Auflösbare Liesche Gruppen mit symmetrischen L^1-Algebren

Von *Detlev Poguntke* in Bielefeld

Einleitung

Unter einer involutiven Banachschen Algebra wird hier stets eine Banachsche Algebra mit isometrischer Involution $a \longrightarrow a^*$ verstanden. Eine solche Algebra $\mathscr{A}$ heißt symmetrisch, falls für jedes $a \in \mathscr{A}$ das Spektrum von $a^* a$ in der positiven reellen Halbachse liegt. Typische Beispiele involutiver Banachscher Algebren sind die L^1-Faltungsalgebren lokalkompakter Gruppen. Und die Frage, welche dieser Algebren symmetrisch sind, ist in den vergangenen Jahren von verschiedenen Autoren ausgiebig untersucht worden. Es war einige Zeit lang vermutet worden, daß für eine lokalkompakte Gruppe G die Symmetrie von $L^1(G)$ gleichbedeutend ist mit dem polynomialen Wachstum des Haarschen Maßes von G. Nun, in dieser Form ist die Vermutung falsch, und zwar in beiden Richtungen. Zum einen hat die $(ax+b)$-Gruppe eine symmetrische L^1-Algebra, siehe [16], während das Haarsche Maß dieser Gruppe natürlich exponentiell wächst. Zum anderen wurde in [7] eine diskrete, lokal endliche Gruppe mit nichtsymmetrischer L^1-Algebra konstruiert. Letztere Gruppe ist natürlich nicht endlich erzeugt. Beschränkt man sich auf endlich erzeugte diskrete Gruppen, so haben polynomial wachsende Gruppen freilich symmetrische L^1-Algebren, wie aus dem tiefliegenden Struktursatz von Gromow folgt. Denn danach sind diese Gruppen endliche Erweiterungen nilpotenter Gruppen, und solche besitzen symmetrische L^1-Algebren, vgl. [8] und [14] sowie [17]. Überhaupt ist kein Beispiel einer kompakt erzeugten lokalkompakten Gruppe mit polynomial wachsendem Haarschen Maß bekannt, welche eine nichtsymmetrische L^1-Algebra besitzt. Allerdings liegen für totalunzusammenhängende, nichtdiskrete Gruppen keine hinlänglich allgemeinen Ergebnisse in dieser oder jener Richtung vor. Betrachtet man eine andere bedeutende Klasse lokalkompakter Gruppen, nämlich die der zusammenhängenden Lieschen Gruppen, so ergibt sich folgendes Bild. Ist G eine zusammenhängende Liesche Gruppe mit Liescher Algebra $\mathfrak{g}$ und ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$ eine Levi-Zerlegung von $\mathfrak{g}$ mit halbeinfachem $\mathfrak{s}$ und auflösbarem $\mathfrak{r}$, so folgt aus der Symmetrie von $L^1(G)$, daß $\mathfrak{s}$ eine kompakte halbeinfache Liesche Algebra ist, vgl. [10]. Ist nun aber $\mathfrak{s}$ kompakt, so folgt, siehe [17] oder [22], aus der Symmetrie von $L^1(R)$, wobei R den zu $\mathfrak{r}$ korrespondierenden Normalteiler von G bezeichnet, die Symmetrie von $L^1(G)$. Damit ist klar, daß man erst einmal zu untersuchen hat, welche (einfach) zusammenhängenden auflösbaren Lieschen Gruppen G eine symmetrische L^1-

Algebra haben. In [18] wurde gezeigt, daß alle (auflösbaren) zusammenhängenden Lieschen Gruppen mit polynomial wachsendem Haarschen Maß tatsächlich symmetrische L^1-Algebren besitzen. Dieses verallgemeinernd gibt ein Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit (Korollar zu Satz 2) für einfachzusammenhängende auflösbare Liesche Gruppen G ein hinreichendes Kriterium für die Symmtrie von $L^1(G)$. In einer folgenden Arbeit werde ich zeigen, daß dieses Kriterium auch notwendig ist. Das Kriterium verlangt das polynomiale Wachstum der Haarschen Maße einer gewissen Familie von Subquotienten von G und zeigt damit, daß die ursprüngliche Vermutung, jedenfalls für auflösbare zusammenhängende Liesche Gruppen, im Kern richtig ist, wenn auch der Zusammenhang zwischen Symmetrie und Wachstum des Haarschen Maßes erheblich subtiler ist als zunächst erwartet. Weiter besteht jetzt die begründete Hoffnung, in Kürze für beliebige zusammenhängende Liesche Gruppen G ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Symmetrie von $L^1(G)$ beweisen zu können. Am Ende der Arbeit wird eine entsprechende Vermutung formuliert.

Um den Aufbau dieses Artikels zu erläutern, sei daran erinnert, daß eine beliebige involutive Banachsche Algebra $\mathscr{A}$ dann und nur dann symmetrisch ist, wenn jeder einfache $\mathscr{A}$-(Links) Modul E (andere Autoren nennen solche Moduln algebraisch irreduzible Darstellungen) unitarisierbar ist, d.h., wenn es eine (topologisch irreduzible) involutive Darstellung π von $\mathscr{A}$ in einem Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ und eine $\mathscr{A}$-lineare Einbettung $E \to \mathfrak{H}$ gibt. Diese Charakterisierung von Symmetrie, die man etwa in [20] findet, wird hier ausschließlich verwendet. Dort werden zwar nur unitale Algebren behandelt, doch mit Hilfe des Satzes von Yood, daß nämlich mit $\mathscr{A}$ auch $\mathscr{A} \oplus \mathbb{C}1$ symmetrisch ist, ergibt sich sofort, daß diese Charakterisierung auch für Algebren ohne Eins gilt. — Sei nun G eine einfachzusammenhängende Liesche Gruppe und N ein zusammenhängender nilpotenter Normalteiler mit abelschem Quotienten G/N; als N kann man also beispielsweise das Nilradikal oder die abgeleitete Gruppe nehmen. Im ersten Paragraphen wird für einen einfachen $L^1(G)$-Modul E der Annullator von E in $L^1(N)$ bestimmt (man beachte, daß auf einem einfachen $L^1(G)$-Modul auch die Maßalgebra von G operiert). Es zeigt sich (Satz 1), daß dieser Annullator der Kern einer gewissen abgeschlossenen Menge $\mathscr{X}$ im unitären Dual $\hat{N} = L^1(N)^\wedge$ ist. Gleichzeitig lehrt der Beweis, daß man sich für manche Probleme auf den Fall beschränken kann, daß $\mathscr{X}$ eine Bahn unter einem Torus ist. Dieses Ergebnis ist weit weniger selbstverständlich, als es auf den ersten Blick scheint, denn es gibt keinerlei allgemeine Prinzipien, die etwa ausschließen, daß für eine beliebige lokalkompakte Gruppe H, einen beliebigen Normalteiler M in H und einen einfachen $L^1(H)$-Modul F der Quotient

$$L^1(M)/\mathrm{Ann}_{L^1(M)}(F)$$

ein Radikal hat, auch wenn $L^1(M)$ symmetrisch ist. Im Gegenteil, Hulanicki hat in [9] exakt eine solche Situation hergestellt. In diesem Beispiel sind M und H/M abzählbar-unendlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und die Erweiterung von H durch M zerfällt sogar. Es ist kaum übertrieben festzustellen, daß Satz 1 den Hebel liefert, um das Symmetrie-Problem für auflösbare Liesche Gruppen aus den Angeln zu heben. Und auch für die oben angekündigte Arbeit stellt Satz 1 den Ausgangspunkt dar. Der Beweis für Satz 1 basiert auf dem in [22] sogenannten Imprimitivitätssatz für einfache Moduln, vgl. dazu auch [25], sowie auf Synthese-Eigenschaften von Bahnen von Tori im unitären Dual nilpotenter Liescher Gruppen, siehe [26]. Der zweite Paragraph ist vorbereitenden Charakters. Dort werden im Quotienten $L^1(N)/k(\mathscr{X})$, wobei $\mathscr{X}$ die Bahn unter einem Torus ist, bestimmte später benötigte Elemente konstruiert. Der dritte Paragraph enthält ein hinreichendes Kriterium für die Unitarisierbarkeit eines gegebenen einfachen $L^1(G)$-Moduls und als Konsequenz ein hinreichendes Kriterium für die Symmetrie von $L^1(G)$.

§ 1. Annullatoren einfacher $L^1(G)$-Moduln in $L^1(N)$

Es seien G eine zusammenhängende Liesche Gruppe und N ein abgeschlossener Normalteiler in G. N sei eine zusammenhängende, einfachzusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe mit Liescher Algebra $\mathfrak{n}$. Mit $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{n}) \cong \mathrm{Aut}(N)$ sei hier die adjungierte Darstellung von G in $\mathfrak{n}$ bezeichnet. Weiter sei eine Gruppe Q von Lieschen Automorphismen von $\mathfrak{n}$ gegeben mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Q ist die Zusammenhangskomponente einer Zariski-abgeschlossenen Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n})$.

(b) $\mathrm{Ad}(G) \subset Q$.

(c) $Q/\mathrm{Ad}(N)$ ist abelsch.

In Q wählen wir eine maximale kompakte Untergruppe T, mit anderen Worten, T ist ein maximaler anisotroper Torus. Die Gruppe $\tilde{T} := T\,\mathrm{Ad}(N)$ ist unabhängig von der Wahl von T. Q können wir auch als Gruppe von Automorphismen auf N auffassen. Insbesondere operiert Q auf dem unitären Dual $\hat{N}$ von N, und für ein $\tau \in \hat{N}$ sei mit Q_τ der Stabilisator von τ in Q bezeichnet. Im folgenden wird die Gruppe $G^{(\tau)} = \mathrm{Ad}^{-1}(Q_\tau T)$ von Bedeutung sein. Es gilt $G^{(\tau)} = \mathrm{Ad}^{-1}(Q_\tau \tilde{T})$, da Q_τ natürlich $\mathrm{Ad}(N)$ umfaßt, und $G^{(\tau)} = \{x \in G;\ x\tau \in T\tau\}$.

Ferner sei hier noch an einige darstellungs- und idealtheoretische Eigenschaften einfachzusammenhängender nilpotenter Liescher Gruppen erinnert, die wir im folgenden mehrfach verwenden werden. Sei B eine solche Gruppe, $\mathfrak{b}$ ihre Liesche Algebra und $\mathfrak{b}^*$ der reelle Dualraum von $\mathfrak{b}$. Das unitäre Dual $\hat{B}$ von B ist homöomorph zum Raum der primitiven Ideale in $C^*(B)$, versehen mit der Jacobsonschen Topologie. Die Kirillowsche Abbildung $\mathfrak{b}^* \to \hat{B}$ wird mit $\varkappa_B$ bezeichnet. Der Satz von Brown, [4], besagt, daß $\varkappa_B$ einen Homöomorphismus vom Raum der B-Bahnen in $\mathfrak{b}^*$ auf $\hat{B}$ induziert. Laut [21] fallen für ein zweiseitiges abgeschlossenes Ideal in $L^1(B)$ die Begriffe primitiv, d.h. Annullator eines einfachen $L^1(B)$-Moduls, und $*$-primitiv, d.h. Kern einer topologisch irreduziblen involutiven Darstellung von $L^1(B)$ in einem Hilbertschen Raum, und maximal (in der Menge der zweiseitigen abgeschlossenen Ideale) zusammen. Mit $\mathrm{Priv}(L^1(B))$ sei die Menge dieser Ideale bezeichnet. Da B ein polynomial wachsendes Haarsches Maß hat, ist nach [2] der Raum $\mathrm{Priv}(L^1(B))$, versehen mit der Jacobsonschen Topologie homöomorph zu $\mathrm{Prim}(C^*(B))$, also auch homöomorph zu $\hat{B}$ und zu $\mathfrak{b}^*/B$. Für ein Ideal I in $L^1(B)$ sei $h(I)$ die Hülle von I in $\hat{B}$, und für eine Teilmenge $\mathscr{X}$ von $\hat{B}$ sei $k(\mathscr{X})$ der Kern von $\mathscr{X}$ in $L^1(B)$. Zu jeder abgeschlossenen Menge $\mathscr{X}$ in $\hat{B}$ gibt es nach [19] ein kleinstes Ideal, mit $j(\mathscr{X})$ bezeichnet, unter all denen, deren Hülle $\mathscr{X}$ ist.

Mit den eingeführten Bezeichnungen kann man den folgenden Satz formulieren.

Satz 1. *Sei E ein einfacher $L^1(G)$-Modul. Dann gibt es $\tau \in \hat{N}$, einen einfachen $L^1(G^{(\tau)})$-Modul M und eine beschränkte $L^1(G)$-lineare Einbettung von E in den induzierten Modul $L^2_{G^{(\tau)}}(G, M)$ mit*

(i) $\mathrm{Ann}_{L^1(N)}(E) = k(G\tau) = k(\overline{G\tau})$.

(ii) $\mathrm{Ann}_{L^1(G^{(\tau)})}(E) = \bigcap_{x \in G} \mathrm{Ann}_{L^1(G^{(\tau)})}(M)^x$.

(iii) $\mathrm{Ann}_{L^1(N)}(M) = k(G^{(\tau)}\tau)$.

Bemerkung 1. Es ist bequem und nützlich, mit der (fast)algebraischen Gruppe Q zu arbeiten. Der Satz freilich, sprich $G^{(\tau)}$, ist tatsächlich unabhängig von Q, denn man kann $G^{(\tau)}$ auch als die Menge derjenigen $x \in G$ charakterisieren, zu denen es eine streng monoton wachsende Folge (k_n) natürlicher Zahlen gibt mit $\lim_{n \to \infty} x^{k_n}\tau = \tau$. Die dafür erforderliche einfache Überlegung wird hier nicht ausgeführt.

