}$ *isomorph zu* $\mathfrak{g}_5$, *zu* $\tilde{\mathfrak{g}}_5$ *oder zu* $\mathfrak{g}_5(\alpha)$ *mit passendem* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{n}$ das Nilradikal von $\mathfrak{g}$. Dann sind die beiden Fälle möglich:

A) $\mathfrak{n}$ ist isomorph zu $\mathfrak{g}_{4,3}$,

B) $\mathfrak{n}$ ist die direkte Summe aus $\mathfrak{a}$ und einer zur Heisenberg-Algebra isomorphen Algebra.

Zu A). Man findet eine Basis $e_0, \ldots, e_4$ von $\mathfrak{g}$ derart, daß sich die nicht-verschwindenden Produkte als $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_0, e_1] = -e_1 + \lambda_1 e_4$, $[e_0, e_2] = e_2 + \lambda_2 e_4$, $[e_0, e_3] = \lambda_3 e_4$, $[e_0, e_4] = \lambda_4 e_4$ schreiben lassen.

Aus der Jacobi-Identität folgt $\lambda_3 = 0$ und $\lambda_4 = -1$. Ändert man e_2 bzw. e_0 um ein passendes Vielfaches von e_4 bzw. e_3 ab, so kann man $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ erreichen, also $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_5$.

Zu B). Man findet eine Basis $e_0, \ldots, e_4$ von $\mathfrak{g}$ mit den nichtverschwindenden Produkten $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_0, e_1] = -e_1 + \lambda_1 e_4$, $[e_0, e_2] = e_2 + \lambda_2 e_4$, $[e_0, e_4] = \lambda_4 e_4$. Ist $\lambda_4 \neq \pm 1$, so kann man durch Modifikation von e_1 und e_2 um Vielfache von e_4 erreichen, daß $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Dann liegt die Algebra $\mathfrak{g}_5(\lambda_4)$ vor. Ist $\lambda_4 = +1$, so kann man immer noch $\lambda_1 = 0$ herstellen. Ist nun $\lambda_2 = 0$, so liegt $\mathfrak{g}_5(1)$ vor; ist aber $\lambda_2 \neq 0$, so ersetzt man e_4 durch $[e_0, e_2] - e_2$ und findet $\tilde{\mathfrak{g}}_5$. Analog führt $\lambda_4 = -1$ zu $\mathfrak{g}_5(-1)$ und zu $\mathfrak{h} = (h_0, \ldots, h_4)$ mit $[h_1, h_2] = h_3$, $[h_0, h_1] = -h_1 - h_4$, $[h_0, h_2] = h_2$ und $[h_0, h_4] = -h_4$. Nun ist aber $e_0 \to -h_0, e_1 \to h_2, e_2 \to h_1, e_3 \to -h_3, e_4 \to h_4$ ein Isomorphismus von $\tilde{\mathfrak{g}}_5$ auf $\mathfrak{h}$.

Bei der weiteren Suche nach nichtsymmetrischen fünfdimensionalen Algebren können wir nunmehr annehmen, daß alle echten Quotienten symmetrisch sind, insbesondere ist nach (E) die Dimension des Zentrums höchstens gleich 1.

Satz 3. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine auflösbare nichtsymmetrische, fünfdimensionale Liesche Algebra. Alle echten Quotienten von* $\mathfrak{g}$ *seien symmetrisch. Besitzt* $\mathfrak{g}$ *ein nicht-zentrales eindimensionales Ideal* $\mathfrak{a}$, *so ist* $\mathfrak{g}$ *isomorph zu* $\mathfrak{b}_5$.

Beweis. Nach (B) ist der Zentralisator $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ nichtsymmetrisch, also isomorph zu $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$. Man findet also eine Basis a, x, y, z von $\mathfrak{c}$ mit $[a, x] = -x$, $[a, y] = y$, $[x, y] = z$. Weiter sei noch ein $d \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{c}$ mit $[d, z] = z$ gewählt. $\mathfrak{g}$ ist die semidirekte Summe $\mathbb{R}d \ltimes \mathfrak{c}$. Ändert man d um Vielfache von x, y und a passend ab, so kann man erreichen, daß

$[d, x] = \alpha_1 x + \beta y$ und $[d, y] = \alpha_2 x$. Ändert man ferner a um ein passendes Vielfaches von z ab, so kann man erreichen, daß $[d, a] = \lambda_1 a + \lambda_2 x + \lambda_3 y$. Wir verwenden nun, daß d eine Derivation von $\mathfrak{c}$ ist. Es gilt also

$$z = [d, z] = [[d, x], y] + [x, [d, y]] = [\alpha_1 x + \beta y, y] + [x, \alpha_2 x] = \alpha_1 z$$

und mithin $\alpha_1 = 1$. Aus $-[d, x] = [d, [a, x]] = [[d, a], x] + [a, [d, x]]$ ergibt sich

$$0 = \lambda_3 = \lambda_1 = \beta .$$

Und aus $[d, y] = [d, [a, y]] = [[d, a], y] + [a, [d, y]]$ folgt $\alpha_2 = \lambda_2 = 0$. Man findet also eine Basis d, a, x, y, z von $\mathfrak{g}$ mit $[a, x] = -x$, $[a, y] = y$, $[x, y] = z$, $[d, x] = x$ und $[d, z] = z$. Folglich gilt $\mathfrak{g} = \mathfrak{b}_5$.

Satz 4. *Sei $\mathfrak{g}$ eine auflösbare nichtsymmetrische, fünfdimensionale Liesche Algebra. Alle echten Quotienten von $\mathfrak{g}$ seien symmetrisch. $\mathfrak{g}$ besitze kein eindimensionales nichtzentrales Ideal. Ist dann $\mathfrak{a}$ ein kommutatives zweidimensionales Ideal in $\mathfrak{g}$, so gilt entweder*

(i) $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})|_{\mathfrak{a}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

oder

(ii) $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})|_{\mathfrak{a}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$

für eine passende Basis von $\mathfrak{a}$.

Beweis. 1. *Fall.* $\mathfrak{a}$ ist nicht irreduzibel, es gibt also ein (zentrales) eindimensionales Ideal $\mathfrak{b} \subsetneqq \mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ nicht-zentral in $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$, so liegt die im Satz beschriebene erste Alternative vor. Ist aber $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ zentral in $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$, so ist nach (B) der Zentralisator $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ vierdimensional und nichtsymmetrisch, also isomorph zu $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$. Aber diese Algebra besitzt kein zweidimensionales Zentrum, so daß dieser Fall nicht möglich ist.

