Math. Z. 115, 359–365 (1970)

Eine Charakterisierung der Homotopiekategorie der CW-Komplexe

CLAUS MICHAEL RINGEL

1. Einleitung

Der Funktor $T: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ heißt adjungiert zum Funktor $S: \mathscr{L} \to \mathscr{K}$, wenn zwei natürliche Transformationen $\beta: TS \to Id_{\mathscr{K}}$ und $\varphi: ST \to Id_{\mathscr{L}}$ existieren [1], die die Gleichungen

$$(\varphi S)(S\beta) = 1_S \quad \text{und} \quad (T\varphi)(\beta T) = 1_T$$

erfüllen.

β und φ sind Abbildungsklassen. Wir können daher die Quotientenkategorien $\mathscr{K}/\beta$ und $\mathscr{L}/\varphi$ bilden und man sieht sofort, daß die Funktoren S und T Äquivalenzen zwischen $\mathscr{K}/\beta$ und $\mathscr{L}/\varphi$ induzieren. Wir nennen diese bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte Kategorie die Quotientenkategorie zu den adjungierten Funktoren S und T.[2]

Der Singularisierungsfunktor Sin von der Kategorie $\mathscr{T}$ der topologischen Räume in die Kategorie $\mathscr{S}$ der simplizialen Mengen ist adjungiert zum Realisierungsfunktor $R: \mathscr{S} \to \mathscr{T}$ (dabei seien wieder β und φ die zugehörigen Transformationen). Wir zeigen nun, daß die Quotientenkategorie zu diesem Paar adjungierter Funktoren gerade die Homotopiekategorie der CW-Komplexe ist. Wir erhalten damit eine neue Charakterisierung dieser für die algebraische Topologie so wichtigen Kategorie:

Satz. *Die Kategorien $\mathscr{T}/\beta$ und $\mathscr{S}/\varphi$ sind äquivalent zur Homotopiekategorie $\mathscr{C}_h$ der CW-Komplexe.*

Eine ähnliche Charakterisierung wurde in [2] und [3] gegeben, allerdings diente dort als Ausgangspunkt stets eine Kategorie topologischer Räume mit *Homotopieklassen* stetiger Abbildungen als Morphismen. Wir können hier den Homotopiebegriff eliminieren: zwei Abbildungen zwischen CW-Komplexen sind genau dann homotop, wenn sie durch den Funktor $\mathscr{T} \to \mathscr{T}/\beta$ identifiziert werden.

Für viele Anregungen bin ich Friedrich Wilhelm Bauer zu Dank verpflichtet.

---

[1] Wir schreiben Funktoren (wie alle Abbildungen) in der natürlichen Reihenfolge: TS bedeutet daher: *erst* der Funktor T, *dann* der Funktor S angewandt. – $Id_{\mathscr{K}}$ sei der identische Funktor von $\mathscr{K}$ in sich.

[2] Im Anhang skizzieren wir die (wohl allgemein bekannte) Konstruktion der Quotientenkategorie zu einem Paar adjungierter Funktoren, da in der Literatur bisher kein Beweis zu finden ist. Insbesondere zeigen wir, daß die Quotientenkategorie zum gleichen Universum wie $\mathscr{K}$ gehört.

2. Die Kategorie $\mathscr{R}$ der realisierten simplizialen Mengen

Wir betrachten also die Funktoren

$$Sin\colon \mathscr{T} \to \mathscr{S} \quad \text{und} \quad R\colon \mathscr{S} \to \mathscr{T},$$

mit den Transformationen

$$\beta\colon Sin\, R \to Id_{\mathscr{T}} \quad \text{und} \quad \varphi\colon Id_{\mathscr{S}} \to R\, Sin.$$

$\mathscr{R}$ sei die volle Unterkategorie von $\mathscr{T}$ derjenigen Räume, die homöomorph zu einem X^R (X simpliziale Menge) sind. Wir setzen

$$\beta' = \{\beta_Y \mid Y \text{ Objekt aus } \mathscr{R}\}.$$

Das folgende Lemma ist von entscheidender Bedeutung. Dabei sei I das Einheitsintervall.

Lemma. *Y sei Objekt aus $\mathscr{R}$. In $\mathscr{R}/\beta'$ ist die Projektion*

$$Y \times I \to Y$$

ein Isomorphismus.