Beweis von Satz 1. Für ein Q-stabiles Ideal $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{n}$ sei $B = \exp \mathfrak{b}$, $I_B = \mathrm{Ann}_{L^1(B)}(E)$ und $\mathscr{X}_B = h(I_B)$. Unter diesen $\mathfrak{b}$'s wählen wir ein maximales mit der Eigenschaft, daß es ein $\sigma \in \hat{B}$ gibt mit $\mathscr{X}_B \subset T\,\mathrm{Ad}(N)\,\sigma$. Man kann dann natürlich σ innerhalb von $\mathscr{X}_B$ wählen. Aus der Invarianz von $\mathscr{X}_B$ unter $\mathrm{Ad}(G)$ folgt, daß $\mathscr{Y} := T\,\mathrm{Ad}(N)\,\sigma$ invariant unter $\mathrm{Ad}(G)$ ist. Weiter gilt $I_B \supset j(\mathscr{X}_B) \supset j(\mathscr{Y})$. Nach dem Hauptsatz aus [26] gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $j(\mathscr{Y}) = k(\mathscr{Y})^n$. Also annulliert die n-te Potenz des G-invarianten Ideals $k(\mathscr{Y})$ den Modul E, woraus man schließt, vgl. das Lemma in [25], daß $k(\mathscr{Y})$ selbst im Annullator liegt.

Nehmen wir zunächst $B = N$ an, also $\mathscr{X}_B = \mathscr{X}_N \subset T\sigma = \mathscr{Y}$. Dann ist $\mathscr{Y}$ ein kompakter Hausdorffscher Teilraum von $\hat{N}$, $T' := \{t \in T;\ t\sigma \in \overline{G\sigma}\}$ ist eine kompakte Untergruppe von T, und es gilt $\overline{G\rho} = T'\rho$ für alle $\rho \in \mathscr{Y}$. Erst einmal wird gezeigt, daß es ein $\rho \in \mathscr{X}_N$ mit $\mathscr{X}_N = T'\rho$ gibt. Nehmen wir im Gegensatz dazu an, daß $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{X}_N$ existieren mit $T'\rho_1 \neq T'\rho_2$. Da der Raum der T'-Bahnen in $\mathscr{Y}$ Hausdorffsch ist, gibt es dann abgeschlossene T'-invariante Mengen A_1 und A_2 in $\mathscr{Y}$ mit

$$A_1 \cup A_2 = \mathscr{Y} \text{ und } T'\rho_1 \cap A_1 = \emptyset = T'\rho_2 \cap A_2.$$

$k(\mathscr{Y}) = k(A_1) \cap k(A_2)$ annulliert E, und daher wird E auch von

$$L^1(G) * k(A_1) * k(A_2) * L^1(G)$$

annulliert. Aber die Abschlüsse I_1 bzw. I_2 von $L^1(G) * k(A_1)$ bzw. von $k(A_2) * L^1(G)$ in $L^1(G)$ sind zweiseitige Ideale in $L^1(G)$, und $I_1 I_2$ annulliert E. Da $\mathrm{Ann}_{L^1(G)}(E)$ ein Primideal ist, folgt, daß etwa I_1 den Modul E annulliert. Daher liegt $k(A_1)$ im Annullator von E in $L^1(N)$, woraus sich $\mathscr{X}_N \subset A_1$ ergibt, im Widerspruch zu $\rho_1 \in \mathscr{X}_N$ und $T'\rho_1 \cap A_1 = \emptyset$. — Also existiert ein $\tau \in \mathscr{Y}$ mit $\mathscr{X}_N = T'\tau = (G\tau)^-$. Wie oben schließt man dann unter Verwendung des Hauptsatzes aus [26] und des Lemmas aus [25], daß $\mathrm{Ann}_{L^1(N)}(E) = k(\mathscr{X}_N) = k(\overline{G\tau})$. Die übrigen Behauptungen von Satz 1 sind trivialerweise erfüllt, da $G^{(\tau)} = G$.

Ist aber $\mathfrak{b}$ ein echter Teil von $\mathfrak{n}$, so wählen wir ein Q-stabiles Ideal $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{b} \subsetneqq \mathfrak{c} \subset \mathfrak{n}$ derart, daß Q auf $\mathfrak{c}/\mathfrak{b}$ irreduzibel wirkt. Insbesondere läßt sich $\mathfrak{c}/\mathfrak{b}$ und dann auch $\mathfrak{b}^\perp$, der Senkrechtraum von $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{c}^*$, so mit $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ identifizieren, daß jedes $x \in Q$ durch Multiplikation mit einer Zahl operiert. Die Wirkung von Q auf $\mathfrak{b}^\perp$ sei mit β bezeichnet. Zur Darstellung σ wählen wir fest ein $g \in \mathfrak{b}^*$ mit $\varkappa_B(g)=\sigma$. Indem wir T nötigenfalls durch eine andere maximale kompakte Untergruppe ersetzen, können wir annehmen, daß $T_g = Q_g \cap T$ eine maximale kompakte Untergruppe von Q_g ist. Offenbar ist $\varkappa_B^{-1}(\mathscr{Y}) = \varkappa_B^{-1}(T\,\mathrm{Ad}(N)\,\sigma) = T\,\mathrm{Ad}(N)\,g = Q_g T\,\mathrm{Ad}(N)\,g$. Auf Grund unserer Annahme ist $\mathrm{Ad}(G)$ in $Q_g T\,\mathrm{Ad}(N)$ enthalten. Weiter sei $\tilde{\mathscr{Y}} := \{f \in \mathfrak{c}^*; f|_\mathfrak{b} \in \varkappa_B^{-1}(\mathscr{Y})\}$. Es gilt $\tilde{\mathscr{Y}} = T\,\mathrm{Ad}(N) f + \mathfrak{b}^\perp$ für jedes $f \in \mathfrak{c}^*$ mit $f|_\mathfrak{b} = g$. $\tilde{\mathscr{Y}}$ ist eine abgeschlossene C-invariante Teilmenge von $\mathfrak{c}^*$, mit $\mathscr{Z}$ sei das Bild von $\tilde{\mathscr{Y}}$ unter der Kirillowschen Abbildung $\varkappa_C$ bezeichnet. Wie man sich leicht überlegt, ist $k(\mathscr{Z})$ der Abschluß von $L^1(C) * k(\mathscr{Y})$. Da $k(\mathscr{Y})$ den Modul E annulliert, gilt dies auch für $k(\mathscr{Z})$, insbesondere ist $\mathscr{X}_C$ in $\mathscr{Z}$ enthalten.

Es sind nun mehrere Fälle zu unterscheiden. Nehmen wir zunächst an, daß $\mathrm{Ad}(G) f \subseteq T\,\mathrm{Ad}(N) f$ für alle Fortsetzungen f von g auf $\mathfrak{c}$ ist oder, äquivalent dazu, daß $\mathrm{Ad}(G) \subset Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)$ ist. Dasselbe gilt dann natürlich für jedes $f \in \tilde{\mathscr{Y}}$, und jede G-Bahn in $\mathscr{Z}$ ist in einer $T\,\mathrm{Ad}(N)$-Bahn enthalten. Wir wollen zeigen, daß diese Annahme der Maximalität von $\mathfrak{b}$ widerspricht. Dazu beweisen wir zunächst, daß der Raum der $T\,\mathrm{Ad}(N)$-Bahnen in $\mathscr{Z}$ Hausdorffsch ist. Dieser Raum ist nach [4] homöomorph zum Raum der $T\,\mathrm{Ad}(N)$-Bahnen in $\tilde{\mathscr{Y}} \subset \mathfrak{c}^*$. Um einzusehen, daß dieser Raum Hausdorffsch ist, wird als Hilfsgruppe das semidirekte Produkt $F := T\,\mathrm{Ad}(N) \ltimes \mathfrak{b}^\perp$ gebildet mit der Multiplikation $(x,b)(x',b') = (xx', \beta(x')^{-1}(b)+b')$. F operiert auf $\mathfrak{c}^*$ durch $(x,b) f = x(f+b)$. Da $\mathrm{Ad}(N)$ auf $\mathfrak{b}^\perp$ trivial operiert, ist $\mathrm{Ad}(N) \ltimes \{0\}$ ein Normalteiler in F. Fixiert man ein $f \in \mathfrak{c}^*$ mit $f|_\mathfrak{b} = g$, so kann man $\tilde{\mathscr{Y}} = Ff$ mit F/F_f identifizieren. Der Raum der $\mathrm{Ad}(N)$-Bahnen in $\tilde{\mathscr{Y}}$ ist dann homöomorph zu $\mathrm{Ad}(N) \backslash F/F_f = F/\mathrm{Ad}(N)\,F_f$ wegen der Normalität von $\mathrm{Ad}(N)$. $\mathrm{Ad}(N)\,F_f = \{x \in F; xf \in \mathrm{Ad}(N) f\}$ ist abgeschlossen in F, also ist $F/\mathrm{Ad}(N)\,F_f$ Hausdorffsch. Folglich ist auch $T\backslash F/\mathrm{Ad}(N)\,F$ als Quotient unter der Wirkung einer kompakten Gruppe Hausdorffsch. Aber $T\backslash F/\mathrm{Ad}(N)\,F_f$ ist homöomorph zum Raum der $T\,\mathrm{Ad}(N)$-Bahnen in $\tilde{\mathscr{Y}}$. — Nun kann man wie oben im Falle $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}$ argumentieren und erhält, daß $\mathscr{X}_C$ in einer $T\,\mathrm{Ad}(N)$-Bahn enthalten ist, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{b}$.

Nehmen wir nun an, daß ein $f \in \mathfrak{c}^*$ mit $f|_\mathfrak{b} = g$ und $\mathrm{Ad}(G) \not\subset Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)$ existiert. Da $Q/T\,\mathrm{Ad}(N)$ eine Vektorgruppe ist und $(Q_g)_0$ bzw. $(Q_f)_0$ von endlichem Index in Q_g bzw. Q_f sind, gilt $Q_g T\,\mathrm{Ad}(N) = (Q_g)_0\, T\,\mathrm{Ad}(N)$ und $Q_f T\,\mathrm{Ad}(N) = (Q_f)_0\, T\,\mathrm{Ad}(N)$.

$Q_g T\,\mathrm{Ad}(N)/Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)$ ist eine ein- oder zweidimensionale Vektorgruppe, und $\mathrm{Ad}(G)\,TQ_f/Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)$ ist eine nicht-triviale zusammenhängende Untergruppe. Weiter ist $Q_g T\,\mathrm{Ad}(N)/Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)$ isomorph zu

$$Q_g/(Q_f T\,\mathrm{Ad}(N))_g = Q_g/Q_f (T\,\mathrm{Ad}(N))_g = Q_g/Q_f T_g\,\mathrm{Ad}(N_g);$$

denn es gilt $(T\,\mathrm{Ad}(N))_g = T_g\,\mathrm{Ad}(N_g)$, weil T_g eine maximale kompakte Untergruppe von Q_g und auch von $(T\,\mathrm{Ad}(N))_g$ ist. Insbesondere gibt es zu $x \in G$ ein modulo $Q_f T_g\,\mathrm{Ad}(N_g)$ eindeutig bestimmtes $x' \in Q_g$ mit $\mathrm{Ad}(x)\, Q_f T\,\mathrm{Ad}(N) = x' Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)$.

Wir zeigen zunächst, daß es in diesem Falle einen Normalteiler H in G gibt mit $\mathrm{Ad}^{-1}(T)\,N \subset H$ und $G \cong \mathbb{R} \ltimes H$ sowie $p, q \in U := L^1(C)/k(\mathscr{Z})$ mit $pq = qp = p$, $pE \neq 0$ und $q^x * U * q = 0$ für alle $x \in \mathbb{Z} \ltimes H \setminus H$.

Dazu bilden wir, analog zu oben, die Hilfsgruppe $F := Q_g T \operatorname{Ad}(N) \ltimes \mathfrak{b}^\perp$. F operiert auf $\mathfrak{c}^*$ und auch auf $L^1(C)$, wobei die Wirkung von $\mathfrak{b}^\perp$ auf $L^1(C)$ durch Multiplikation mit den entsprechenden Charakteren in $(C/B)^\wedge$ gegeben ist. Die Kirillowsche Abbildung $\varkappa_C : \mathfrak{c}^* \to \hat{C} = L^1(C)^\wedge$ ist F-äquivariant, und $\hat{U} = \mathscr{X}$ ist ein transitiver F-Raum. Damit erfüllt U die Voraussetzungen von Lemma 2 in [23]. Es sei ein f mit den obigen Eigenschaften vorläufig fixiert, wobei erst einmal offen gelassen ist, ob f in $\varkappa_C^{-1}(\mathscr{X}_C)$ liegt. Damit sei $\varphi : Q_g \to \mathfrak{b}^\perp$ definiert durch $\varphi(x) = xf - f$. Es gilt $\varphi(xy) = \varphi(x) + \beta(x)\,\varphi(y)$.

Betrachten wir jetzt den Fall

(A) Q_g operiert trivial auf $\mathfrak{b}^\perp$.

Dann ist $\varphi : Q_g \to \mathfrak{b}^\perp$ ein stetiger Homomorphismus. Das Bild von φ ist eine zusammenhängende Untergruppe, denn $\varphi(Q_f T_g \operatorname{Ad}(N_g)) = \varphi(\operatorname{Ad}(N_g))$ ist zusammenhängend, und $Q_g/Q_f T_g \operatorname{Ad}(N_g)$ ist zusammenhängend. Ist $\operatorname{Ad}(G)\, Q_f T/Q_f T \operatorname{Ad}(N)$ eindimensional, so setzen wir $H = \operatorname{Ad}^{-1}(Q_f T \operatorname{Ad}(N))$; ist aber $\operatorname{Ad}(G)\, Q_f T/Q_f T \operatorname{Ad}(N)$ zweidimensional, so wählen wir darin eine eindimensionale zusammenhängende Untergruppe und wählen als H deren Urbild unter $G \to \operatorname{Ad}(G)\, TQ_f/Q_f T \operatorname{Ad}(N)$. In beiden Fällen ist $G/H \cong \mathbb{R}$, und wir wählen weiter eine zu $\mathbb{R}$ isomorphe Untergruppe R von G mit $G = R \ltimes H$ sowie eine zu $\mathbb{Z}$ isomorphe Untergruppe Z von R.