2. *Fall.* $\mathfrak{a}$ ist irreduzibel. Man findet dann eine Basis x, y von $\mathfrak{a}$ und Linearformen $\varphi, \psi \in \mathfrak{g}^*$ mit $[t, x] = \varphi(t)x - \psi(t)y$, $[t, y] = \psi(t)x + \varphi(t)y$ für alle $t \in \mathfrak{g}$, wobei $\psi \neq 0$ wegen der Irreduzibilität ist. Wir haben $\varphi = 0$ zu zeigen. Nehmen wir also $\varphi \neq 0$ an. Dann ist $\operatorname{Kern} \varphi \cong \mathfrak{g}_{4,9}(0)$ nach (B). Das in $\operatorname{Kern} \varphi$ gelegene Ideal $\mathfrak{a}$ umfaßt wegen der bekannten Struktur von $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$ das eindimensionale Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\operatorname{Kern} \varphi$. $\mathfrak{z}$ ist auch in $\mathfrak{g}$ ein Ideal. Also ist $\mathfrak{a}$ im Widerspruch zur Annahme nicht irreduzibel.

Für das Folgende nehmen wir an, daß die Liesche Algebra $\mathfrak{g}$ den Voraussetzungen von Satz 4 genügt. Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{g}$ isomorph zu $\mathfrak{g}_{5,4}$ ist. Dazu behandeln wir die fünfdimensionalen Algebren nach der Struktur ihrer Kommutatoralgebra $\mathfrak{g}'$. Nach (D) ist $\mathfrak{g}'$ nicht kommutativ, folglich $\dim \mathfrak{g}' \geqq 3$.

Sei zunächst $\dim \mathfrak{g}' = 3$, also $\mathfrak{g}' \cong$ Heisenberg-Algebra. Das Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{g}'$ ist ein eindimensionales Ideal in $\mathfrak{g}$, also zentral in $\mathfrak{g}$. Es sei $\mathfrak{c}$ der Zentralisator von $\mathfrak{g}'$ in $\mathfrak{g}$. Weiter seien $\operatorname{Der}_0(\mathfrak{g}')$ die Liesche Algebra der Derivationen $d: \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$ mit $d\mathfrak{z} = 0$ und $\operatorname{Inn}(\mathfrak{g}')$ die Liesche Algebra der inneren Derivationen auf $\mathfrak{g}'$. Bekanntlich ist $\operatorname{Der}_0(\mathfrak{g}')/\operatorname{Inn}(\mathfrak{g}')$ isomorph zu $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, der Lieschen Algebra der halbeinfachen Lieschen Gruppe aller reellen unimodularen zweireihigen Matrizen. Das Kompositum $\mathfrak{g} \to \operatorname{Der}_0(\mathfrak{g}') \to \operatorname{Der}_0(\mathfrak{g}')/\operatorname{Inn}(\mathfrak{g}')$ hat den Kern $\mathfrak{c} + \mathfrak{g}'$. Da $\mathfrak{g}/\mathfrak{c} + \mathfrak{g}'$ kommutativ ist und $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ keine zweidimensionalen kommutativen Teilalgebren besitzt, ist $\dim \mathfrak{c} + \mathfrak{g}' = 4$ oder $\mathfrak{c} + \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. Im ersten Fall ist $\dim \mathfrak{c} = 2$, da $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{g}' = \mathfrak{z}$. Da $\mathfrak{c}' \subset \mathfrak{c} \cap \mathfrak{g}' = \mathfrak{z}$, ist $\mathfrak{c}$ nilpotent, also kommutativ. Nach Satz 4 wirkt $\mathfrak{g}$ wie $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right\}$ auf $\mathfrak{c}$. Das ist aber unmöglich, da $\mathfrak{g}'$ trivial auf $\mathfrak{c}$ wirkt. Ist aber $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} + \mathfrak{g}'$, so ist $\mathfrak{g}' = \mathfrak{c}' + \mathfrak{g}'' \subseteqq \mathfrak{c} \cap \mathfrak{g}' + \mathfrak{g}'' = \mathfrak{z}$, Widerspruch.

Ist $\dim \mathfrak{g}' = 4$, so sind die beiden folgenden Fälle möglich.

I) $\mathfrak{g}'$ ist isomorph zur direkten Summe aus $\mathbb{R}$ und der Heisenberg-Algebra.

II) $\mathfrak{g}'$ besitzt eine Basis e_2, e_3, e_4, e_5 mit $[e_2, e_3] = e_4$ und $[e_2, e_4] = e_5$, d.h. $\mathfrak{g}'$ ist isomorph zu $\mathfrak{g}_{4,3}$.

Zu I). Das Zentrum $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{g}'$ ist ein zweidimensionales Ideal in $\mathfrak{g}$ und enthält das eindimensionale Ideal $\mathfrak{g}''$. Nach Satz 4 wirkt $\mathfrak{g}$ wie $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right\}$ auf $\mathfrak{a}$. Das ist aber unmöglich, da $\mathfrak{g}'$ trivial auf $\mathfrak{a}$ wirkt.

Zu II). Es gilt $(e_5) = \mathfrak{z} =$ Zentrum von $\mathfrak{g}'$, $(e_4, e_5) = \mathfrak{g}''$, und $(e_3, e_4, e_5) =: \mathfrak{h} =$ Zentralisator von $\mathfrak{g}''$ in $\mathfrak{g}'$. Also ist $\mathfrak{g}' \supset \mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}'' \supset \mathfrak{z}$ eine charakteristische Kette. Nach Satz 4 ist (e_5) zentral in $\mathfrak{g}$, und man kann ein $e_1 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}'$ mit $[e_1, e_4] = e_4$ finden. Setzt man allgemein $[e_1, e_3] = \lambda_1 e_3 + \lambda_2 e_4 + \lambda_3 e_5$ und $[e_1, e_2] = \mu_1 e_2 + \mu_2 e_3 + \mu_3 e_4 + \mu_4 e_5$ an, so liefert die Jacobi-Identität

$$e_4 = [e_1, e_4] = [e_1, [e_2, e_3]] = [[e_1, e_2], e_3] + [e_2, [e_1, e_3]] = \mu_1 e_4 + \lambda_1 e_4 + \lambda_2 e_5 ,$$

also $\lambda_2 = 0$ und $\mu_1 = \lambda_1 = 1$, sowie

$$0 = [e_1, e_5] = [e_1, [e_2, e_4]] = [[e_1, e_2], e_4] + [e_2, [e_1, e_4]] = \mu_1 e_5 + e_5 ,$$

also $\mu_1 = -1$ und dann $\lambda_1 = 2$. Es gilt also $[e_2, e_3] = e_4$, $[e_2, e_4] = e_5$, $[e_1, e_4] = e_4$, $[e_1, e_3] = 2e_3 + \lambda_3 e_5$ und $[e_1, e_2] = -e_2 + \mu_2 e_3 + \mu_3 e_4 + \mu_4 e_5$. Man sieht, daß $\mathrm{ad}(e_1)$ auf $\mathfrak{g}'$ die Eigenwerte 0, 1, 2 und -1 hat. Es gibt also eine Basis von $\mathfrak{g}'$, die aus Eigenvektoren für $\mathrm{ad}(e_1)$ besteht. Diese kann man so normieren, daß die obige Multiplikationstabelle für $\mathfrak{g}'$ erhalten bleibt. Anders ausgedrückt, man darf $\lambda_3 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$ setzen, das ergibt dann aber gerade die Algebra $\mathfrak{g}_{5,4}$.