Beweis. In der reellen Ebene definieren wir die Unterräume

$$J = \{(x, y) \mid x = 0, |y| \leqq 1\},$$
$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x, x + |y| \leqq 1\},$$
$$I = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1, y = 0\},$$

mit den Inklusionen

$$u\colon J \to D \quad \text{und} \quad v\colon I \to D,$$

und den Retraktionen

$$p\colon D \to J, \quad \text{definiert durch} \quad (x, y)^p = (0, y),$$
$$r\colon D \to I, \quad \text{definiert durch} \quad (x, y)^r = (x, 0).$$

Es gelten die Gleichungen $u\,p = 1$, $v\,r = 1$, und die Abbildung $v\,p\,u\,r$ ist konstant.

Wir können p als singuläres 2-Simplex auffassen. Wir haben daher eine Inklusion

$$s\colon D \to J^{Sin\,R},$$

unter dieser Inklusion ist D Unterkomplex von $J^{Sin\,R}$ und es gilt $s\,\beta_J = p$. Wir zeigen:

(1) Es gibt eine Abbildung $t\colon J^{Sin\,R} \to D$ mit $s\,t = 1$ und $t\,p = \beta_J$.

Da D unter s Umgebungsretrakt von $J^{Sin\,R}$ ist und $J^{Sin\,R}$ normal ist, gibt es eine Abbildung $t'\colon J^{Sin\,R} \to I$ mit $s\,t' = r$. Wir definieren t durch

$$x^t = (\min(x^{t'}, 1 - |x^{\beta_J}|), x^{\beta_J})$$

für $x \in J^{Sin\,R}$ und man rechnet leicht nach, daß t die gewünschten Eigenschaften hat.

(2) Die Abbildung $1\times u\colon\ Y\times J\to Y\times D$ ist in $\mathscr{R}/\beta'$ zur Abbildung $1\times p\colon Y\times D\to Y\times J$ invers[3].

Y liegt in $\mathscr{R}$, also können wir annehmen, daß $Y=X^R$ für eine simpliziale Menge X gilt. Die Abbildung

$$e=(\varphi_X)^R\colon\ X^R\to X^{R\,Sin\,R}$$

erfüllt die Gleichung $e\,\beta_Y=1_Y$.

Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \underset{k}{\times} D \arrow[r, "e \underset{k}{\times} s"] \arrow[d, "\gamma_1 = 1"] & Y^{Sin\,R} \underset{k}{\times} J^{Sin\,R} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\gamma_2"] & (Y\times J)^{Sin\,R} \arrow[r, "\beta_{Y\times J}"] & Y \times J \arrow[d, "1"] \\
Y \times D \arrow[r, "e\times s"] & Y^{Sin\,R}\times J^{Sin\,R} \arrow[rr, "\beta_Y \times \beta_J"] \arrow[dr, "\beta_Y \times t"'] & & Y\times J \\
& & Y\times D \arrow[ur, "1\times p"'] &
\end{tikzcd}$$

dabei sei $A\underset{k}{\times}B$ das kartesische Produkt von A und B, versehen mit der Kelley-Topologie, γ_i seien die kanonischen Abbildungen. Da D kompakt ist, ist $\gamma_1=1$. δ ist der durch [2], III.3.1 gegebene Isomorphismus, der das rechte Quadrat kommutativ macht. Nach Konstruktion von t ist auch das untere Dreieck kommutativ.

Es ist

$$(e\underset{k}{\times}s)\,\gamma_2(\beta_Y\times t)=(e\times s)(\beta_Y\times t)=e\,\beta_Y\times s\,t=1,$$

also ist $\gamma_2(\beta_Y\times t)$ eine Retraktion.

Da $Y\times J$ zu $\mathscr{R}$ gehört, liegt $\beta_{Y\times J}$ in β', also ist $\beta_{Y\times J}$ in $\mathscr{R}/\beta'$ ein Isomorphismus. In $\mathscr{R}$, und damit auch in $\mathscr{R}/\beta'$, gilt die Gleichung

$$\gamma_2(\beta_Y\times t)(1\times p)=\delta\,\beta_{Y\times J}. \tag{$*$}$$

In $\mathscr{R}/\beta'$ ist daher $\gamma_2(\beta_Y\times t)$ auch eine Coretraktion.

Als Retraktion und Coretraktion ist $\gamma_2(\beta_Y\times t)$ ein Isomorphismus, und wegen der Gleichung ($*$) ist auch $1\times p$ ein Isomorphismus.

Nun gilt schon in $\mathscr{R}$ die Gleichung

$$(1\times u)(1\times p)=1,$$

also sind die beiden Abbildungen $1\times u$ und $1\times p$ in $\mathscr{R}/\beta'$ zueinander invers. Damit ist (2) bewiesen.