Jedes $\rho \in \mathscr{X}$ besitzt dann eine Umgebung W in $\mathscr{X}$ mit $W \cap W^{zh} = \emptyset$ für $h \in H$, $z \in Z \setminus \{0\}$; denn:

Es genügt zu zeigen, daß es im Raum der $Q_f T \operatorname{Ad}(N)$-Bahnen von $\mathscr{X}$ (auf welchem G und Q natürlich operieren) zu jedem Punkt eine solche Umgebung gibt. Dieser Bahnenraum ist homöomorph zum Raum der $Q_f T \operatorname{Ad}(N)$-Bahnen in $\mathscr{Y}$. Weiter ist durch $b \to Q_f T \operatorname{Ad}(N)(f + b)$, $b \in \mathfrak{b}^\perp$, eine surjektive Abbildung von $\mathfrak{b}^\perp$ auf diesen Bahnenraum definiert, und es gilt $Q_f T \operatorname{Ad}(N)(f + b_1) = Q_f T \operatorname{Ad}(N)(f + b_2)$ genau dann, wenn $b_1 - b_2 \in \varphi(T_g \operatorname{Ad}(N_g)) = \varphi(\operatorname{Ad}(N_g))$. Der Raum der $Q_f T \operatorname{Ad}(N)$-Bahnen läßt sich also mit dem Vektorraum $\mathfrak{b}^\perp/\varphi(\operatorname{Ad}(N_g))$ identifizieren, und diese Identifikation ist sogar ein Homöomorphismus. Unter dieser Identifikation operiert $x \in G$ wie folgt: Wählt man wie oben $x' \in Q_g$ mit $\operatorname{Ad}(x)\, Q_f T \operatorname{Ad}(N) = x' Q_f T \operatorname{Ad}(N)$, und ist $b^\bullet = b + \varphi(\operatorname{Ad}(N_g))$ ein beliebiges Element in $\mathfrak{b}^\perp/\varphi(\operatorname{Ad}(N_g))$, so gilt

$$x b^\bullet = (b + \varphi(x'))^\bullet \in \mathfrak{b}^\perp/\varphi(\operatorname{Ad}(N_g)).$$

An dieser Realisierung des Bahnenraumes ist leicht abzulesen, daß die gesuchten Umgebungen existieren: Ist $\operatorname{Ad}(G)\, Q_f T/Q_f T \operatorname{Ad}(N)$ eindimensional, so operiert H trivial auf dem Bahnenraum und $R \cong G/H$ operiert frei. Ist $\operatorname{Ad}(G)\, Q_f T/Q_f T \operatorname{Ad}(N)$ zweidimensional, so ist $\varphi(\operatorname{Ad}(N_g)) = 0$, und $G/\operatorname{Ad}^{-1}(Q_f T \operatorname{Ad}(N))$ operiert frei und transitiv.

Nun wählen wir zu einem $\rho \in \mathscr{X}_C \subset \mathscr{X}$ eine solche Umgebung W. Nach Lemma 2 in [23] gibt es $p, q \in U$ mit $pq = qp = p$, $\rho(p) \neq 0$ und $\rho'(q) = 0$ für $\rho' \in \mathscr{X} \setminus W$. Wegen $\rho(p) \neq 0$ und $\rho \in \mathscr{X}_C$ gilt $pE \neq 0$. Nach Konstruktion ist $q^{zh} * U * q = 0$ für alle $h \in H$ und $z \in Z$, $z \neq 0$.

(B) Q_g operiert nicht-trivial auf $\mathfrak{b}^\perp$.

Wir unterscheiden die Unterfälle

(B. 0) $N_f = N_g$.

(B. 1) N_f ist ein echter Teil von N_g.

Zu (B. 0). Hier können wir φ als Abbildung auf der abelschen Gruppe $Q_g/\mathrm{Ad}(N_g)$ auffassen. Es gilt folglich $\varphi(xy)=\varphi(yx)$ für alle $x, y \in Q_g$ und daher

$$\varphi(x)+\beta(x)\,\varphi(y)=\varphi(y)+\beta(y)\,\varphi(x)$$

oder

$$(1-\beta(y))\,\varphi(x)=(1-\beta(x))\,\varphi(y).$$

Erinnern wir uns, daß Q_g durch Multiplikation mit komplexen Zahlen auf $\mathfrak{b}^\perp \cong \mathbb{R}, \mathbb{C}$ operiert. Insbesondere ist $1-\beta(y)$ invertierbar, falls $\beta(y)\neq 1$. Deswegen gibt es ein $b_0 \in \mathfrak{b}^\perp$ mit $\varphi(x)=(1-\beta(x))\,b_0$. Auf Grund unserer Annahmen ist $b_0 \neq 0$. Also ist $Q_f=Q_g \cap \mathrm{Kern}\,\beta$. Da die nicht-triviale Vektorgruppe $Q_g T\,\mathrm{Ad}(N)/Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)$ homomorphes Bild von $Q_g/Q_f=Q_g/Q_g \cap \mathrm{Kern}\,\beta$ ist, ist $|\beta| \neq 1$ auf Q_g. Andererseits ist $|\beta|=1$ auf $Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)$, so daß $|\beta|$ einen surjektiven Homomorphismus von

$$Q_g T\,\mathrm{Ad}(N)/Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)$$

auf $\mathbb{R}_+^\times$ induziert. Dieser Homomorphismus ist auch injektiv, insbesondere ist

$$\mathrm{Ad}(G)\,TQ_f/Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)=Q_g T\,\mathrm{Ad}(N)/Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)$$

eindimensional. Es gilt $Q_g T\,\mathrm{Ad}(N) \cap \mathrm{Kern}\,|\beta|=Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)$ und $Q_g \cap \mathrm{Kern}\,|\beta|=Q_f T_g$.

Wir setzen wieder $H:=\mathrm{Ad}^{-1}(Q_f T\,\mathrm{Ad}(N))=\mathrm{Kern}\,|\beta| \circ \mathrm{Ad}$ und wählen R und Z analog zu oben. — Das Funktional $f_0:=f+b_0$ wird von ganz Q_g stabilisiert. $Q_g T\mathrm{Ad}(N) f_0=T\mathrm{Ad}(N) f_0$ ist eine abgeschlossene, $\mathrm{Ad}(G)$-stabile Teilmenge von $\mathscr{Y}$. Folglich ist auch $\varkappa_C(T\mathrm{Ad}(N) f_0)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathscr{X}$. Laut Annahme ist $\mathscr{X}_C$ nicht in $\varkappa_C(T\mathrm{Ad}(N) f_0)$ enthalten. Jedes $\rho \in \mathscr{X} \setminus \varkappa_C(T\mathrm{Ad}(N) f_0)$ besitzt eine Umgebung W in $\mathscr{X}$ mit $W \cap W^{zh}=\emptyset$ für $h \in H$, $z \in Z$, $z \neq 0$; denn:

Es genügt wieder, den Raum der $Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)$-Bahnen in $\mathscr{Y} \setminus T\,\mathrm{Ad}(N) f_0$ zu betrachten. Durch $b \to Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)\,(f_0+b)$, $b \in \mathfrak{b}^\perp \setminus \{0\}$ ist eine Surjektion auf diesen Bahnenraum definiert, und es gilt $Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)\,(f_0+b_1)=Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)\,(f_0+b_2)$ genau dann, wenn es $x \in T_g$ mit $b_1=\beta(x)\,b_2$ gibt. Der in Rede stehende Bahnenraum ist homöomorph zum Raum der $\beta(T_g)$-Bahnen in $\mathfrak{b}^\perp \setminus \{0\}$. Ist $b^\bullet=\beta(T_g)\,b$ ein Element aus letzterem Bahnenraum, so operiert $x \in G$ auf $b^\bullet$ durch $xb^\bullet=|\beta(\mathrm{Ad}(x))|\,\beta(T_g)\,b$. Und man sieht, daß die gesuchten Umgebungen W stets existieren. — Wählt man wieder zu

$$\rho \in \mathscr{X}_C \setminus \varkappa_C(T\,\mathrm{Ad}(N) f_0)$$

eine solche Umgebung W und dazu $p, q \in U$ gemäß Lemma 2 in [23] mit $\rho(p) \neq 0$ und $\rho'(q)=0$ für $\rho' \in \mathscr{X} \setminus W$, so leistet dieses Paar p, q das Gewünschte.

Zu (B. 1). Dann ist auf Grund unserer Annahmen $\dim N_g/N_f=1$, $\dim \mathfrak{b}^\perp=2$, und $Q_g T\,\mathrm{Ad}(N)/Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)=\mathrm{Ad}(G)\,Q_f T/Q_f T\,\mathrm{Ad}(N) \cong Q_g/Q_f T_g\,\mathrm{Ad}(N_g)$ ist eindimensional. Wir setzen wieder $H=\mathrm{Ad}^{-1}(Q_f T\,\mathrm{Ad}(N))$, und wählen R und Z analog zu oben. $\mathfrak{v}:=\varphi(\mathrm{Ad}(N_g))$ ist ein eindimensionaler Unterraum von $\mathfrak{b}^\perp$. Da $\mathrm{Ad}(N_g)$ normal in Q_g ist und da $\mathrm{Ad}(N_g)$ trivial auf $\mathfrak{b}^\perp$ operiert, gilt $\varphi(xyx^{-1})=\beta(x)\,\varphi(y)$ für $x \in Q_g$ und $y \in \mathrm{Ad}(N_g)$. Folglich ist $\mathfrak{v}$ invariant unter $\beta(Q_g)$, und die Operatoren aus $\beta(Q_g)$ sind Multiplikationen mit reellen Zahlen. Mit β' sei die induzierte Wirkung von Q_g auf $\mathfrak{b}':=\mathfrak{b}^\perp/\mathfrak{v}$ bezeichnet, $\varphi': Q_g \to \mathfrak{b}'$ sei die Zusammensetzung aus φ und der Quotientenabbildung $\mathfrak{b}^\perp \to \mathfrak{b}'$. Wie oben findet man ein $b_0' \in \mathfrak{b}'$ mit $\varphi'(x)=\{1-\beta'(x)\}\,b_0'$. Wählt man ein willkürliches Urbild b_0 von b_0' in $\mathfrak{b}^\perp$, so erhält man

$$\varphi(x)=\{1-\beta(x)\}\,b_0+\psi(x)$$

mit einer Abbildung $\psi: Q_g \to \mathfrak{v}$. Für $x \in \mathrm{Ad}(N_g)$ gilt natürlich $\varphi(x) = \psi(x)$. Auf Grund der Annahmen $\mathrm{Ad}(G) \subset Q_g T\,\mathrm{Ad}(N)$ und $\mathrm{Ad}(G) \not\subset Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)$ liegt b_0 nicht in $\mathfrak{v}$. Daher liegt ein $x \in Q_g$ genau dann in Q_f, wenn $\beta(x) = 1$ und $\psi(x) = 0$. Weiter gilt $\beta(T_g\,\mathrm{Ad}(N_g)) \subseteqq \{\pm 1\}$, $Q_f T_g\,\mathrm{Ad}(N_g) = Q_g \cap \mathrm{Kern}\,|\beta|$, und zu jedem $x \in G$ existieren $x' \in Q_g$ und $y \in T\,\mathrm{Ad}(N)$ mit $\mathrm{Ad}(x) = x'y$ und $|\beta(\mathrm{Ad}(x))| = |\beta(x')|$.

Für das Funktional $f_0 := f + b_0$ erhält man $xf_0 = f_0 + \psi(x)$ für jedes $x \in Q_g$ sowie

$$Q_g T\,\mathrm{Ad}(N) f_0 = T\,\mathrm{Ad}(N)\, Q_g f_0 = T\,\mathrm{Ad}(N)\,(f_0 + \mathfrak{v}) = T\,\mathrm{Ad}(N)\,\mathrm{Ad}(N_g) f_0 = T\,\mathrm{Ad}(N) f_0.$$

Diese Bahn ist eine abgeschlossene $\mathrm{Ad}(G)$-stabile Teilmenge von $\mathscr{Y}$. Folglich ist auch $\varkappa_C(T\,\mathrm{Ad}(N) f_0)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathscr{X}$. Laut Annahme ist $\mathscr{X}_C$ nicht in $\varkappa_C(T\,\mathrm{Ad}(N) f_0)$ enthalten. Jedes ρ in $\mathscr{X} \setminus \varkappa_C(T\,\mathrm{Ad}(N) f_0)$ besitzt eine Umgebung W in $\mathscr{X}$ mit $W \cap W^{zh} = \emptyset$ für $h \in H$, $z \in Z \setminus \{0\}$; denn

Es genügt erneut, den Raum der $Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)$-Bahnen in $\tilde{\mathscr{Y}} \setminus T\,\mathrm{Ad}(N) f_0$ zu betrachten. Durch $b \to Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)\,(f_0 + b)$, $b \in \mathfrak{b}^\perp \setminus \mathfrak{v}$ ist eine Surjektion auf diesen Bahnenraum definiert, und es gilt

$$Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)\,(f_0 + b_1) = Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)\,(f_0 + b_2)$$

genau dann, wenn die Bilder b_1', b_2' von b_1 bzw. b_2 in $\mathfrak{b}'$ auf derselben $\beta'(Q_f T_g\,\mathrm{Ad}(N_g))$-Bahn liegen, d.h. auf derselben $\beta'(T_g)$-Bahn. Der Raum der $Q_f T\,\mathrm{Ad}(N)$-Bahnen in $\tilde{\mathscr{Y}} \setminus T\,\mathrm{Ad}(N) f_0$ ist homöomorph zum Raum der $\beta'(T_g)$-Bahnen in $\mathfrak{b}' \setminus \{0\}$, und $x \in G$ operiert auf einer solchen Bahn $\beta'(T_g)\, b^\cdot$ per $x\beta'(T_g)\, b^\cdot = |\beta'(\mathrm{Ad}(x))|\, \beta'(T_g)\, b^\cdot$. Man sieht, daß es die gesuchten Umgebungen gibt, und kann wie oben die Existenz von $p, q \in U$ aus Lemma 2 in [23] herleiten.