Wenden wir uns nun den sechsdimensionalen Algebren zu, die wir nach dem gleichen Schema behandeln.

Satz 5. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine auflösbare, nichtsymmetrische Liesche Algebra der Dimension* 6. *Alle echten Quotienten von* $\mathfrak{g}$ *seien symmetrisch. Besitzt* $\mathfrak{g}$ *ein nicht-zentrales, eindimensionales Ideal* $\mathfrak{a}$, *so ist* $\mathfrak{g}$ *isomorph zu* $\mathfrak{g}_{6,7}$ *oder zu* $\mathfrak{g}_{6,8}$.

Beweis. Nach (B) ist der Zentralisator $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ nicht-symmetrisch. Beachtet man, daß $\mathfrak{c}$ ein Zentrum besitzt, so kommen nur die Fälle $\mathfrak{c} \cong \mathfrak{g}_{5,4}$, $\mathfrak{c} \cong \tilde{\mathfrak{g}}_5$ und $\mathfrak{c} \cong \mathfrak{g}_5(\tau)$ in Frage. Sei zunächst $\mathfrak{c} \cong \mathfrak{g}_{5,4}$. Durch elementare Rechnungen kann man zeigen, daß dann $\mathfrak{g}$ eine Basis $(d, e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ besitzt mit $(e_0, \ldots, e_4) = \mathfrak{c}$, die e's multiplizieren sich wie in der Definition von $\mathfrak{g}_{5,4}$ angegeben, und weiter gilt $[d, e_4] = e_4$, $[d, e_2] = -e_2$ und $[d, e_1] = e_1$. Dann ist aber $\mathfrak{g}/(e_4)$ isomorph zu $\mathfrak{b}_5$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Nehmen wir als nächstes an, daß $\mathfrak{c} \cong \tilde{\mathfrak{g}}_5$ oder $\mathfrak{c} \cong \mathfrak{g}_5(\tau)$ mit $\tau \neq 0$. Sei $\mathfrak{c} = (e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ mit der in § 2 gegebenen Multiplikationstabelle. Dann ist $\mathfrak{c}'$ vierdimensional. $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}'$ ist kommutativ (wenn nicht, so wäre $\mathrm{ad}(e_0) : \mathfrak{c}' \to \mathfrak{c}'$ nilpotent, was offenbar nicht der Fall ist), also gilt $\mathfrak{g}' = \mathfrak{c}'$. Wir wählen nun ein $d \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{c}$ mit $[d, e_3] = e_3$ (e_3 erzeugt das Zentrum von $\mathfrak{c}$). (e_3, e_4) ist invariant unter d (als Zentrum von $\mathfrak{c}'$). Durch Abändern von d um ein Vielfaches von e_0 kann man erreichen, daß $[d, e_4] = \mu e_3$.

Es gilt $[d,[e_0,e_4]]=[d,\tau e_4]=\mu\tau e_4$ (mit $\tau=1$ im Falle $\mathfrak{c}\cong\tilde{\mathfrak{g}}_5$) und andererseits $[d,[e_0,e_4]]=[[d,e_0],e_4]+[e_0,[d,e_4]]=0$, da $[d,e_0]\in\mathfrak{g}'=\mathfrak{c}'$ mit e_4 vertauscht. Also ist $\mu\tau=0$ und folglich $\mu=0$. Damit ist auch (e_4) ein eindimensionales nicht-zentrales Ideal in $\mathfrak{g}$, und der Zentralisator $\mathfrak{d}$ von (e_4) folglich isomorph zu $\tilde{\mathfrak{g}}_5$ oder zu $\mathfrak{g}_5(\tau')$, wobei $\tau'=0$ zunächst nicht ausgeschlossen ist. Aber $\mathfrak{d}$ enthält e_3 und d, und es gilt $[d,e_3]=e_3$. $\mathfrak{d}''$ ist zentral in $\mathfrak{d}$ und eindimensional. Wegen $\mathfrak{d}''\subseteq\mathfrak{g}''=\mathfrak{c}''=(e_3)$ gilt $\mathfrak{d}''=(e_3)$ und e_3 ist nicht zentral in $\mathfrak{d}$, Widerspruch.

Nehmen wir als letztes an, daß $\mathfrak{c}$ isomorph zu $\mathfrak{g}_5(0)$ ist.

1. *Fall.* Die (eindimensionale) Wirkung von $\mathfrak{g}$ auf dem Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{c}$ sei diagonalisierbar.

1.a. $\mathfrak{g}$ wirke nicht-trivial auf $\mathfrak{c}''$. Man wähle ein Ideal $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{c}''=\mathfrak{z}$ und betrachte die Algebra $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$. $\bar{\mathfrak{g}}$ hat ein eindimensionales nicht-zentrales Ideal $\mathfrak{z}/\mathfrak{b}$, und der Zentralisator $\bar{\mathfrak{c}}=\mathfrak{c}/\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{z}/\mathfrak{b}$ in $\bar{\mathfrak{g}}$ ist isomorph zu $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$. Aus diesen Daten haben wir aber im Beweis von Satz 3 hergeleitet, daß $\bar{\mathfrak{g}}$ isomorph zu $\mathfrak{b}_5$ ist, im Widerspruch zur Annahme, daß alle Quotienten symmetrisch sind.

1.b. $\mathfrak{c}''$ sei zentral in $\mathfrak{g}$. Man findet eine Basis $e_1,\ldots,e_5$ von $\mathfrak{c}$ derart, daß (e_5) ein nicht-zentrales Ideal in $\mathfrak{g}$ ist, und daß $[e_1,e_2]=-e_2$, $[e_1,e_3]=e_3$ und $[e_2,e_3]=e_4$ gilt. Wählt man ein passendes $d\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{c}$ (der Raum der Derivationen auf $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$, welche e_4 annullieren, modulo den inneren Derivationen ist eindimensional), so gilt $[d,e_1]=\tau e_4+\mu_1 e_5$, $[d,e_2]=\mu_2 e_5$, $[d,e_3]=\mu_3 e_5$, $[d,e_4]=\mu_4 e_5$, $[d,e_5]=e_5$. Modifiziert man nun noch e_1,e_2,e_3,e_4 um passende Vielfache von e_5, so erreicht man $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=0$. Ist $\tau=0$, so ist (d,e_5) ein Ideal in $\mathfrak{g}$, und $\mathfrak{g}/(d,e_5)\cong\mathfrak{g}_{4,9}(0)$, Widerspruch. Ist $\tau\neq0$, so betrachte man die Basis $e_2'=\tau e_2$, $e_4'=\tau e_4$, e_1,e_3,e_5,d; in dieser Basis stimmt die Multiplikationstabelle von $\mathfrak{g}$ mit der von $\mathfrak{g}_{6,7}$ überein.