[3] Ist $\mathscr{X}/\mathfrak{X}$ Quotientenkategorie von $\mathscr{X}$, so werden wir die Bilder von Morphismen aus $\mathscr{X}$ unter dem Funktor $\mathscr{X}\to\mathscr{X}/\mathfrak{X}$ wie in $\mathscr{X}$ bezeichnen.

Schalten wir die Abbildungen

$$Y \times I \xrightarrow{1 \times r} Y \times D \xrightarrow{1 \times p} Y \times J \xrightarrow{1 \times u} Y \times D \xrightarrow{1 \times r} Y \times I$$

hintereinander, so können wir diese Abbildung durch die Projektion $Y \times I \to Y$ faktorisieren, denn $v p u r$ ist konstant. Nach (2) gilt aber in $\mathscr{R}/\beta'$

$$(1 \times v)(1 \times p)(1 \times u)(1 \times r) = (1 \times v) \cdot 1 \cdot (1 \times r) = 1_{Y \times I},$$

und daher ist die Projektion $Y \times I \to Y$ in $\mathscr{R}/\beta'$ eine Coretraktion. Da $Y \times I \to Y$ in $\mathscr{R}$, und damit auch in $\mathscr{R}/\beta'$ eine Retraktion ist, ist diese Abbildung in $\mathscr{R}/\beta'$ ein Isomorphismus.

Korollar. *Zwei homotope Abbildungen $f_0, f_1: Y \to Z$ aus $\mathscr{R}$ werden unter dem Funktor $\mathscr{R} \to \mathscr{R}/\beta'$ identifiziert.*

Beweis. Die Projektion $Y \times I \to Y$ besitzt in $\mathscr{R}$ die Abbildungen $i_0, i_1: Y \to Y \times I$, definiert durch $i_j(y) = (y, j)$ für $j = 0, 1$, als Linksinverse. In $\mathscr{R}/\beta'$ gilt daher $i_0 = i_1$.

Sind nun die Abbildungen f_0 und f_1 homotop, so gibt es eine Abbildung $F: Y \times I \to Z$ mit $i_j F = f_j$ für $j = 0, 1$. In $\mathscr{R}/\beta'$ gilt also

$$f_0 = i_0 F = i_1 F = f_1.$$

Wir bezeichnen mit $\mathscr{R}_h$ die Homotopiekategorie zu $\mathscr{R}$ (Morphismen sind also Homotopieklassen von Abbildungen aus $\mathscr{R}$).

Korollar 2. *Es ist $\mathscr{R}_h = \mathscr{R}/\beta'$.*

Beweis. Wir haben gesehen, daß sich der kanonische Funktor $\mathscr{R} \to \mathscr{R}/\beta'$ durch $\mathscr{R}_h$ faktorisieren läßt. Andererseits läßt sich aber auch der Funktor $\mathscr{R} \to \mathscr{R}_h$ durch $\mathscr{R}/\beta'$ faktorisieren, denn β' enthält nur Homotopieäquivalenzen (für wegzusammenhängende Räume steht dies in [4], für beliebige Räume aus $\mathscr{R}$ folgt dies aus der Tatsache, daß bei CW-Komplexen die Wegzusammenhangskomponenten mit den Zusammenhangskomponenten übereinstimmen und β_Y daher isomorph zur Summe der β_{Y_i} ist, wobei Y_i die Zusammenhangskomponenten von Y durchläuft).

3. Der Charakterisierungssatz

Mit $\mathscr{C}$ bezeichnen wir die volle Unterkategorie von $\mathscr{T}$, deren Objekte vom Homotopietyp eines CW-Komplexes sind, $\mathscr{C}_h$ sei die zugehörige Homotopiekategorie.

Satz. *Die Kategorien $\mathscr{C}_h$, $\mathscr{T}/\beta$ und $\mathscr{S}/\varphi$ sind äquivalent*[4]. *Dabei induziert die Inklusion $\mathscr{C} \to \mathscr{T}$ eine Äquivalenz.*

Beweis. (1) $\mathscr{T}/\beta$ ist äquivalent zu $\mathscr{R}/\beta'$.

[4] Die Liste der äquivalenten Kategorien ließe sich natürlich vergrößern: äquivalent zu diesen Kategorien ist die Homotopiekategorie der Kankomplexe (s. [2] oder [4]) und die Quotientenkategorie von $\mathscr{S}$ nach der Klasse aller „anodynen" Erweiterungen ([5]).