Nachdem nun H sowie $p, q \in U := L^1(C)/k(\mathscr{X})$ konstruiert sind, können wir Theorem 2 aus [25] anwenden. Es sei $\mathscr{A} := L^1(H)/\{L^1(H) * k(\mathscr{X})\}^-$. Da $k(\mathscr{X})$ den Modul E annulliert, ist E ein Modul über $L^1(\mathbb{R}, \mathscr{A})$. Weiter liegen $p, q \in U$ in der adjungierten Algebra $\mathscr{A}^b$ von $\mathscr{A}$, und nach Konstruktion gilt $q^x \mathscr{A} q = 0$ für $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$. Nach Theorem 2 in [25] gibt es nun einen einfachen $\mathscr{A}$-Modul F, den man dann auch als einfachen $L^1(H)$-Modul auffassen kann, und eine nicht-triviale $L^1(G)$-lineare Abbildung von E in den induzierten Modul $L^2(\mathbb{R}, F) = L^2_H(G, F)$ mit

$$\mathrm{Ann}_{L^1(H)}(E) = \bigcap_{x \in \mathbb{R}} \mathrm{Ann}_{L^1(H)}(F)^x = \bigcap_{x \in G} \mathrm{Ann}_{L^1(H)}(F)^x.$$

Wir nehmen im Sinne eines Induktionsbeweises an, daß Satz 1 für die Gruppe H richtig ist und finden ein $\tau \in \hat{N}$ sowie einen einfachen $H^{(\tau)}$-Modul M, wobei

$$H^{(\tau)} = \mathrm{Ad}^{-1}(Q_\tau T) \cap H = G^{(\tau)} \cap H,$$

und eine $L^1(H)$-lineare Einbettung von F in $L^2_{H^{(\tau)}}(H, M)$ mit

$$\mathrm{Ann}_{L^1(N)}(F) = k(\overline{H\tau}),$$

$$\mathrm{Ann}_{L^1(H^{(\tau)})}(F) = \bigcap_{x \in H} \mathrm{Ann}_{L^1(H^{(\tau)})}(M)^x$$

und

$$\mathrm{Ann}_{L^1(N)}(M) = k(H^{(\tau)}\tau).$$

Durch Zusammensetzung erhält man eine $L^1(G)$-lineare Einbettung

$$E \to L^2_H(G, F) \to L^2_H(G, L^2_{H^{(\tau)}}(H, M)) \cong L^2_{H^{(\tau)}}(G, M).$$

Aus $\mathrm{Ann}_{L^1(H)}(E) = \bigcap_{x\in G} \mathrm{Ann}_{L^1(H)}(F)^x$ und $\mathrm{Ann}_{L^1(N)}(F) = k(\overline{H\tau})$ ergibt sich

$$\mathrm{Ann}_{L^1(N)}(E) = \bigcap_{x\in G} \mathrm{Ann}_{L^1(N)}(F)^x = \bigcap_{x\in G} k(\overline{H\tau})^x = k(\overline{G\tau}).$$

Die Gültigkeit der übrigen Aussagen von Satz 1 ist offensichtlich, wenn wir noch zeigen können, daß $H^{(\tau)} = G^{(\tau)}$ ist. Nehmen wir im Gegensatz dazu an, daß $G^{(\tau)}$ nicht in H enthalten ist. Dann gilt $G = G^{(\tau)}H$, da $G^{(\tau)}$ zusammenhängend ist. Es sei

$$\mathscr{B} := L^1(N)/k(\overline{G\tau}) = L^1(N)/\mathrm{Ann}_{L^1(N)}(E).$$

Da $L^1(N) * k(\mathscr{Z})$ den Modul E annulliert, können wir $p, q \in U$ als Elemente der adjungierten Algebra $\mathscr{B}^\flat$ von $\mathscr{B}$ auffassen, und es gilt $q^x * \mathscr{B} * q = 0$ für $x \in ZH \setminus H$. Auf Grund der Annahme gibt es eine unendliche zyklische Gruppe Z' in $G^{(\tau)}$ mit $Z' \cap H = (1)$ und $ZH = Z'H$. Wegen $\mathrm{Ann}_{L^1(N)}(E) = k(\overline{G\tau})$ und $qE \neq 0$ existiert ein $\tau' \in G\tau$ mit $\tau'(q) \neq 0$. $\overline{Z'\tau'}$ ist in $T\tau'$ enthalten, also kompakt. Andererseits ist $Z'\tau'$ eine unendliche diskrete Teilmenge von $\overline{G\tau}$; denn:

Ist $x\tau' \sim y\tau'$ $(x, y \in Z')$, also $z\tau' \sim \tau'$ mit $z = y^{-1}x$, so ist auch $(z\tau')(q) = \tau'(q^z) \neq 0$, und wegen der Irreduzibilität von τ' ist dann $\tau'(q^z * \mathscr{B} * q) \neq 0$. Folglich liegt z in H, und man erhält $x = y$. Also sind die $x\tau'$, $x \in Z'$, paarweise inäquivalent. Weiter ist für jedes $z \in Z'$ die Menge $V = \{\rho \in \overline{G\tau}; \rho(q^{z^{-1}}) \neq 0\}$ eine offene Umgebung von $z\tau'$ in $\overline{G\tau}$ mit $V \cap Z'\tau' = \{z\tau'\}$. — Damit ist Satz 1 bewiesen.

Es stellt sich natürlich die Frage, inwieweit τ durch die Bedingung, daß $\mathrm{Ann}_{L^1(N)}(E) = k(\overline{G\tau})$, festgelegt ist. Diese wird durch die folgende Bemerkung geregelt.

Bemerkung 2. Seien G, N und Q wie oben, $\tau \in \hat{N}$ und dazu $G^{(\tau)}$ konstruiert. Weiter sei S eine kompakte Untergruppe von Q mit $\{G^{(\tau)}\tau\}^- = S\tau$. Dann sind für ein $\alpha \in \hat{N}$ äquivalent:

(1) $\overline{G\alpha} = \overline{G\tau}$,

(2) $\alpha \in Q\tau \cap \overline{G\tau}$,

(3) $\alpha \in GS\tau = SG\tau$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Aus (1) folgt $\overline{Q\alpha} = \overline{Q\tau}$. Da die Q-Bahnen in $\hat{N}$ lokal abgeschlossen sind, erhält man hieraus $Q\alpha = Q\tau$, insbesondere $\alpha \in Q\tau$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Die Aussage (2) bedeutet, daß α im relativen Abschluß von $G\tau$ innerhalb des Raumes $Q\tau$ liegt. Nun ist der Raum $Q\tau$ mit der zusammenhängenden lokalkompakten abelschen Gruppe Q/Q_τ identifizierbar, und man hat einen stetigen Homomorphismus $\varphi: G \to Q/Q\tau$, gegeben durch $x\tau = \varphi(x)\tau$. Da $Q_\tau/(Q_\tau)_0$ endlich ist, ist TQ_τ/Q_τ die maximale kompakte Untergruppe von Q/Q_τ.

Wir verwenden nun das folgende einfache Lemma.

Lemma. *Seien G eine zusammenhängende Liesche Gruppe, A eine abelsche zusammenhängende Liesche Gruppe, K die maximale kompakte Untergruppe von A und $\varphi: G \to A$ ein stetiger Homomorphismus. Dann ist $\varphi(G)^- = \varphi(G)\{\varphi(G) \cap K\}^-$.*

Damit erhält man für den Abschluß von $G\tau$ in $Q\tau$:

$$\overline{G\tau} \cap Q\tau = G\{\mathrm{Ad}(G)\,Q_\tau \cap TQ_\tau\}^-\,\tau.$$

Weiter ist offenbar $\{\mathrm{Ad}(G)\,Q_\tau \cap TQ_\tau\}^-\,\tau = \{G^{(\tau)}\tau\}^- = S\tau$, also $\overline{G\tau} \cap Q\tau = SG\tau$, woraus sich (3) ergibt.

(3) $\Rightarrow$ (1). Es ist zu zeigen, daß $\alpha \in \overline{G\tau}$ und $\tau \in \overline{G\alpha}$. Aus (3) folgt $\alpha \in \overline{GS\tau} = \overline{G\tau}$. Es gibt $s \in S$ und $x \in G$ mit $\tau = xs\alpha = sx\alpha$ sowie eine Folge x_n in $G^{(\tau)}$ mit $s\tau = \lim x_n\tau$. Die Folge $xx_n\alpha = x_n s^{-1}\tau = s^{-1}x_n\tau$ konvergiert dann gegen τ, also liegt τ in $\overline{G\alpha}$.

§ 2. Konstruktion gewisser Elemente in $L^1(N)/k(S\tau)$

Im folgenden sei nun G eine einfachzusammenhängende auslösbare Liesche Gruppe und N ein zusammenhängender nilpotenter Normalteiler mit abelschem Quotienten G/N. Weiter sei ein $\tau \in \hat{N}$ gegeben und dazu ein $g \in \mathfrak{n}^*$ mit $\varkappa_N(g) = \tau$ fest gewählt. Zu τ können wir die zusammenhängende Gruppe $G^{(\tau)}$ bilden. Mit P sei die Zusammenhangskomponente des Zariski-Abschlusses von $\mathrm{Ad}(G)$ in $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Aut}(G)$ bezeichnet, wobei $\mathfrak{g}$ natürlich die Liesche Algebra von G ist. P überführt $\mathfrak{n}$ (und N) in sich und operiert trivial auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ und auf G/N. Die Gruppe $P|_\mathfrak{n}$ der Einschränkungen übernimmt im folgenden die Rolle der Gruppe Q aus § 1. Für jede maximale kompakte Untergruppe T von P gilt $G^{(\tau)} = \mathrm{Ad}^{-1}(TP_\tau)$ und $G^{(\tau)}\tau \subset T\tau$. Wir wählen nun T so, daß $T_g \doteq T \cap P_g$ eine maximale kompakte Untergruppe von P_g ist. Wie man sich ohne Mühe überlegt, gelten damit zusätzlich $T_\tau = T_g$ und $(T\,\mathrm{Ad}(N))_g = T_g\,\mathrm{Ad}(N_g)$. In T wählen wir weiter einen Teiltorus S mit $\{G^{(\tau)}\tau\}^- = S\tau$ derart, daß die Stabilisatorgruppe $S_\tau\,(=S_g)$ endlich ist. Wegen des einfachen Zusammenhangs von $G^{(\tau)}$ gibt es dann einen wohlbestimmten stetigen Homomorphismus $r: G^{(\tau)} \to S$ mit $x\tau = r(x)\,\tau$; r ist trivial auf der Komponente $(G_\tau)_0$, insbesondere auf N.

Ab jetzt wird ein fester Repräsentant der Äquivalenzklasse $\tau \in \hat{N}$ fixiert, d.h. eine irreduzible unitäre Darstellung der Gruppe N in einem Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$; der Repräsentant wird ebenfalls mit τ bezeichnet.

Mittels S bilden wir als Hilfsgruppe das semidirekte Produkt $F := S \ltimes G^{(\tau)}$ mit der Multiplikation $(s, x)\,(t, y) = (st, t^{-1}(x)\,y)$. Man beachte, daß P auf G/N trivial operiert, folglich ist $G^{(\tau)}$ invariant unter P und insbesondere auch invariant unter S. F enthält N, und der Stabilisator F_τ von τ ist gerade $F_\tau = \{(sr(x)^{-1}, x);\ x \in G^{(\tau)},\ s \in S_\tau\}$ oder $F_\tau = S_\tau F'$ mit $F' := \{(r(x)^{-1}, x);\ x \in G^{(\tau)}\} = (F_\tau)_0$. Da S_τ kommutativ ist und das Funktional g stabilisiert, sind die Voraussetzungen von II. 3 und III. 2 in [1] offenbar erfüllt, und es gibt eine (gewöhnliche) Darstellung $U^{(1)}$ von $S_\tau \ltimes N$, welche τ fortsetzt. Weiter ist $(F_\tau)_0 = F' = F'_g N$, also ist die Vektorgruppe F'/N isomorph zu F'_g/N_g, woraus man schließen kann, daß F'_g zusammenhängend und einfachzusammenhängend ist. Nach [6], Lemma 4. 1 und Lemma 5. 2, gibt es eine Darstellung V von F'_g in $\mathfrak{H}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Auf dem semidirekten Produkt $F'_g \ltimes N$ ist durch $(x, n) \to V(x)\,\tau(n)$ eine stetige Darstellung definiert.

(ii) Für $X \in \mathfrak{n}_g$ gilt $V(\exp X) = e^{-ig(X)}\tau(\exp X)$.

Wählt man nun irgendeine lineare Fortsetzung $\tilde{g}$ von $g|_{\mathfrak{n}_g}$ auf $\mathfrak{f}_g$, die Liesche Algebra von F'_g, so ist durch $\gamma(\exp X) = e^{i\tilde{g}(X)}$ für $X \in \mathfrak{f}_g$ eine eindimensionale m-projektive stetige Darstellung von F'_g definiert. Der durch γ definierte Cozyklus m lebt auf der kommutativen Gruppe F'_g/N_g und ist dort ein stetiger Bicharakter. Weiter gilt

$$m(\exp X, \exp Y) = e^{-\frac{1}{2}ig([X, Y])}$$

für $X, Y \in \mathfrak{f}_g$ und

$$m(x, \exp Y) = e^{-\frac{1}{2}ig(\mathrm{Ad}(x)(Y) - Y)}$$

für $x \in F'_g$ und $Y \in \mathfrak{f}_g$.

Bezeichnet man mit $\chi_{-\frac{1}{2}ig}$ den Charakter von N_g mit Differential $-\frac{1}{2}ig$, so gilt

$$m(x, y) = \chi_{-\frac{1}{2}ig}(xyx^{-1}y^{-1}) \quad \text{für} \quad x, y \in F'_g.$$

Definiert man dann $U^{(2)}$ auf F' durch $U^{(2)}(xn) := \gamma(x)\, V(x)\, \tau(n)$ für $x \in F'_g$, $n \in N$, so ist $U^{(2)}$ eine stetige m-projektive Fortsetzung von τ, wobei wir hier m als Cozyklus auf $F'/N \cong F'_g/N_g$ auffassen. Schließlich finden wir eine μ-projektive Fortsetzung U von τ auf F_τ via

$$U(sr(x)^{-1}, x) = U^{(1)}(s)\, U^{(2)}(r(x)^{-1}, x)$$

für $x \in G^{(\tau)}$, $s \in S_\tau$.