2. *Fall.* Die Wirkung von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{z}$ sei nicht diagonalisierbar. Man findet dann eine Basis d,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5 von $\mathfrak{g}$ mit

$$[e_1,e_2]=-e_2,\quad [e_1,e_3]=e_3,\quad [e_2,e_3]=e_5,\quad [d,e_5]=e_5,\quad [d,e_4]=e_4+e_5\,,$$

sowie

$$[d,e_1]=\tau_1e_1+\cdots+\tau_5e_5,\quad [d,e_2]=\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_5e_5,\quad [d,e_3]=\mu_2e_2+\cdots+\mu_5e_5\,.$$

Ändert man d um passende Vielfache von e_2,e_3 und e_1 ab, so kann man $\lambda_5=\mu_5=\lambda_2=0$ erreichen. Ändert man weiter e_1 um eine passende Linearkombination in e_4 und e_5 ab, so läßt sich $\tau_4=\tau_5=0$ erzielen. Nutzt man noch aus, daß $\operatorname{ad}(d)$ eine Derivation auf $\mathfrak{c}$ ist, so kann man sämtliche Koeffizienten bestimmen. Man erhält $\mu_3=1$, alle anderen verschwinden. Das bedeutet aber gerade, daß die Algebra $\mathfrak{g}_{6,8}$ vorliegt.

Satz 6. *Sei $\mathfrak{g}$ eine auflösbare nichtsymmetrische Liesche Algebra der Dimension 6. Alle echten Quotienten von $\mathfrak{g}$ seien symmetrisch. $\mathfrak{g}$ enthalte kein eindimensionales, nicht-zentrales Ideal. Weiter sei $\mathfrak{g}$ weder zu $\mathfrak{g}_{6,3}(0)$ noch zu $\mathfrak{g}_{6,4}$ isomorph. Ist dann $\mathfrak{a}$ ein zweidimensionales kommutatives Ideal in $\mathfrak{g}$, so wirkt $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{a}$ wie* $\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ b & 0\end{pmatrix}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$ *oder wie* $\left\{\begin{pmatrix} 0 & t\\ -t & 0\end{pmatrix}\,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}$ *für eine passende Basis von $\mathfrak{a}$.*

Beweis. Nehmen wir zunächst an, daß $\mathfrak{a}$ kein irreduzibler $\mathfrak{g}$-Modul ist. Es gibt also ein eindimensionales, nach Voraussetzung zentrales Ideal $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ nicht-zentral in $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$, so wirkt $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{a}$ wie $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right\}$. Nehmen wir also weiter an, daß $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ zentral in $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ ist. Dann ist nach (E) der Zentralisator $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ fünfdimensional und nach (B) nichtsymmetrisch. Nun gibt es nur eine fünfdimensionale nichtsymmetrische Liesche Algebra mit zweidimensionalem Zentrum, nämlich $\mathfrak{g}_5\,(0)$. Man findet dann eine Basis $e_1, \ldots, e_5$ von $\mathfrak{c}$ $(\mathfrak{a} = (e_4, e_5))$ und ein $d \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{c}$ mit $[e_1, e_2] = -e_2$, $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_4$, $[d, e_5] = e_4$, $[d, e_2] = \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$, $[d, e_3] = \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4$ ($\mathfrak{c}'$ ist ein Ideal in $\mathfrak{g}$) und $[d, e_1] = \tau_1 e_1 + \cdots + \tau_5 e_5$. Unter Verwendung der Jacobi-Identität findet man $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \mu_2 = \mu_4 = \tau_1 = 0$. Modifiziert man d um eine passende Linearkombination in e_1, e_2, e_3 und e_4, so kann man auch noch $\mu_3 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0$ einrichten. Man erhält eine Basis $d, e_1, \ldots, e_5$ mit $[e_1, e_2] = -e_2$, $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_4$, $[d, e_5] = e_4$, $[d, e_1] = \tau e_5$. Für $\tau = 0$ ist diese Algebra gerade $\mathfrak{g}_{6,3}\,(0)$. Ist aber $\tau \neq 0$, so kann man durch $d' := |\tau|^{-\frac{1}{2}} d$ und $e_5' := |\tau|^{\frac{1}{2}} e_5$ zunächst erreichen, daß $[d', e_1] = \pm e_5'$. Im Falle des positiven Vorzeichens hat man gerade die Algebra $\mathfrak{g}_{6,4}$. Man kann sich aber leicht überlegen, daß auch im Falle des negativen Vorzeichens die erhaltene Algebra isomorph zu $\mathfrak{g}_{6,4}$ ist.

Nehmen wir nun an, daß $\mathfrak{a}$ ein irreduzibler $\mathfrak{g}$-Modul ist. Dann findet man eine Basis x, y von $\mathfrak{a}$ und Linearformen $\varphi, \psi \in \mathfrak{g}^*$ $(\psi \neq 0)$ mit

$$[t, x] = \varphi(t)x - \psi(t)y, \quad [t, y] = \psi(t)x + \varphi(t)y\,.$$

Es ist $\varphi = 0$ zu zeigen. Nehmen wir dazu $\varphi \neq 0$ an. Dann ist $\operatorname{Kern}\varphi$ nichtsymmetrisch, also isomorph zu $\mathfrak{g}_5$, $\tilde{\mathfrak{g}}_5$, $\mathfrak{g}_5\,(\tau)$, $\mathfrak{b}_5$ oder $\mathfrak{g}_{5,4}$. Der Fall $\operatorname{Kern}\varphi \neq \operatorname{Kern}\psi$ ist nicht möglich, da $\operatorname{Kern}\varphi$ eine exponentielle Liesche Algebra ist. Im Falle $\operatorname{Kern}\varphi = \operatorname{Kern}\psi$ ist aber $\mathfrak{a}$ zentral in $\operatorname{Kern}\varphi$. Dann kommt nur $\operatorname{Kern}\varphi \cong \mathfrak{g}_5\,(0)$ in Betracht. In diesem Falle ist aber $(\operatorname{Kern}\varphi)''$ ein eindimensionales Ideal und in $\mathfrak{a}$ gelegen, also ist $\mathfrak{a}$ im Widerspruch zur Annahme nicht irreduzibel.

Nach diesen Vorübungen gehen wir nun wie im fünfdimensionalen Fall vor. Es sei im folgenden $\mathfrak{g}$ stets eine Liesche Algebra, die den Voraussetzungen von Satz 6 genügt. Wir zeigen, daß jedes solche $\mathfrak{g}$ in der in § 2 angegebenen Liste enthalten ist, indem wir die Algebren der Reihe nach gemäß der Struktur ihrer Kommutator-Algebra behandeln. Dazu können wir nach (D) weiter annehmen, daß $\mathfrak{g}'$ nicht kommutativ ist.

Sei also zunächst $\mathfrak{g}'$ isomorph zur dreidimensionalen Heisenberg-Algebra. Das Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{g}'$ ist ein eindimensionales zentrales Ideal in $\mathfrak{g}$. Es sei $\mathfrak{c}$ der Zentralisator von $\mathfrak{g}'$ in $\mathfrak{g}$. Dann gilt $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{g}' = \mathfrak{z}$. Wie im fünfdimensionalen Fall sieht man, daß die Codimension von $\mathfrak{c} + \mathfrak{g}'$ gleich 0 oder 1 ist. Auch hier scheidet $\mathfrak{c} + \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ aus dem gleichen Grunde aus. Also ist $\dim \mathfrak{c} = 3$. Da $\mathfrak{c}' \subseteqq \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{c} = \mathfrak{z}$, ist $\mathfrak{c}$ kommutativ oder zur dreidimensionalen Heisenberg-Algebra isomorph. Nehmen wir zunächst an, daß $\mathfrak{c}$ kommutativ ist. Es sei $X \in \mathfrak{g} \setminus (\mathfrak{g}' + \mathfrak{c})$ beliebig gewählt, $\operatorname{ad}(X) : \mathfrak{c} \to \mathfrak{c}$ bildet dann $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{z}$ ab, hat also einen mindestens zweidimensionalen Kern. Man kann also ein $Y \in \mathfrak{c} \setminus \mathfrak{z}$ mit $[X, Y] = 0$ finden. Dann liegt Y im Zentrum von $\mathfrak{g}$. Das Zentrum von $\mathfrak{g}$ ist also mindestens zweidimensional, Widerspruch zu (E). Nehmen wir weiter an, daß $\mathfrak{c}$ zur dreidimensionalen Heisenberg-Algebra isomorph ist. Es sei $\mathfrak{d}$ der Zentralisator von $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{g}$. Dann gilt $\mathfrak{d} \cap \mathfrak{c} = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{c} = \mathfrak{z}$ und $\mathfrak{d} \supseteqq \mathfrak{g}'$. Ist $\mathfrak{d} \neq \mathfrak{g}'$, so ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{d} + \mathfrak{c}$ und $\dim \mathfrak{d} = 4$. Weiter ist dann $\mathfrak{d}$ nichtsymmetrisch (denn mit $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{c}$ wäre auch $\mathfrak{d} \oplus \mathfrak{c}$ und dann $\mathfrak{g}$ als Quotient von $\mathfrak{d} \oplus \mathfrak{c}$

symmetrisch), also $\mathfrak{b} \cong \mathfrak{g}_{4,9}(0)$. Offenbar ist dann $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_{6,3}(0)$. Ist aber $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}'$, so wirkt die dreidimensionale kommutative Algebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ treu auf $\mathfrak{c} \cong$ Heisenberg-Algebra. Dieser Fall ist unmöglich.

Als nächstes behandeln wir die Fälle einer vierdimensionalen Ableitung, d.h. die Fälle

I) $\mathfrak{g}'$ ist isomorph zu $\mathbb{R} \oplus$ Heisenberg-Algebra,

II) $\mathfrak{g}'$ ist isomorph zu $\mathfrak{g}_{4,3}$.

Zu I). Analog dem fünfdimensionalen Fall kann man zeigen, daß dieser Fall unter den Voraussetzungen von Satz 6 nicht auftritt.

Zu II). Das eindimensionale Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{g}'$ ist nach Voraussetzung zentral in $\mathfrak{g}$. Weiter ist $\mathfrak{g}'' \supseteq \mathfrak{z}$ ein zweidimensionales kommutatives Ideal in $\mathfrak{g}$, auf dem $\mathfrak{g}$ nach Satz 6 wie $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right\}$ wirkt. Es sei $\mathfrak{c}$ der Zentralisator von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$. Man findet dann (vgl. Rechnung im fünfdimensionalen Fall) ein $e_1 \in \mathfrak{g} \setminus (\mathfrak{c} + \mathfrak{g}')$ und eine Basis e_2, e_3, e_4, e_5 von $\mathfrak{g}'$ derart, daß sich die e's in der folgenden Weise multiplizieren

$$[e_2, e_3] = e_4, \quad [e_2, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_4] = e_4, \quad [e_1, e_3] = 2e_3, \quad [e_1, e_2] = -e_2 .$$

Um eine Basis von $\mathfrak{g}$ zu erhalten, wähle man nun noch ein $d \in \mathfrak{c} \setminus \mathfrak{g}'$ und setze

$$[d, e_1] = \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5, \quad [d, e_2] = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5$$

sowie $[d, e_3] = \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4 + \mu_5 e_5$ an. Modifiziert man d um passende Vielfache von e_3 und e_4, so kann man $\alpha_5 = 0 = \beta_3$ erreichen. Verwendet man nun, daß $[d, -]$ eine Derivation auf $(e_1, \ldots, e_5)$ ist, so findet man $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_5 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$. Man erhält die Algebra

$$[e_2, e_3] = e_4, \quad [e_2, e_4] = e_5, \quad [e_1, e_4] = e_4, \quad [e_1, e_3] = 2e_3, \quad [e_1, e_2] = -e_2, \quad [d, e_1] = \beta e_5 .$$

Hier ist aber (d, e_5) ein kommutatives Ideal, auf dem $\mathfrak{g}$ nicht wie in Satz 6 beschrieben wirkt, Widerspruch!

Es bleibt noch der Fall $\dim \mathfrak{g}' = 5$ zu behandeln. Wir setzen $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}'$ ($\mathfrak{g}'$ ist das Nilradikal in $\mathfrak{g}$) und verwenden die wohlbekannte Klassifikation fünfdimensionaler nilpotenter Liescher Algebren, wobei wir diese Algebren nach fallender Dimension von $\mathfrak{zn}$ (= Zentrum von $\mathfrak{n}$) durchgehen.

III) Es sei $\dim \mathfrak{zn} = 3$, also $\mathfrak{n}$ isomorph zu $\mathbb{R}^2 \oplus$ Heisenberg-Algebra.

$\mathfrak{n}'$ ist ein eindimensionales, also zentrales Ideal. Ist $\mathfrak{zn}/\mathfrak{n}'$ kein irreduzibler $\mathfrak{g}$-($\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$-) Modul, so findet man ein zweidimensionales Ideal $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{zn} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{n}'$, auf dem nach Satz 6 dann $\mathfrak{g}$ notwendigerweise wie $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right\}$ wirkt, Widerspruch! Also ist $\mathfrak{zn}/\mathfrak{n}'$ irreduzibel. Dann ist $\mathfrak{zn}$ halbeinfach. Man findet also ein zweidimensionales Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{zn} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}'$. Auf $\mathfrak{a}$ wirkt $\mathfrak{g}$ nach Satz 6 wie $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}\right\}$. Es sei $e \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}$ gewählt. Da $\mathfrak{n}/\mathfrak{a}$ zur Heisenberg-Algebra isomorph ist, ist die Spur von $\mathrm{ad}(e)$ auf $\mathfrak{n}/\mathfrak{a}$ und dann auch auf $\mathfrak{n}/\mathfrak{zn}$ gleich Null. Besitzt nun $\mathrm{ad}(e)$ auf $\mathfrak{n}/\mathfrak{zn}$ einen reellen Eigenwert $\lambda \neq 0$, so ist auch $-\lambda$ ein Eigenwert, und man sieht leicht, daß $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ isomorph zu $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$ ist, Widerspruch! Besitzt aber $\operatorname{ad}(e)$ keinen solchen Eigenwert, so sind die Eigenwerte rein-imaginär. Dann sind aber alle Eigenwerte von $\operatorname{ad}(e)$ auf $\mathfrak{n}$ rein-imaginär, also $\mathfrak{g}$ nach (A) symmetrisch, Widerspruch.