Zur Bestimmung des Cozyklus μ wird $v: S_\tau \times F' \to \mathbb{T}$ definiert durch

$$U^{(2)}(r(x)^{-1}, t^{-1}(x)) = v(t, (r(x)^{-1}, x))\, U^{(1)}(t)^*\, U^{(2)}(r(x)^{-1}, x)\, U^{(1)}(t).$$

Man weist leicht nach, daß v auf $S_\tau \times (F'/N)$ lebt. Unter Verwendung der Tatsache, daß S_τ auf F'/N trivial operiert, erhält man, daß v dort ein stetiger Bicharakter ist. Daher ist $t \to v(t, -)$ ein stetiger Homomorphismus von der kompakten Gruppe S_τ in die Vektorgruppe $(F'/N)^\wedge$ und folglich trivial. Aus der Beziehung

$$U^{(2)}(r(x)^{-1}, t^{-1}(x)) = U^{(1)}(t)^*\, U^{(2)}(r(x)^{-1}, x)\, U^{(1)}(t)$$

ergibt sich dann

$$U(sr(x)^{-1}, x)\, U(\mathrm{tr}(y)^{-1}, y) = m((r(x)^{-1}, x), (r(y)^{-1}, y))\, U((sr(x)^{-1}, x)(\mathrm{tr}(y)^{-1}, y))$$

für $s, t \in S_\tau$, $x, y \in G^{(\tau)}$.

Der Cozyklus μ ist also ein schiefer Bicharakter auf $F_\tau/S_\tau N \cong F'_g/N_g \cong F'/N$, der im wesentlichen durch m auf F'_g bestimmt ist. Und U ist eine projektive Fortsetzung der Darstellung $U^{(1)}$.

Die Gruppe F operiert isometrisch auf der Algebra $L^1(N)$ durch

$$a^{(t,x)}(n) = \Delta(x)^{-1}\, a(t(xnx^{-1}))$$

für $t \in S$, $x \in G^{(\tau)}$, $n \in N$. Das Ideal $k(S\tau)$ ist invariant unter F, also operiert F auch auf der Quotientenalgebra $\mathscr{A} := L^1(N)/k(S\tau)$. Für die Wirkung von $t \in S$ oder $x \in G^{(\tau)}$ auf $\mathscr{A}$ schreiben wir auch kürzer a^t bzw. a^x an Stelle von $a^{(t,e)}$ bzw. $a^{(e,x)}$. Die „Fourier-Transformation" $\mathscr{F}: \mathscr{A} \to \mathscr{C}(S, \mathscr{K}(\mathfrak{H}))$ ist gegeben durch

$$(\mathscr{F}a)(t) = (t\tau)(a) = \tau(a^t).$$

Für $s \in S$ und $t \in S_\tau$ gilt $(\mathscr{F} a)(st) = U(t)^* (\mathscr{F} a)(s)\, U(t)$. Die C^*-Hülle von $\mathscr{A}$ läßt sich identifizieren mit der Algebra $\mathscr{E}$ aller stetigen Funktionen $\varphi: S \to \mathscr{K}(\mathfrak{H})$ mit

$$\varphi(st) = U(t)^* \varphi(s)\, U(t)$$

für $t \in S_\tau$, vgl. dazu 11.1.4 und 11.1.6 in [5] sowie [24]. Da die Fixpunkt-Algebra $\mathscr{A}^S$ als abgeschlossene Unteralgebra der symmetrischen Algebra $\mathscr{A}$ ebenfalls symmetrisch ist und insbesondere jede irreduzible involutive Darstellung Teil einer irreduziblen Darstellung von $\mathscr{A}$ ist, ist die C^*-Hülle von $\mathscr{A}^S$ gleich dem Abschluß von $\mathscr{F}(\mathscr{A}^S)$ in $\mathscr{E}$, d.h. gleich $\mathscr{E}^S = \{\varphi \in \mathscr{E};\ \varphi \text{ ist konstant}\} \cong \{a \in \mathscr{K}(\mathfrak{H});\ U(t)^* a\, U(t) = a \text{ für alle } t \in S_\tau\}$.

Für $\chi \in \hat{S}_\tau$ sei $\mathfrak{H}_\chi = \{\xi \in \mathfrak{H};\ U(t)\,\xi = \chi(t)\,\xi \text{ für alle } t \in S_\tau\}$. Da $U^{(1)} = U|_{S_\tau}$ eine gewöhnliche Darstellung ist, zerfällt $\mathfrak{H}$ in die orthogonale Summe der $\mathfrak{H}_\chi$. $\mathfrak{H}_\chi$ ist invariant und irreduzibel über $\tau(\mathscr{A}^S)$. Sind $\chi, \eta \in \hat{S}_\tau$ mit $\chi \neq \eta$ und $\mathfrak{H}_\chi \neq 0 \neq \mathfrak{H}_\eta$, so sind die entsprechenden Darstellungen von $\mathscr{A}^S$ inäquivalent. Weiter erhält man durch diese Prozedur bis auf Äquivalenz sämtliche irreduziblen Darstellungen von $\mathscr{A}^S$, $(\mathscr{A}^S)^\wedge$ läßt sich also mit einem Teil von $(S_\tau)^\wedge$ identifizieren. Eine leichte Modifikation von Lemma 1 in [23] zeigt dann, daß es ein $p = p^* \in \mathscr{A}^S$ gibt, für welches $\tau(p)$ ein Projektor vom Rang 1 ist. Zu einem solchen p konstruieren wir nun eine stetige Abbildung $x \to u_x$ von $G^{(\tau)}$ in $\mathscr{A}$ mit den folgenden Eigenschaften für $x, y \in G^{(\tau)}$ und $t \in S$:

(1) $\mathscr{F}(u_x)(t) = U(r(x)^{-1}, t^{-1}(x))^* \tau(p)$, insbesondere also $u_e = p$,

(2) $u_x \in p^x \mathscr{A} p$,

(3) $u_x^* u_x = p$, $u_x u_x^* = p^x$ und $u_x = u_{x^{-1}}^{*x}$,

(4) $u_x^y u_y = \bar{m}\big((r(x)^{-1}, x), (r(y)^{-1}, y)\big)\, u_{xy}$,

(5) $(u_x)^t = u_{t^{-1}(x)}$,

(6) $u_{xn} = \varepsilon_{n^{-1}} * u_x$, $u_{nx} = \varepsilon_{x^{-1}n^{-1}x} * u_x$ für $n \in N$, wobei ε_n das Punktmaß bei n bezeichnet.

(7) $u_y^* a^y u_y = a^{r(y)}$ für alle $a \in p\mathscr{A}p$.

Zunächst gilt allgemein für $a \in \mathscr{A}$, $x \in G^{(\tau)}$ und $t \in S$:

(0) $\mathscr{F}(a^x)(t) = U(r(x)^{-1}, t^{-1}(x))^* (\mathscr{F} a)(\operatorname{tr}(x))\, U(r(x)^{-1}, t^{-1}(x))$,

wie man durch Nachrechnen sofort bestätigt.

Auch die Gleichungen (3), (4), (5), (6) und (7) ergeben sich aus (1), welches u_x natürlich eindeutig festlegt, durch einfaches Nachrechnen. Zur Konstruktion von u_x benutzen wir, daß für jedes festes x die Gruppe S durch $s \cdot a := \varphi_x(s)(a) := \varepsilon_{x^{-1}s(x)} * a^{s^{-1}}$ homomorph und stetig auf $\mathscr{A}$ operiert. Für $a \in \mathscr{A}$ setze man $a_x := \int_S \varphi_x(s)(a)\, ds$. Die Abbildung $x \to a_x$ ist stetig auf $G^{(\tau)}$. a_x ist invariant unter der Wirkung φ_x, und man rechnet nach, daß die Funktion $t \to U(r(x)^{-1}, t^{-1}(x))\, \mathscr{F}(a_x)(t)$ konstant auf S ist. Es gilt also

$$\tau(p)\, U(r(x)^{-1}, t^{-1}(x))\, \mathscr{F}(a_x)(t)\, \tau(p) = c(a, x)\, \tau(p)$$

mit $c(a, x) \in \mathbb{C}$.

Weiter ist für festes $a \in \mathscr{A}$ die Funktion $x \to c(a,x)$ stetig auf $G^{(\tau)}$, da U eine stetige projektive Darstellung ist. Schließlich gibt es zu jedem $x \in G^{(\tau)}$ ein $a \in \mathscr{A}$ mit $c(a,x) \neq 0$. Setzt man damit $u_y := \frac{1}{c(a,y)} p^y a_y p$ für y in einer passenden Umgebung von x, so rechnet man leicht nach, daß u_y die in (1) und (2) verlangten Eigenschaften besitzt. An der Konstruktion erkennt man, daß $x \to u_x$ eine stetige Abbildung ist.

§ 3. Unitarisierbarkeit einfacher $L^1(G)$-Moduln

Nach wie vor sei G eine einfachzusammenhängende auflösbare Liesche Gruppe, N ein nilpotenter zusammenhängender Normalteiler in G mit abelschem Quotienten G/N, P die Zusammenhangskomponente des Zariski-Abschlusses von $\mathrm{Ad}(G)$ in $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ und T ein maximaler Torus in P. Für einen einfachen $L^1(G)$-Modul beweisen wir nun das folgende hinreichende Kriterium für Unitarisierbarkeit.

Satz 2. *Sei E ein einfacher $L^1(G)$-Modul mit $\mathrm{Ann}_{L^1(N)}(E) = k(\overline{G\tau})$. Weiter sei $g \in \mathfrak{n}^*$ gewählt mit $\varkappa_N(g) = \tau$, und $f \in \mathfrak{g}^*$ sei eine Fortsetzung von g. Es sei $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_g$ das größte Ideal von $\mathfrak{g}$, welches in $\mathrm{Kern}\, g (\subseteq \mathfrak{n})$ enthalten ist, $D = \exp \mathfrak{d}$ sei der entsprechende Normalteiler. Hat die Gruppe $\mathrm{Ad}^{-1}(P_f T \mathrm{Ad}(N))/D$ ein polynomial wachsendes Haarsches Maß, so ist E unitarisierbar.*

Korollar. *Falls für jedes $f \in \mathfrak{g}^*$ die Gruppe $\mathrm{Ad}^{-1}(P_f T \mathrm{Ad}(N))/D_g$, wobei $g = f|_{\mathfrak{n}}$, ein polynomial wachsendes Haarsches Maß besitzt, so ist $L^1(G)$ eine symmetrische Banachsche Algebra.*

Beweis des Satzes. Da die Gruppe $T\mathrm{Ad}(N)$ von der Wahl des Torus T nicht abhängt, können wir annehmen, daß wieder $T_g = T_\tau$ und $(T\mathrm{Ad}(N))_g = T_g \mathrm{Ad}(N_g)$ gelten. Außerdem ist $T_f = T_g$, da T halbeinfach auf $\mathfrak{g}$ und trivial auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ wirkt. Ist weiter S wie in § 2 gewählt, so gilt $\mathrm{Ad}^{-1}(P_f T \mathrm{Ad}(N)) = \mathrm{Ad}^{-1}(P_f S \mathrm{Ad}(N))$ wegen $T_f = T_g = T_\tau$.

Nach Satz 1 gibt es einen einfachen $L^1(G^{(\tau)})$-Modul M mit $\mathrm{Ann}_{L^1(N)}(M) = k(G^{(\tau)}\tau)$ und eine $L^1(G)$-lineare Einbettung von E in $L^2_{G^{(\tau)}}(G, M)$. Es genügt daher zu zeigen, daß man den $L^1(G^{(\tau)})$-Modul M unitarisieren kann. Die Darstellung τ von N läßt sich zu einer unitären Darstellung σ von $(G_f)_0 N$ fortsetzen, beispielsweise ist $\sigma = U|_{(G_f)_0 N}$ mit der in § 2 konstruierten Darstellung U eine solche Fortsetzung. Man beachte dabei, daß $(G_g)_0 N$ und insbesondere $(G_f)_0 N$ im Kern von r liegt. Für jede solche Fortsetzung σ gilt

$$(8)\quad G^{(\sigma)} := \mathrm{Ad}^{-1}(SP_\sigma) = \{x \in G;\, x\sigma \in S\sigma\} = \mathrm{Ad}^{-1}(P_f S \mathrm{Ad}(N))\,(G_g)_0.$$

Die erste behauptete Gleichung ist trivial. Weiter sind die Gleichungen natürlich unabhängig von der Wahl der Fortsetzung σ, so daß wir für die folgende Argumentation $\sigma = U|_{(G_f)_0 N}$ annehmen können. Die in Rede stehenden Gruppen sind in $G^{(\tau)}$ enthalten, und man rechnet leicht nach, daß für $x \in G^{(\tau)}$ die Darstellung $x\sigma$ zu $r(x)\,\sigma \otimes \gamma_x$ unitär äquivalent ist, wobei der Charakter γ_x gegeben ist durch

$$\begin{aligned}\gamma_x(a) &= \mu\big((r(x)^{-1}, x), (e, r(x)^{-1}(a))\big)\,\bar{\mu}\big((e, r(x)^{-1}(a)), (r(x)^{-1}, x)\big)\\ &= \mu\big((r(x)^{-1}, x), (e, a)\big)\,\bar{\mu}\big((e, a), (r(x)^{-1}, x)\big) = \mu^2\big((r(x)^{-1}, x), (e, a)\big)\end{aligned}$$

für $a \in (G_f)_0 N$.

Die Abbildung $x \to \gamma_x$ ist ein stetiger Homomorphismus von $G^{(\tau)}$ mit Werten in $((G_f)_0 N N)' \cong ((G_f)_0 / N_f)^\wedge$. Liegt $(r(x)^{-1}, x)$ sogar in F_g, so gilt für $a \in (G_f)_0 \subset F_g$:

$$\gamma_x(a) = \chi_{-ig}\big((r(x)^{-1}, x)(e, a)(r(x)^{-1}, x)^{-1}(e, a^{-1})\big).$$

Ein $x \in G^{(\tau)}$ liegt dann und nur dann in $G^{(\sigma)}$, wenn $\gamma_x \equiv 1$ ist. Es bleibt also zu zeigen, daß

$$\{x \in G^{(\tau)};\, \gamma_x = 1\} = \mathrm{Ad}^{-1}(P_f S \,\mathrm{Ad}(N))(G_g)_0$$

oder, anders ausgedrückt:

(9) Der Senkrechtraum von $(G_f)_0 \subset F$ bezüglich der schiefen Form μ (oder μ^2) ist gerade $\{(r(x)^{-1}, x);\, x \in G^{(f)}(G_g)_0\}$, wobei $G^{(f)} = \mathrm{Ad}^{-1}(P_f S\,\mathrm{Ad}(N))$ gesetzt wurde.

Da wir Aussagen eines ähnlichen Typs auch später benötigen, formulieren und beweisen wir sie gleich an dieser Stelle.

(10) Der Kern der eingeschränkten Form $\mu|_{(G_g)_0 \times (G_g)_0}$ ist gleich $(G_f)_0 N_g$.

(11) Der Senkrechtraum von $(G_g)_0 \subset F$ bezüglich μ ist $\{(r(x)^{-1}, x);\, x \in G^{(f)}\}$.

Aus (10) und (11) ergibt sich: $(G_g)_0 \cap G^{(f)} = N_g (G_f)_0$.

Zu (10). Diese Aussage bedeutet nichts anderes, als daß der Kern der Form $(X, Y) \to g([X, Y]) = f([X, Y])$ auf $\mathfrak{g}_g \times \mathfrak{g}_g$ gerade $\mathfrak{g}_f + \mathfrak{n}_g$ ist. Es ist klar, daß $\mathfrak{g}_f + \mathfrak{n}_g$ in diesem Kern liegt; aus Dimensionsgründen gilt die Gleichheit.

Zu (9) und (11). Sei zunächst $x \in G^{(f)}$. Wir wollen zeigen, daß $(r(x)^{-1}, x)$ auf $(G_g)_0$ (und dann auch auf $(G_f)_0$) senkrecht steht. Durch Abändern von x um ein Element aus N kann man erreichen, daß xf in Sf liegt, also etwa $xf = sf$. Dann gilt auch $x\tau = s\tau$. Mit $x\tau = r(x)\,\tau$ ergibt sich $s^{-1} r(x) \in S_\tau = S_g = S_f$, also $xf = r(x) f$ und insbesondere $(r(x)^{-1}, x) \in F_f \subset F_g$. Es genügt, den Cozyklus μ an der Stelle $((r(x)^{-1}, x), (e, y))$ mit $y = \exp Y$, $Y \in \mathfrak{g}_g$, auszuwerten. Dort aber gilt

$$\mu((r(x)^{-1}, x), (e, y)) = e^{-\frac{i}{2} g(\mathrm{Ad}(r(x)^{-1}, x)\, Y - Y)} = e^{-\frac{i}{2}\{f(r(x)^{-1})\,\mathrm{Ad}(x)(Y) - f(Y)\}} = 1.$$

Da $(G_g)_0$ nach (10) auf $(G_f)_0$ senkrecht steht, sind mithin zwei Inklusionen der in (9) und (11) behaupteten Gleichungen bewiesen.

Sei nun $x \in G^{(\tau)}$, und $(r(x)^{-1}, x)$ stehe senkrecht auf $(G_f)_0$. Durch Abändern von x um ein Element aus N kann man erreichen, daß $(r(x)^{-1}, x) \in F_g$, also $xg = r(x)\, g$. Nach Annahme stabilisiert $(r(x)^{-1}, x)$ dann das Funktional $f|_{\mathfrak{g}_f}$, und es gilt

$$xf|_{\mathfrak{g}_f + \mathfrak{n}} = r(x) f|_{\mathfrak{g}_f + \mathfrak{n}}.$$

Bekanntlich ist $(G_g)_0 f = f + \{\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_f + \mathfrak{n})\}^*$. Insbesondere gibt es ein $y \in (G_g)_0$ mit $xf - r(x) f = f - yf$, und es ist dann $xyf = r(x) f = r(xy) f$ wegen $r((G_g)_0) = 1$. Daher liegt xy in $G^{(f)}$ und x in $G^{(f)}(G_g)_0$, womit (9) bewiesen ist.

Es gelte nun zusätzlich, daß $(r(x)^{-1}, x)$ sogar auf $(G_g)_0$ senkrecht steht. Da nach dem ersten Teil des Beweises auch $(r(xy)^{-1}, xy) = (r(x)^{-1}, xy) = (r(x)^{-1}, x)(e, y)$ auf $(G_g)_0$ senkrecht steht, steht $(e, y) \in (G_g)_0$ auf $(G_g)_0$ senkrecht, also liegt y nach (10) in $(G_f)_0 N_g$ und damit x in $G^{(f)}(G_f)_0 N_g = G^{(f)}$, womit auch (11) bewiesen ist.

Die Algebra $\mathscr{B} := L^1((G_f)_0 N)/\{k(S\tau) * L^1((G_f)_0 N)\}^-$ ist ein Quotient von

$$L^1((G_f)_0 N/D),$$

also $*$-regulär und symmetrisch, vgl. [2] und [18]. Weiter ist $\hat{\mathscr{B}}$ homöomorph zu $S\sigma \times ((G_f)_0 N/N)^\wedge$ für jedes $\sigma \in \hat{\mathscr{B}}$, also ein homogener Raum unter der Aktion von $S \times ((G_f)_0 N/N)^\wedge$. Damit sind alle Voraussetzungen von Lemma 2 in [23] erfüllt.

Beachtet man, daß $G^{(\sigma)}$ gerade der Kern der Abbildung $x \to \gamma_x$ von $G^{(\tau)}$ in $((G_f)_0 N/N)^\wedge$ ist, so findet man, daß $G^{(\tau)}/G^{(\sigma)}$ frei auf $S\backslash\hat{\mathscr{B}}$ operiert. Wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 1 kann man nun induktiv Theorem 2 aus [25] anwenden und schließen, daß es einen einfachen $L^1(G^{(\sigma)})$-Modul K sowie eine $L^1(G^{(\tau)})$-lineare Einbettung von M in $L^2_{G^{(\sigma)}}(G^{(\tau)}, K)$ gibt. Der Annullator von K in $L^1(N)$ ist der Kern einer gewissen Teilmenge von $S\tau$, die im folgenden ohne Bedeutung ist.

Um Satz 2 zu beweisen, genügt es also, eine Unitarisierung des einfachen Moduls K zu konstruieren. Dazu sind einige Vorbetrachtungen erforderlich.

Auch die Algebra $\mathscr{C} := L^1(G^{(f)})/\{L^1(G^{(f)}) * k(S\tau)\}^-$ ist als Quotient von

$$L^1(G^{(f)}/D)$$

symmetrisch, und die Algebra $\mathscr{A} = L^1(N)/k(S\tau)$ liegt in der adjungierten Algebra von $\mathscr{C}$. Insbesondere operieren p und die u_x, $x \in G^{(\tau)}$, auf $\mathscr{C}$. Unter Verwendung von (11) erhält man

(12) $\quad u_y^* * c^y * u_y = c$ für alle $y \in (G_g)_0$ und alle $c \in p * \mathscr{C} * p$.

Zum Beweis wählen wir ein Vektorraum-Komplement $\mathfrak{x}$ zu $\mathfrak{n}$ in der Lieschen Algebra $\mathfrak{g}^{(f)}$ von $G^{(f)}$. Setzt man $X = \exp \mathfrak{x}$, so läßt sich $G^{(f)}$ als Mannigfaltigkeit und als Maßraum mit $\mathfrak{x} \times N$ und mit $X \times N$ identifizieren. Der Banachsche Raum $L^1(G^{(f)})$ ist isometrisch isomorph zu $L^1(X, L^1(N))$, und $\mathscr{C}$ ist isometrisch isomorph zu $L^1(X, \mathscr{A})$, mit $\tilde{d}$ bezeichnen wir das zu $d \in \mathscr{C}$ korrespondierende Element. Wie man leicht nachrechnet, gelten für diese Korrespondenz

$$(u_y^* * d * u_y)^\sim(x) = u_y^{*x} * \tilde{d}(x) * u_y$$

für alle $x \in X$ und alle $y \in G^{(\tau)}$, insbesondere

$$(p * d * p)^\sim(x) = p^x * \tilde{d}(x) * p,$$

sowie

$$(d^y)^\sim(x) = \varepsilon_{x^{-1}y^{-1}xy} * \tilde{d}(x)^y$$

für $x \in X$ und $y \in G$. Die Behauptung (12) ist damit gleichbedeutend zu

$$u_y^{*x} * \varepsilon_{x^{-1}y^{-1}xy} * \tilde{c}(x)^y * u_y = \tilde{c}(x).$$

Beachtet man, daß $\tilde{c}(x)$ in $p^x * \mathscr{A} * p$ liegt, so folgt (12) aus

(12') $\quad u_y^{*x} * \varepsilon_{x^{-1}y^{-1}xy} * a^y * u_y = a$ für alle $x \in G^{(f)}$, $y \in (G_g)_0$ und $a \in p^x * \mathscr{A} * p$.

Zum Nachweis dieser Identität wenden wir $\mathscr{F}$ auf beiden Seiten der Gleichung an.

$$\begin{aligned}L &:= \mathscr{F}(u_y^{*x} * \varepsilon_{x^{-1}y^{-1}xy} * a^y * u_y)(t)\\ &= U(r(x)^{-1}, t^{-1}(x))^* \mathscr{F}(u_y)(\operatorname{tr}(x))^* U(r(x)^{-1}, t^{-1}(x))\\ &\quad \tau(t^{-1}(x^{-1}y^{-1}xy))\, U(e, t^{-1}(y))^* (\mathscr{F}a)(t)\, U(e, t^{-1}(y))\, (\mathscr{F}u_y)(t),\end{aligned}$$

wobei (0) sowie $r((G_g)_0) = 1$ verwendet wurde. Mittels (1) ergibt sich

$$\begin{aligned}L &= U(r(x)^{-1}, t^{-1}(x))^* \tau(p)\, U(e, \{\operatorname{tr}(x)\}^{-1}(y))\\ &\quad U(r(x)^{-1}, t^{-1}(y^{-1}xy))\, U(e, t^{-1}(y))^* (\mathscr{F}a)(t)\, \tau(p).\end{aligned}$$

Wegen (11) kann man die drei mittleren Operatoren zu $U(r(x)^{-1}, t^{-1}(x))$ zusammenfassen und erhält

$$\begin{aligned}L &= U(r(x)^{-1}, t^{-1}(x))^* \tau(p)\, U(r(x)^{-1}, t^{-1}(x))\, (\mathscr{F}a)(t)\, \tau(p)\\ &= (\mathscr{F}p^x)(t)\, (\mathscr{F}a)(t)\, (\mathscr{F}p)(t),\end{aligned}$$

womit (12′) bewiesen ist.

Im nächsten Schritt studieren wir die Algebra

$$\mathscr{D} := L^1(G^{(\sigma)})/\{k(S\tau) * L^1(G^{(\sigma)})\}^-$$

und insbesondere $p * \mathscr{D} * p$. Nach (9), (10) und (11) ist $G^{(\sigma)} = G^{(f)}(G_g)_0$ und

$$G^{(\sigma)}/G^{(f)} \cong (G_g)_0/(G_g)_0 \cap G^{(f)} = (G_g)_0/(G_f)_0\, N_g.$$

Wählt man also ein Vektorraum-Komplement $\mathfrak{v}$ zu $\mathfrak{g}_f + \mathfrak{n}_g$ in $\mathfrak{g}_g$, so läßt sich $G^{(\sigma)}$ als Mannigfaltigkeit und als Maßraum mit $\mathfrak{v} \times G^{(f)}$ identifizieren. Für $x, y \in \mathfrak{v}$ sei

$$\gamma(x, y) := (\exp y)^{-1} (\exp x)^{-1} \exp(x + y) \in N_g.$$

Dann kann man, vgl. [12] oder [24], $\mathscr{D}$ mit $L^1(\mathfrak{v}, \mathscr{C})$ identifizieren, wobei man für die Multiplikation und die Involution in $L^1(\mathfrak{v}, \mathscr{C})$ die Formeln

$$(f * h)(x) = \int_{\mathfrak{v}} dy\, \varepsilon_{\gamma(x+y,\,-y)^{-1}} * \{f(x+y)^{\exp(-y)}\} * h(-y)$$

und $f^*(x) = f(-x)^{*\exp x}$ erhält.

Für Elemente a in der adjungierten Algebra von $\mathscr{C}$, insbesondere für $a \in \mathscr{A}$, hat man

$$(a * f)(x) = a^{\exp x} * f(x) \quad \text{und} \quad (f * a)(x) = f(x) * a.$$

Ist $f \in p * L^1(\mathfrak{v}, \mathscr{C}) * p$, also $f = p * f * p$, so liegt $f(x)$ in

$$p^{\exp x} * \mathscr{C} * p = u_{\exp x} * u_{\exp x}^* * \mathscr{C} * p.$$

Setzen wir $u'_x := u_{\exp x}$ für $x \in \mathfrak{v}$, so gilt

$$f(x) = u'_x * \tilde{f}(x) \quad \text{mit} \quad \tilde{f}(x) = u'^*_x * f(x) \in u'^*_x * \mathscr{C} * p = p * \mathscr{C} * p.$$

Die Abbildung $f \to \tilde{f}$ definiert eine Isometrie von $p * L^1(\mathfrak{v}, \mathscr{C}) * p$ auf einen Raum $\mathscr{L} := \mathscr{L}(\mathfrak{v}, p * \mathscr{C} * p)$ meßbarer Funktionen von $\mathfrak{v}$ in $p * \mathscr{C} * p$, wobei für die Norm von φ in $\mathscr{L}$ gilt $\|\varphi\| = \int_{\mathfrak{v}} \|u'_x * \varphi(x)\| \; dx$.