Sei nun $\dim \mathfrak{z}\mathfrak{n} = 2$. Die möglichen Fälle sind:

IV) $\mathfrak{n}$ ist isomorph zu $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_{4,3}$,

V) $\mathfrak{n}$ besitzt eine Basis $e_1, \ldots, e_5$ mit $[e_1, e_2] = e_4$, und $[e_1, e_3] = e_5$,

VI) $\mathfrak{n}$ besitzt eine Basis $e_1, \ldots, e_5$ mit $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_5$.

Zu IV). Es ist $\dim \mathfrak{n}' = \dim \mathfrak{z}\mathfrak{n} = 2$ und $\dim \mathfrak{z}\mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}' = 1$. Nach Satz 6 wirkt $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{z}\mathfrak{n}$ wie $\left\{\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}\right\}$, aber $\mathfrak{z}\mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}'$ ist ein eindimensionaler invarianter Teilraum, Widerspruch.

Zu V). Nach Satz 6 wirkt $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{z}\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$ wie $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}\right\}$. $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ wirkt regulär (da $\mathfrak{g}' = \mathfrak{n}$) auf dem dreidimensionalen Raum $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}'$, hat also dort einen eindimensionalen invarianten Teilraum $\mathfrak{a}/\mathfrak{n}'$, auf dem $\mathfrak{g}$ nicht-trivial wirkt. $\mathfrak{a}$ ist ein dreidimensionales kommutatives Ideal in $\mathfrak{g}$; der Zentralisator $\mathfrak{c}$ ($\subseteq \mathfrak{n}$) von $\mathfrak{a}$ ist ebenfalls ein kommutatives Ideal in $\mathfrak{g}$ mit $3 \leqq \dim \mathfrak{c} \leqq 4$. Nehmen wir zunächst an, daß $\dim \mathfrak{c} = 4$. Man findet dann eine Basis f_4, f_5 von $\mathfrak{z}\mathfrak{n}$, ein $f_3 \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{z}\mathfrak{n}$, ein $f_1 \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{c}$ und ein $f_0 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}$ mit

$$[f_0, f_3] = \lambda f_3, \quad \lambda \neq 0, \quad [f_1, f_3] = f_5, \quad [f_0, f_5] = f_4 \quad \text{und} \quad [f_0, f_4] = -f_5,$$

wobei über die übrigen Kommutatoren, etwa $[f_0, f_1]$, nichts ausgesagt wird. Die Jacobi-Identität liefert

$$0 = [f_0, [f_1, f_3]] + [f_1, [f_3, f_0]] + [f_3, [f_0, f_1]] = f_4 - \lambda f_5 + [f_3, [f_0, f_1]].$$

Widerspruch, da $[f_3, [f_0, f_1]]$ ein Vielfaches von f_5 ist. Nehmen wir nun an, daß $\dim \mathfrak{c} = 3$. Wir wählen dann ein $g_1 \in \mathfrak{c} \setminus \mathfrak{z}\mathfrak{n}$, ein $g_0 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}$ und eine Basis g_4, g_5 von $\mathfrak{z}\mathfrak{n}$ mit $[g_0, g_1] = \alpha g_1$ ($\alpha \neq 0$) $[g_0, g_4] = -g_5$ und $[g_0, g_5] = g_4$. Die Basis g_1, g_4, g_5 von $\mathfrak{c}$ kann man zu einer Basis g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 von $\mathfrak{n}$ ergänzen mit $[g_2, g_3] = 0$, $[g_1, g_2] = g_4$, $[g_1, g_3] = g_5$. Weiter sei $[g_0, g_2] = \beta_1 g_1 + \cdots + \beta_5 g_5$ und $[g_0, g_3] = \gamma_1 g_1 + \cdots + \gamma_5 g_5$. Verwendet man, daß $\operatorname{ad}(g_0)$ eine Derivation von $\mathfrak{n}$ ist, so findet man $0 = \beta_1 g_5 - \gamma_1 g_4$, also $0 = \beta_1 = \gamma_1$, $-g_5 = \alpha g_4 + \beta_2 g_4 + \beta_3 g_5$, also $\beta_3 = -1$ und $\beta_2 = -\alpha$, sowie

$$g_4 = \alpha g_5 + \gamma_2 g_4 + \gamma_3 g_5, \text{ also } \gamma_2 = 1 \text{ und } \gamma_3 = -\alpha.$$

Folglich hat $\operatorname{ad}(g_0)$ auf $\mathfrak{n}/\mathfrak{c}$ die Eigenwerte $-\alpha \pm i$. Durch Modifikation von g_2 und g_3 um Vielfache von g_4 und g_5 kann man $\beta_4 = \beta_5 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0$ herstellen, und man erkennt die Algebra $\mathfrak{g}_{6,0}(\alpha)$.

Zu VI). $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ wirkt auf $\mathfrak{z}\mathfrak{n}$ wie $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}\right\}$. Weiter ist $\mathfrak{n}'$ ein kommutatives dreidimensionales Ideal in $\mathfrak{g}$. Man wähle zunächst eine Basis f_4, f_5 von $\mathfrak{z}\mathfrak{n}$ und ein $f_0 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}$ mit $[f_0, f_4] = -f_5$ und $[f_0, f_5] = f_4$, sodann ein $f_3 \in \mathfrak{n}' \setminus \mathfrak{z}\mathfrak{n}$ mit $[f_0, f_3] = \lambda f_3$. Als nächstes wähle man $f_1, f_2 \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{n}'$ mit $[f_1, f_3] = f_4$ und $[f_2, f_3] = f_5$. Setzt man noch

$$[f_1, f_2] = \alpha f_3 + \alpha_4 f_4 + \alpha_5 f_5, \quad [f_0, f_1] = \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_5 f_5 \quad \text{und} \quad [f_0, f_2] = \gamma_1 f_1 + \cdots + \gamma_5 f_5,$$

so sind alle Produkte beschrieben. Durch Modifikation von f_1 und f_2 um Vielfache von f_3 kann man $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$ erreichen, ferner ist $\alpha \neq 0$. Die Jacobi-Identität liefert

$$-f_5 = [\beta_1 f_1 + \cdots + \beta_5 f_5, f_3] + [f_1, \lambda f_3] = \beta_1 f_4 + \beta_2 f_5 + \lambda f_4,$$