Auf $\mathscr{L}$ definieren wir nun eine Multiplikation und eine Involution durch

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{\mathfrak{v}} dy \, e^{-\frac{i}{2} g([x,y])} \varphi(x+y) * \psi(-y) \quad \text{und} \quad \varphi^*(x) = \varphi(-x)^*.$$

Damit gilt

(13) Die Abbildung $f \to \tilde{f}$, gegeben durch $\tilde{f}(x) = u'^*_x * f(x)$, ist ein isometrischer $*$-Isomorphismus von $p * L^1(\mathfrak{v}, \mathscr{C}) * p$ auf $\mathscr{L}$.

Zunächst zeigen wir, daß $f \to \tilde{f}$ involutiv ist. Sei $f \in p * L^1(\mathfrak{v}, \mathscr{C}) * p$, also

$$f(x) = u'_x * \tilde{f}(x).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}(f^*)^\sim(x) &= u'^*_x * f^*(x) \\ &= u'^*_x * f(-x)^{*\exp x} = u'^*_x * \{u'_{-x} * \tilde{f}(-x)\}^{*\exp x} \\ &= u^*_{\exp x} * \tilde{f}(-x)^{*\exp x} * u^{*\exp x}_{\exp(-x)} = u^*_{\exp x} * \tilde{f}(-x)^{*\exp x} * u_{\exp x}\end{aligned}$$

nach (3). Mit (12) ergibt sich $(f^*)^\sim(x) = \tilde{f}(-x)^* = (\tilde{f})^*(x)$.

Zum Nachweis der Multiplikativität seien $f, h \in p * L^1(\mathfrak{v}, \mathscr{C}) * p$, $f(x) = u'_x * \tilde{f}(x)$, $h(x) = u'_x * \tilde{h}(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned}(f * h)^\sim(x) &= u'^*_x * \int_{\mathfrak{v}} dy \, \varepsilon_{\gamma(x+y,-y)^{-1}} * \{f(x+y)\}^{\exp(-y)} * h(-y) \\ &= \int_{\mathfrak{v}} dy \, u'^*_x * \varepsilon_{\gamma(x+y,-y)^{-1}} * u'^{\exp(-y)}_{x+y} * \tilde{f}(x+y)^{\exp(-y)} * u'_{-y} * \tilde{h}(-y).\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}u'_{x+y} = u_{\exp(x+y)} &= u_{\exp(x)\exp(y)\gamma(x,y)} \\ &= \varepsilon_{\gamma(x,y)^{-1}} * u^{\exp y}_{\exp x} * u_{\exp y} e^{-\frac{i}{2} g([x,y])}\end{aligned}$$

nach (6) und (4) und damit

$$\begin{aligned}u'^{\exp(-y)}_{x+y} &= e^{-\frac{i}{2} g([x,y])} \varepsilon_{\exp y \gamma(x,y)^{-1} \exp(-y)} * u_{\exp x} * u^{\exp(-y)}_{\exp y} \\ &= e^{-\frac{i}{2} g([x,y])} \varepsilon_{\exp y \gamma(x,y)^{-1} \exp(-y)} * u'_x * u^*_{\exp(-y)}\end{aligned}$$

nach (3). Man erhält

$$
\begin{aligned}
&u_x'^{*} * \varepsilon_{\gamma(x+y,-y)^{-1}} * u_{x+y}'^{\exp(-y)} \\
&\quad = e^{-\frac{i}{2}g([x,y])} u_x'^{*} * \varepsilon_{\gamma(x+y,-y)^{-1}\exp y\,\gamma(x,y)^{-1}\exp(-y)} * u_x' * u_{-y}'^{*} \\
&\quad = e^{-\frac{i}{2}g([x,y])} u_x'^{*} * u_x' * u_{-y}'^{*} = e^{-\frac{i}{2}g([x,y])} p * u_{-y}'^{*}
\end{aligned}
$$

und weiter

$$
\begin{aligned}
(f * h)^{\sim}(x) &= \int_{\mathfrak{v}} dy\, e^{-\frac{i}{2}g([x,y])} p * u_{-y}'^{*} \tilde{f}(x+y)^{\exp(-y)} * u_{-y}' * \tilde{h}(-y) \\
&= \int_{\mathfrak{v}} dy\, e^{-\frac{i}{2}g([x,y])} \tilde{f}(x+y) * \tilde{h}(-y)
\end{aligned}
$$

wegen (12). Damit ist (13) bewiesen.

Der Kürze halber definieren wir nun den Cozyklus $\nu : \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \to \mathbb{T}$ durch

$$\nu(x, y) = e^{-\frac{i}{2}g([x,y])},$$

nach (10) ist ν ein nicht-ausgearteter schiefer Bicharakter.

Weiter sei $w : \mathfrak{v} \to \mathbb{R}$ definiert durch $w(x) := \|u_x'\|_{\mathscr{A}}$. Es gilt $w(x) \geqq 1$ für alle x, und wegen (3), (4) und (6) ist w ein (stetiges) symmetrisches Gewicht auf $\mathfrak{v}$, insbesondere gilt $w(x+y) \leqq w(x)\, w(y)$ für alle $x, y \in \mathfrak{v}$. Damit bilden wir die involutive Banachsche Algebra $\mathscr{E} := L^1(\mathfrak{v}, \nu, w)$, bestehend aus allen meßbaren Funktionen $h : \mathfrak{v} \to \mathbb{C}$ mit

$$\|h\| := \int_{\mathfrak{v}} |h(x)|\, w(x)\, dx < \infty,$$

wobei die Multiplikation durch

$$(h_1 * h_2)(x) = \int_{\mathfrak{v}} \nu(x, y)\, h_1(x+y)\, h_2(-y)\, dy$$

und die Involution durch

$$h^*(x) = \overline{h(-x)}$$

gegeben ist.

$\mathscr{E}$ operiert auf $\mathscr{L}$ von links und von rechts durch die Setzungen

$$(\varphi * h)(x) = \int_{\mathfrak{v}} \nu(x, y)\, h(-y)\, \varphi(x+y)\, dy$$

und

$$(h * \varphi)(x) = \int_{\mathfrak{v}} \nu(x, y)\, h(x+y)\, \varphi(-y)\, dy$$

für $h \in \mathscr{E}$ und $\varphi \in \mathscr{L}$, denn es gilt etwa

$$\begin{aligned}\|\varphi * h\|_{\mathscr{L}} &= \int_{\mathfrak{v}} \|u'_x * (\varphi * h)(x)\| \; dx \\ &= \int_{\mathfrak{v}} dx \, \| \int_{\mathfrak{v}} dy \, v(x,y) \, h(-y) \, u'_x * \varphi(x+y) \| \\ &= \int_{\mathfrak{v}} dx \, \| \int_{\mathfrak{v}} dy \, v(x,y) \, h(-y) \, u'_x * u'^*_{x+y} * u'_{x+y} * \varphi(x+y) \|\end{aligned}$$

wegen (3). Aus (3), (4) und (6) erhält man

$$\begin{aligned}u'_x * u'^*_{x+y} &= u_{\exp x} * u^*_{\exp(x+y)} = u_{\exp x} * u^{\exp(x+y)}_{\exp(-x-y)} \\ &= \{u^{\exp(-x-y)}_{\exp x} * u_{\exp(-x-y)}\}^{\exp(x+y)} \\ &= v(x,y) \, u^{\exp(x+y)}_{\exp x \exp(-x-y)} = v(x,y) \, \{\varepsilon_{\exp(x+y)\exp(-x)\exp(-y)} * u'_{-y}\}^{\exp(x+y)}\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\|\varphi * h\|_{\mathscr{L}} &\leqq \int_{\mathfrak{v}} \int_{\mathfrak{v}} dx \, dy \, |h(-y)| \, w(-y) \, \|u'_{x+y} * \varphi(x+y)\| \\ &= \|h\|_{\mathscr{E}} \, \|\varphi\|_{\mathscr{L}}.\end{aligned}$$

Offenbar gilt für diese Wirkung(en) von $\mathscr{E}$ auf $\mathscr{L}$ weiter

(14) Die direkte Summe $\mathscr{E} \oplus \mathscr{L}$ der Banachschen Räume $\mathscr{E}$ und $\mathscr{L}$ ist eine involutive Banachsche Algebra, wenn man die Involution und die Multiplikation durch

$$(h+\varphi)^* = h^* + \varphi^*$$

und

$$(h+\varphi) * (k+\psi) = h * k + (h * \psi + \varphi * k + \varphi * \psi)$$

erklärt. $\mathscr{L}$ ist ein Ideal in der Algebra $\mathscr{E} \oplus \mathscr{L}$, und $\mathscr{E}$ enthält beschränkte approximierende Einsen für $\mathscr{E} \oplus \mathscr{L}$.

Nach Theorem 3 in [25], vgl. auch [23], ist die Algebra $\mathscr{E}$ einfach und enthält „Operatoren vom Rang 1", nämlich Elemente q mit $q = q^* = q^2 \neq 0$ und $q * \mathscr{E} * q = \mathbb{C} q$. Für ein solches q, welches zudem noch stetig, schnell fallend und positiv gewählt werden kann, ergibt sich:

(15) Die involutive Banachsche Algebra $q * \mathscr{L} * q$ ist $*$-isomorph (allerdings i.a. nicht isometrisch) zur involutiven Banachschen Algebra $p * \mathscr{C} * p$. Ein solcher Isomorphismus $p * \mathscr{C} * p \to q * \mathscr{L} * q$ ist gegeben durch $c \to \varphi_c$, $\varphi_c(x) = q(x) \, c$. $\mathscr{E}$ operiert auch auf der zu $\mathscr{L}$ isomorphen Algebra $p * L^1(\mathfrak{v}, \mathscr{C}) * p$, und $q * (p * L^1(\mathfrak{v}, \mathscr{C}) * p) * q$ ist $*$-isomorph zu $p * \mathscr{C} * p$ mittels $c \to f_c$, $f_c(x) = q(x) \, u'_x * c$, für $c \in p * \mathscr{C} * p$.

Für jedes $c \in p * \mathscr{C} * p$ liegt φ_c in $\mathscr{L}$, denn

$$\|\varphi_c\|_{\mathscr{L}} = \int_{\mathfrak{v}} |q(x)|\ \|u'_x * c\|\ dx \leqq \|c\|_{\mathscr{C}} \int_{\mathfrak{v}} |q(x)|\ \|u'_x\|\ dx = \|c\|_{\mathscr{C}}\ \|q\|.$$

Andererseits ist $\|c\| = \|u'^*_x * u'_x * c\| \leqq \|u'^*_x\|\ \|u'_x * c\| = w(x)\ \|u'_x * c\|$, also

$$\|\varphi_c\| = \int_{\mathfrak{v}} |q(x)|\ \|u'_x * c\|\ dx \geqq \|c\| \int_{\mathfrak{v}} |q(x)|\ w(x)^{-1}\ dx.$$

Weiter ist klar, daß $c \to \varphi_c$ ein $*$-Morphismus von $p * \mathscr{C} * p$ mit Werten in $q * \mathscr{L} * q$ ist. Es ist noch zu zeigen, daß jedes φ in $q * \mathscr{L} * q$ von der Form $\varphi = \varphi_c$ mit einem passenden $c \in p * \mathscr{C} * p$ ist. Dazu stellen wir zunächst fest, daß die Punktmaße δ_a, $a \in \mathfrak{v}$, durch Faltung auf $\mathscr{E}$ wirken. Für diese Faltung gilt:

$$(\delta_a * f)(x) = v(x, a) f(x - a),$$
$$(f * \delta_a)(x) = v(x, -a) f(x - a).$$

Auf Grund der Voraussetzung an q ist $q * \delta_a * q$ proportional zu q, sagen wir $q * \delta_a * q = \lambda(a)\, q$. Sei nun $\varphi \in q * \mathscr{L} * q$, etwa $\varphi = q * \psi * q$ mit $\psi \in \mathscr{L}$, also

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{\mathfrak{v}}\int_{\mathfrak{v}} dy\, dz\, v(x, z)\, v(x + z, y)\, q(x + z + y)\, q(-z)\, \psi(-y) \\ &= \int_{\mathfrak{v}} dy\, Q(x, y)\, \psi(y) \end{aligned}$$

mit

$$Q(x, y) = \int_{\mathfrak{v}} dz\, v(x, z)\, v(x + z, -y)\, q(x + z - y)\, q(-z).$$

Man verifiziert ohne Mühe, daß $Q(x, y) = (q * \delta_y * q)(x)$, also $Q(x, y) = \lambda(y)\, q(x)$. Zur Auswertung von λ multiplizieren wir mit $\overline{q(x)} = q^*(-x) = q(-x)$ und integrieren über x. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda(y)\ \|q\|_2^2 &= \int_{\mathfrak{v}} dx\, q^*(-x)\, (q * \delta_y * q)(x) \\ &= (q^* * q * \delta_y * q)(0) = (\delta_y * q * q^* * q)(0) = (q * q^* * q)(-y) = q(-y) \end{aligned}$$

und damit

$$Q(x, y) = q(x)\, q(-y)\ \|q\|_2^{-2} = q(x)\, \overline{q(y)}\ \|q\|_2^{-2}$$

also

$$\varphi(x) = q(x)\ \|q\|_2^{-2} \int_{\mathfrak{v}} dy\, \overline{q(y)}\, \psi(y)$$

oder

$$\varphi = \varphi_c \quad \text{mit} \quad c = \|q\|_2^{-2} \int_{\mathfrak{v}} dy\, \overline{q(y)}\, \psi(y).$$

Mittels der Identifikation von $\mathscr{D}=L^1(G^{(\sigma)})/\{k(S\tau)*L^1(G^{(\sigma)})\}^-$ mit $L^1(\mathfrak{v},\mathscr{C})$ betrachten wir nun K als einfachen $L^1(\mathfrak{v},\mathscr{C})$-Modul. Dann ist pK ein einfacher $p*L^1(\mathfrak{v},\mathscr{C})*p$-Modul. Weil $k(S\tau)$ den Modul K annulliert und die Hülle des Ideals $\mathscr{A}*p*\mathscr{A}$ leer ist, $\mathscr{A}*p*\mathscr{A}$ folglich dicht in $\mathscr{A}$ liegt, vgl. [15], ist $pK\neq 0$. Die Wirkung von $p*L^1(\mathfrak{v},\mathscr{C})*p$ läßt sich zu einer Wirkung von $\mathscr{E}\oplus p*L^1(\mathfrak{v},\mathscr{C})*p$ erweitern. Da $\mathscr{E}$ approximierende Einsen enthält, insbesondere also $\mathscr{E}*\left(p*L^1(\mathfrak{v},\mathscr{C})*p\right)$ dicht in $p*L^1(\mathfrak{v},\mathscr{C})*p$ liegt, und $\mathscr{E}*q*\mathscr{E}$ wegen der Einfachheit von $\mathscr{E}$ dicht in $\mathscr{E}$ liegt, ist $q(pK)\neq 0$. $q(pK)$ ist dann ein einfacher $q*\left(p*L^1(\mathfrak{v},\mathscr{C})*p\right)*q$-Modul und läßt sich wegen (15) als einfacher $p*\mathscr{C}*p$-Modul auffassen, wobei $c\in p*\mathscr{C}*p$ auf $\xi\in q(pK)$ durch $c\xi:=f_c\xi$ wirkt. Nun ist $L^1(G^{(f)}/D)$ symmetrisch, also ist auch $\mathscr{C}$ als Quotient dieser L^1-Algebra eine symmetrische Banachsche Algebra. Und $p*\mathscr{C}*p$ ist eine abgeschlossene involutive Unteralgebra von $\mathscr{C}$. Also kann man den $p*\mathscr{C}*p$-Modul $q(pK)$ unitarisieren, und nach [28], (4. 7. 20), läßt sich, erneut wegen der Symmetrie von $\mathscr{C}$, eine solche Unitarisierung zu einer involutiven Darstellung von $\mathscr{C}$ erweitern. Kurz, man findet eine (topologisch-irreduzible) involutive Darstellung π von $\mathscr{C}$ in einem Hilbertschen Raum $\mathfrak{K}$ und eine beschränkte Einbettung $I\colon q(pK)\to\pi(p)\,\mathfrak{K}$ mit

$$(16)\qquad I(f_c\xi)=\pi(c)\,I\xi \quad \text{für alle}\quad c\in p*\mathscr{C}*p \quad\text{und}\quad \xi\in q(pK).$$

Die Darstellung π wird zu einer involutiven Darstellung ρ von $L^1(\mathfrak{v},\mathscr{C})$ in dem Hilbertschen Raum $L^2(\mathfrak{v},\mathfrak{K})$ induziert, welche gegeben ist durch:

$$(17)\quad [\rho(f)\,\eta]\,(y)=\int_{\mathfrak{v}} dx\,\pi\left(\varepsilon_{\exp(-y)\exp(x)\exp(y-x)}*f(x)^{\exp(y-x)}\right)\left(\eta(y-x)\right)$$

für $f\in L^1(\mathfrak{v},\mathscr{C})$, $\eta\in L^2(\mathfrak{v},\mathfrak{K})$ und $y\in\mathfrak{v}$.

Mit Hilfe des Verkettungsoperators I wird nun eine Einbettung $I'\colon q(pK)\to L^2(\mathfrak{v},\mathfrak{K})$ definiert durch

$$(I'\xi)\,(y)=q(y)\,\pi(u'_y)\,I\xi.$$

(18) Die Werte von I' liegen in $\rho(p)\,L^2(\mathfrak{v},\mathfrak{K})$. Für alle $f\in q*\left(p*L^1(\mathfrak{v},\mathscr{C})*p\right)*q$ und alle $\xi\in qpK$ ist $I'(f\xi)=\rho(f)\,I'\xi$.

Sei $\xi\in qpK$ und $\eta=I'\xi$. Dann ist

$$\begin{aligned}\left(\rho(p)\,\eta\right)(y)&=\pi(p^{\exp y})\left(\eta(y)\right)=q(y)\,\pi(p^{\exp y})\,\pi(u'_y)\,I\xi\\&=q(y)\,\pi(p^{\exp y}*u'_y)\,I\xi=q(y)\,\pi(u'_y)\,I\xi=\eta(y).\end{aligned}$$

Die Funktion f ist von der Form $f=f_c$ mit $c\in p*\mathscr{C}*p$. Es ist

$$I'(f\xi)\,(y)=q(y)\,\pi(u'_y)\,I(f\xi)=q(y)\,\pi(u'_y)\,\pi(c)\,I\xi$$

nach (16) und

$$\left(\rho(f)\,\eta\right)(y)=\int_{\mathfrak{v}} dx\,\pi\left(\varepsilon_b*f(x)^{\exp(y-x)}\right)\left(\eta(y-x)\right)$$

mit $b=\exp(-y)\exp(x)\exp(y-x)$, also

$$\left(\rho(f)\,\eta\right)(y)=\int_{\mathfrak{v}} dx\,q(x)\,q(y-x)\,\pi\left(\varepsilon_b*(u'_x*c)^{\exp(y-x)}*u'_{y-x}\right)I\xi.$$

Nach (3), (12), (4) und (6) ist

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_b * u_x'^{\exp(y-x)} * c^{\exp(y-x)} * u'_{y-x} \\
&= \varepsilon_b * u_x'^{\exp(y-x)} * u'_{y-x} * u'^*_{y-x} * c^{\exp(y-x)} * u'_{y-x} \\
&= \varepsilon_b * u_x'^{\exp(y-x)} * u'_{y-x} * c = \bar{v}(x, y-x)\, \varepsilon_b * u_{\exp x \exp(y-x)} * c \\
&= \bar{v}(x, y)\, u_{\exp y} * c = \bar{v}(x, y)\, u'_y * c
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
(\rho(f)\,\eta)(y) &= \int_{\mathfrak{v}} dx\, q(x)\, q(y-x)\, \bar{v}(x, y)\, \pi(u'_y * c)\, I\xi \\
&= \int_{\mathfrak{v}} dx\, q(-x)\, q(y+x)\, v(x, y)\, \pi(u'_y * c)\, I\xi \\
&= (q * q)(y)\, \pi(u'_y * c)\, I\xi = q(y)\, \pi(u'_y)\, \pi(c)\, I\xi,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Zur Konstruktion der gewünschten Unitarisierung $J: K \to L^2(\mathfrak{v}, \mathfrak{K})$ wähle man ein $\xi \in q(pK)$, $\xi \neq 0$, und definiere $J(f\xi) := \rho(f)\, I'\xi$. Um die Wohldefiniertheit von J einzusehen, hat man sich zu überzeugen, daß aus $f\xi = 0$ stets $\rho(f)\, I'\xi = 0$ folgt. Da $I'\xi$ in $\rho(p)\, L^2(\mathfrak{v}, \mathfrak{K})$ liegt und ρ auf $\mathscr{A} * p * \mathscr{A}$ nicht ausgeartet ist, genügt es zu zeigen, daß $\rho(\mathscr{A} * p * \mathscr{A} * f * p)\, I'\xi = 0$ oder daß $\rho(p * \mathscr{A} * f * p)\, I'\xi = 0$ ist. Nun folgt aus $f\xi = 0$ und $\xi \in pK$ natürlich, daß $(p * \mathscr{A} * f * p)\, \xi = 0$ ist. Man kann sich also auf die Untersuchung von f's in $p * L^1(\mathfrak{v}, \mathscr{C}) * p$ beschränken. Nach einer entsprechenden Argumentation kann man sich auf die Untersuchung von f's in $q * (p * L^1(\mathfrak{v}, \mathscr{C}) * p) * q$ zurückziehen. In diesem Falle folgt wegen (18) aus $f\xi = 0$ sofort $\rho(f)\, I'\xi = 0$.

Nach Konstruktion ist $J: K \to L^2(\mathfrak{v}, \mathfrak{K})$ linear über $L^1(\mathfrak{v}, \mathscr{C})$. J ist nicht-trivial, da die Einschränkung von J auf $q(pK)$ mit I' übereinstimmt. Damit ist die gewünschte Unitarisierung angegeben und Satz 2 bewiesen.

Schlußbemerkung

Es sei nun G eine beliebige einfachzusammenhängende Liesche Gruppe mit Liescher Algebra $\mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{r}$ das auflösbare Radikal von $\mathfrak{g}$, so ist $\mathfrak{n} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ ein nilpotentes Ideal in $\mathfrak{g}$. Weiter sei P die Zusammenhangskomponente des Zariski-Abschlusses von $\mathrm{Ad}(G)$ in $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, T eine maximale kompakte Untergruppe von P und G' die Kommutatorgruppe von G. Für ein $h \in \mathfrak{g}^*$ sei $G^{(h)} = \mathrm{Ad}^{-1}(T\,\mathrm{Ad}(G')\, P_h)$. Ferner sei $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_g$ für $g \in \mathfrak{n}^*$ das größte Ideal, welches in $\operatorname{Kern} g$ enthalten ist. Vermutlich gilt:

Die Banachsche Algebra $L^1(G)$ ist dann und nur dann symmetrisch, wenn für jedes $h \in \mathfrak{g}^*$ die Gruppe $G^{(h)}/\exp(\mathfrak{d}_g)$, wobei $g = h|_{\mathfrak{n}}$, ein polynomial wachsendes Haarsches Maß hat.

Im auflösbaren Fall ist diese Vermutung richtig. In diesem Artikel haben wir bewiesen, daß dann die angegebene Bedingung hinreichend ist. In einer folgenden Arbeit werde ich, nicht zuletzt mit Hilfe der hier entwickelten Methoden, die primitiven Ideale in der L^1-Algebra einer auflösbaren Lieschen Gruppe untersuchen und eine Parametrisierung der Menge der primitiven Ideale angeben. In diesem Rahmen werde ich zeigen, daß die angegebene Bedingung für Symmetrie auch notwendig ist.

Literatur

[1] *L. Auslander, B. Kostant*, Polarization and unitary representations of solvable groups, Invent. math. **14** (1971), 255—354.

[2] *J. Boidol* et al., Räume primitiver Ideale von Gruppenalgebren, Math. Ann. **236** (1978), 1—13.

[3] *F. F. Bonsall, I. Duncan*, Complete normed algebras, Ergebnisse der Mathematik **80**, Berlin-Heidelberg-New York 1973.

[4] *I. Brown*, Dual topology of a nilpotent group, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **6** (1973), 407—411.

[5] *J. Dixmier*, Les C^*-algèbres et leurs représentations, Paris 1969.

[6] *M. Duflo*, Sur les extensions des représentations irréductible des groupes de Lie nilpotents, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **5** (1972), 71—120.

[7] *J. B. Fountain, R. W. Ramsay, J. H. Williamson*, Functions of measures on compact groups, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A (1976), 235—251.

[8] *A. Hulanicki*, On symmetry of group algebras of discrete nilpotent groups, Studia math. **35** (1970), 207—219.

[9] *A. Hulanicki*, Invariant subsets of non-synthesis, Leptin algebras and non-symmetry, Coll. math. **43** (1980), 127—136.

[10] *J. Jenkins*, Nonsymmetric group algebras, Studia Math. **45** (1973), 295—307.

[11] *J. Jenkins*, Growth of connected locally compact groups, J. Funct. Anal. **12** (1973), 113—127.

[12] *M. Leinert*, Beitrag zur Theorie der verallgemeinerten L^1-Algebren, Arch. Math. **21** (1970), 594—600.

[13] *H. Leptin*, Verallgemeinerte L^1-Algebren und projektive Darstellungen lokalkompakter Gruppen, Invent. math. 3 (1967), 257—281, **4** (1967), 68—86.

[14] *H. Leptin*, On symmetry of some Banach algebras, Pac. J. Math. **53** (1974), 203—206.

[15] *H. Leptin*, Ideal theory in group algebras of locally compact groups, Invent. math. **31** (1976), 259—278.

[16] *H. Leptin*, Lokal kompakte Gruppen mit symmetrischen Algebren, Symp. Math. **22** (1977), 267—281.

[17] *H. Leptin, D. Poguntke*, Symmetry and nonsymmetry for locally compact groups, J. Funct. Anal. **33** (1979), 119—134.

[18] *J. Ludwig*, A class of symmetric and a class of Wiener group algebras, J. Funct. Anal. **31** (1979), 187—194.

[19] *J. Ludwig*, Polynomial growth and ideals in group algebras, manuscripta math. **30** (1980), 215—221.

[20] *M. A. Naimark*, Normed algebras, third edition, Groningen 1972.

[21] *D. Poguntke*, Nilpotente Liesche Gruppen haben symmetrische Gruppenalgebren, Math. Ann. **227** (1977), 51—59.

[22] *D. Poguntke*, Einfache Moduln über gewissen Banachschen Algebren: ein Imprimitivitätssatz, Math. Ann. **259** (1982), 245—258.

[23] *D. Poguntke*, Operators of Finite Rank in Unitary Representations of Exponential Lie Groups, Math. Ann. **259** (1982), 371—383.

[24] *D. Poguntke*, Simple quotients of group C^*-algebras for two step nilpotent groups and connected Lie groups, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **16** (1983), 151—172.

[25] *D. Poguntke*, Algebraically Irreducible Representations of L^1-Algebras of Exponential Lie Groups, Duke Math. J. **50** (1983), 1077—1106.

[26] *D. Poguntke*, Über das Synthese-Problem für nilpotente Liesche Gruppen, Math. Ann. **269** (1984), 431—467.

[27] *L. Pukanszky*, Unitary representations of solvable Lie groups, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **4** (1971), 457—608.

[28] *C. E. Rickart*, General theory of Banach algebras, New York 1960.

Fakultät für Mathematik der Universität, Postfach 8640, D-4800 Bielefeld

Eingegangen 1. August 1984