also $\beta_2 = -1$, $\beta_1 + \lambda = 0$, sowie

$$f_4 = [\gamma_1 f_1 + \cdots + \gamma_5 f_5, f_3] + [f_2, \lambda f_3] = \gamma_1 f_4 + \gamma_2 f_5 + \lambda f_5,$$

also $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 + \lambda = 0$, und letztlich

$$\alpha\lambda f_3 = [\beta_1 f_1 + \cdots + \beta_5 f_5, f_2] + [f_1, \gamma_1 f_1 + \cdots + \gamma_5 f_5] = \beta_1 \alpha f_3 - \beta_3 f_5 + \gamma_2 \alpha f_3 + \gamma_3 f_4,$$

also $\lambda = \beta_1 + \gamma_2$, $\gamma_3 = 0 = \beta_3$. Aus den Gleichungen $\beta_1 + \lambda = 0 = \gamma_2 + \lambda$ und $\lambda = \beta_1 + \gamma_2$ folgt $\lambda = \beta_1 = \gamma_2 = 0$. Man erhält die Algebra (bzw. Algebren)

$$[f_1, f_3] = f_4, \quad [f_2, f_3] = f_5, \quad [f_1, f_2] = \alpha f_3, \quad [f_0, f_4] = -f_5, \quad [f_0, f_5] = f_4,$$
$$[f_0, f_1] = -f_2 + \beta_4 f_4 + \beta_5 f_5, \quad [f_0, f_2] = f_1 + \gamma_4 f_4 + \gamma_5 f_5.$$

Diese ist nach (A) symmetrisch.

Sei letztlich $\dim \mathfrak{z}\mathfrak{n} = 1$. Dann ist $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}\mathfrak{n}$ zentral in $\mathfrak{g}$. Es sind die folgenden Fälle möglich:

VII) $\mathfrak{n}$ hat eine Basis $e_1, \ldots, e_5$ mit $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$,

VIII) $\mathfrak{n}$ hat eine Basis $e_1, \ldots, e_5$ mit $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_5$,

IX) $\mathfrak{n}$ hat eine Basis $e_1, \ldots, e_5$ mit $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_5$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_1, e_3] = e_4$,

X) $\mathfrak{n}$ hat eine Basis $e_1, \ldots, e_5$ mit $[e_1, e_3] = e_5$, $[e_2, e_4] = e_5$.

Zu VII). Sei $e_1, \ldots, e_5$ eine Basis von $\mathfrak{n}$ wie oben.

$$\mathfrak{n} \supsetneqq (e_2, e_3, e_4, e_5) \supsetneqq (e_3, e_4, e_5) \supsetneqq (e_4, e_5) \supsetneqq (e_5)$$

ist eine Folge charakteristischer Ideale in $\mathfrak{n}$, denn $(e_5) = \mathfrak{z}\mathfrak{n}$, $(e_4, e_5)/(e_5)$ ist die Kommutator-Algebra von $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}' = (e_3, e_4, e_5)$ und (e_2, e_3, e_4, e_5) ist der Zentralisator von $\mathfrak{n}'$. Wir wählen ein $e_0 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}$ mit $[e_0, e_4] = e_4$ und setzen an $[e_0, e_3] = \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5$, $[e_0, e_2] = \sigma_2 e_2 + \cdots + \sigma_5 e_5$, $[e_0, e_1] = \tau_1 e_1 + \cdots + \tau_5 e_5$. Aus der Jacobi-Identität folgen die Beziehungen $\lambda_5 = \sigma_4$, $\lambda_4 = \sigma_3$, $\lambda_3 = \tau_1 + \sigma_2$, $0 = \lambda_4$, $\tau_1 + \lambda_3 = 1$ und $\tau_1 + 1 = 0$, also insbesondere $\tau_1 = -1$, $\lambda_3 = 2$ und $\sigma_2 = 3$. Man sieht, daß $\operatorname{ad}(e_0)$ auf $\mathfrak{n}$ die Eigenwerte 0, 2, 1, 3, -1 besitzt. Man findet dann eine Basis von $\mathfrak{n}$, bestehend aus Eigenvektoren von $\operatorname{ad}(e_0)$, ohne an der Multiplikationstabelle von $\mathfrak{n}$ etwas zu ändern, d.h. die Algebra $\mathfrak{g}_{6,5}$ liegt vor.

Zu VIII). Sei $e_1, \ldots, e_5$ eine Basis von $\mathfrak{n}$ wie oben. Nach Satz 6 gibt es ein $e_0 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}$ mit $[e_0\, e_4] = e_4$, $[e_0, e_5] = 0$. (e_2, e_3, e_4, e_5) ist als Zentralisator von $\mathfrak{n}'$ in $\mathfrak{n}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Weiter ist (e_3, e_4, e_5) als Urbild des Zentrums von $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}\mathfrak{n}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Daher kann man $[e_0, e_3] = \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5$, $[e_0, e_2] = \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_5 e_5$, $[e_0, e_1] = \tau_1 e_1 + \cdots + \tau_5 e_5$ ansetzen. Die Jacobi-Identität liefert $\tau_1 = -1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_4 = -\tau_3$, $\lambda_3 = -2$ und $\tau_2 = -\lambda_4$. Wählt man eine Basis von $\mathfrak{n}$, bestehend aus Eigenvektoren von $\operatorname{ad}(e_0)$, so bleiben die in VIII) genannten Relationen für $\mathfrak{n}$ erhalten, d.h. die Algebra $\mathfrak{g}_{6,6}$ liegt vor.

Zu IX). $\mathfrak{n} \supsetneqq (e_2, e_3, e_4, e_5) \supsetneqq (e_3, e_4, e_5) \supsetneqq (e_4, e_5) \supset (e_5)$ ist eine Folge von charakteristischen Idealen in $\mathfrak{n}$, denn $(e_4, e_5)/(e_5)$ ist das Zentrum von $\mathfrak{n}/(e_5)$, $(e_3, e_4, e_5) = \mathfrak{n}'$ und (e_2, e_3, e_4, e_5) ist der Zentralisator von (e_4, e_5). Man findet ein $e_0 \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}$ mit $[e_0, e_4] = e_4$, $[e_0, e_3] = \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5$, $[e_0, e_2] = \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_5 e_5$ und $[e_0, e_1] = \tau_1 e_1 + \cdots + \tau_5 e_5$. Die Jacobi-Identität liefert $\lambda_5 = -\tau_3 + \mu_4$, $\lambda_4 = \mu_3$, $\lambda_3 = \tau_1 + \mu_2$, $\mu_2 = -\lambda_3$, $\tau_1 = -1$, $1 = \tau_1 + \lambda_3$ und $0 = \tau_2 + \lambda_4$. Es folgt $\lambda_3 = 2$, $\mu_2 = -2$ und $\lambda_3 = 2 = \tau_1 + \mu_2 = -3$, Widerspruch!

Zu X). Das Zentrum $\mathfrak{z}\mathfrak{n} = (e_5)$ von $\mathfrak{n}$ ist zentral in $\mathfrak{g}$. Wählt man ein $e \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}$ und setzt $d = \mathrm{ad}(e)|\mathfrak{n}$, so ist d regulär auf $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}\mathfrak{n}$, und nach (A) sind nicht sämtliche Eigenwerte von d in $i\mathbb{R}$ gelegen. Wir unterscheiden nach den Eigenwerten von d:

X A) d besitzt einen Eigenwert der Form $z = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0 \neq \beta$.

Ohne Einschränkung kann man $\alpha = 1$ annehmen. Es sei $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{n}$ ein dreidimensionales Ideal, d habe auf $\mathfrak{a}$ die Eigenwerte z, $\bar{z}$ und 0. $\mathfrak{a}$ ist dann notwendigerweise kommutativ. Komplexifiziert man $\mathfrak{n}$, so sieht man, daß d die (verschiedenen) Eigenwerte $1 + i\beta$, $1 - i\beta$, 0, $-1 + i\beta$, $-1 - i\beta$ hat, also halbeinfach ist. Wir wählen nun eine Basis e_3, e_4, e_5 von $\mathfrak{a}$ mit $de_5 = 0$, $de_3 = e_3 - \beta e_4$ und $de_4 = e_4 + \beta e_3$ sowie ein d-stabiles Komplement V zu $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{n}$. Es gibt dann eine Basis e_1, e_2 von V mit $[e_1, e_3] = e_5$, $[e_1, e_4] = 0$, $[e_2, e_3] = 0$, $[e_2, e_4] = e_5$ und $[e_1, e_2] = 0$. Nutzt man aus, daß V d-stabil und d eine Derivation ist, so findet man $de_1 = -e_1 - \beta e_2$ und $de_2 = \beta e_1 - e_2$, d.h. die Algebra $\mathfrak{g}_{6,1}(\beta)$ liegt vor.

X B) Alle Eigenwerte von d liegen in $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.

Dann hat d wenigstens einen reellen Eigenwert $\lambda \neq 0$, o.B.d.A. $\lambda = 1$. Wir wählen ein $e_4 \in \mathfrak{n}$ mit $de_4 = e_4$. Es sei $\mathfrak{a}$ der Zentralisator von e_4. Dann wirkt d auf $\mathfrak{n}/\mathfrak{a}$ durch Multiplikation mit -1. Wir unterscheiden nun

X B 1) Die Eigenwerte von d auf $\mathfrak{a}/(e_4, e_5)$ liegen in $i\mathbb{R}$ (und dann in $i\mathbb{R}^\times$).

In diesem Falle ist d wieder halbeinfach, und man sieht rasch, daß die Algebra $\mathfrak{g}_{6,2}(\alpha)$ für passendes $\alpha \neq 0$ vorliegt.

X B 2) Die Eigenwerte von d auf $\mathfrak{a}/(e_4, e_5)$ liegen in $\mathbb{R}^\times$.

Auf $\mathfrak{a}/(e_4, e_5)$ hat d die Eigenwerte μ, $-\mu$. Ist $\mu \neq \pm 1$, so ist d halbeinfach, und die Algebra $\mathfrak{g}_{6,3}(\mu)$ liegt vor. Nehmen wir also $\mu = 1$ an. Es seien V_+ bzw. V_- die Vektoren zum Gewicht $+1$ bzw. -1 in $\mathfrak{n}$. Dann ist $\mathfrak{n} = V_+ \oplus V_- \oplus (e_5)$ eine d-stabile Zerlegung. Weiter ist $V_+ \oplus (e_5) \subseteqq \mathfrak{a}$ und $V_- \cap \mathfrak{a}$ eindimensional, es sei $V_- \cap \mathfrak{a} = (e_3)$, also $[e_3, e_4] = 0$, $de_3 = -e_3$. Nun wählen wir ein $e_1 \in V_+ \setminus (e_4)$ mit $[e_1, e_3] = e_5$ und $de_1 = e_1 + \tau e_4$, wobei man ohne Einschränkung $\tau = 0$ oder $\tau = 1$ annehmen kann. Nun sei $\mathfrak{d}$ der Zentralisator von e_1 ($\mathfrak{d}$ ist nicht notwendig ein Ideal in $\mathfrak{g}$). $\mathfrak{d} \cap V_-$ ist eindimensional und ein Komplement zu (e_3) in V_-. Wir wählen nun ein $e_2 \in \mathfrak{d} \cap V_-$ mit $[e_2, e_4] = e_5$. Weiter ist $de_2 = -e_2 + \sigma e_3$. Damit ist $\mathfrak{g}$ bestimmt. Aus $[e_1, e_2] = 0$ gewinnt man noch

$$0 = d[e_1, e_2] = [de_1, e_2] + [e_1, de_2] = -\tau e_5 + \sigma e_5 ,$$

also $\sigma = \tau$. Im Falle $\tau = 0$ liegt $\mathfrak{g}_{6,3}(1)$, im Falle $\tau = 1$ liegt $\mathfrak{g}_{6,3}$ vor.

Literatur

[1] *P. Bernat et al.*, Représentations des groupes de Lie résolubles, Paris 1972.

[2] *F. F. Bonsall* und *I. Duncan*, Complete normed algebras, Ergebnisse der Mathematik **80**, Berlin-Heidelberg-New York 1973.

[3] *J. W. Jenkins*, Nonsymmetric group algebras, Studia Math. **45** (1973), 295—307.

[4] *J. W. Jenkins*, Growth of Connected Locally Compact Groups, J. Funct. Anal. **12** (1973), 113—127.

[5] *H. Leptin*, Verallgemeinerte L^1-Algebren und projektive Darstellungen lokalkompakter Gruppen, Inventiones math. **3** (1967), 257—281, **4** (1967), 68—86.

[6] *H. Leptin*, Symmetrie in Banachschen Algebren, Arch. d. Math. **27** (1976), 394—400.

[7] *H. Leptin*, Ideal theory in group algebras of locally compact groups, Inventiones math. **31** (1976), 259—278.

[8] *H. Leptin* und *D. Poguntke*, Symmetry and nonsymmetry for locally compact groups, preprint (1977).

[9] *J. Ludwig*, A class of symmetric and a class of Wiener group algebras, preprint (1976).

[10] *P. Müller-Römer*, Kontrahierende Erweiterungen und kontrahierbare Gruppen, J. reine angew. Math. **283/284** (1976), 238—264.

[11] *T. W. Palmer*, Classes of nonabelian, noncompact, locally compact groups, preprint (1976).

[12] *D. Poguntke*, Nilpotente Liesche Gruppen haben symmetrische Gruppenalgebren, Math. Ann. **227** (1977), 51—59.

[13] *C. E. Rickart*, Banach Algebras, Princeton 1960.

Fakultät für Mathematik der Universität, D-4800 Bielefeld, Postfach 8640

Eingegangen 3. Mai 1978