Der Funktor $R: \mathscr{S} \to \mathscr{T}$ bildet $\mathscr{S}$ in $\mathscr{R}$ ab. Schränken wir den Funktor $Sin: \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ auf $\mathscr{R}$ ein, so erhalten wir ein Paar adjungierter Funktoren, das wir wieder mit R und Sin bezeichnen:

$$R: \mathscr{S} \to \mathscr{T} \quad \text{und} \quad Sin: \mathscr{T} \to \mathscr{S}.$$

Die zugehörigen natürlichen Transformationen sind gerade β' und φ. Also sind die Kategorien $\mathscr{R}/\beta'$ und $\mathscr{S}/\varphi$ äquivalent (siehe Anhang).

Entsprechend sind die Kategorien $\mathscr{T}/\beta$ und $\mathscr{S}/\varphi$ äquivalent.

(2) Im Korollar 2 haben wir gesehen, daß $\mathscr{R}/\beta' = \mathscr{R}_h$ gilt.

(3) Die Einbettung von $\mathscr{R}_h$ in $\mathscr{C}_h$ ist eine Äquivalenz, denn nach Definition ist $\mathscr{R}_h$ eine volle Unterkategorie von $\mathscr{C}_h$, andererseits ist jedes Objekt aus $\mathscr{C}$ homotopieäquivalent zu einem Objekt aus $\mathscr{R}$.

Damit ist der Satz bewiesen.

Anhang

In [1] wurde zu einer beliebigen Klasse $\mathscr{X}$ von Morphismen einer Kategorie $\mathscr{K}$ der Begriff der Quotientenkategorie eingeführt: Ist $\mathscr{K}/\mathscr{X}$ eine Kategorie mit den gleichen Objekten wie $\mathscr{K}$ und $P: \mathscr{K} \to \mathscr{K}/\mathscr{X}$ ein Funktor, der die Objekte erhält, so heißt $(\mathscr{K}/\mathscr{X}, P)$ oder einfach $\mathscr{K}/\mathscr{X}$ Quotientenkategorie zu $\mathscr{X}$, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Ist $x \in \mathscr{X}$, so ist x^P ein Isomorphismus,

(b) Ist $T: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ ein Funktor, für den x^T (für alle $x \in \mathscr{X}$) ein Isomorphismus ist, so gibt es genau einen Funktor T' mit $T = PT'$.

Quotientenkategorien zu $\mathscr{X}$ sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. In [1] wurde ein allgemeines Verfahren angegeben, wie man zu einer Klasse $\mathscr{X}$ eine Quotientenkategorie $\mathscr{K}/\mathscr{X}$ konstruieren kann, die allerdings im allgemeinen nicht zum gleichen Universum wie $\mathscr{K}$ gehört. Unter $\mathscr{K}/\mathscr{X}$ verstehen wir im folgenden immer die so konstruierte Quotientenkategorie.

Wir setzen voraus, daß der Funktor $T: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ zu einem Funktor $S: \mathscr{L} \to \mathscr{K}$ adjungiert ist, und $\beta: TS \to Id_{\mathscr{K}}$, $\varphi: Id_{\mathscr{L}} \to ST$ die zugehörigen natürlichen Transformationen sind. β ist eine Klasse von Morphismen aus $\mathscr{K}$, also können wir $\mathscr{K}/\beta$ bilden.

Lemma. *Für beliebige Objekte A und B aus $\mathscr{K}$ läßt sich jedes g aus $(\mathscr{K}/\beta)(A, B)$ in der Form $\beta_A^{-1} h$ mit h aus $\mathscr{K}(A^{TS}, B)$ darstellen.*

Beweis. g hat die Gestalt

$$g = \beta_{X_1}^{-1} \cdot f_1 \cdot \cdots \cdot \beta_{X_n}^{-1} \cdot f_n,$$

wobei $f_i \in \mathscr{K}$, $\beta_{X_i} \in \beta$ (s. [1]).

In $\mathscr{X}$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, "\beta_A"'] & \bullet \arrow[l, "\beta^{TS}_{X_1}"'] \arrow[r, "f_1^{TS}"] \arrow[d, dashed] & \bullet \arrow[d, dashed] & \cdots & \bullet \arrow[d, dashed] & \bullet \arrow[l, "\beta^{TS}_{X_n}"'] \arrow[r, "f_n^{TS}"] \arrow[d, dashed] & \bullet \arrow[d, dashed, "\beta_B"] \\
\bullet & \bullet \arrow[l, "\beta_{X_1}"] \arrow[r, "f_1"'] & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \arrow[l, "\beta_{X_n}"] \arrow[r, "f_n"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

kommutativ, dabei seien die senkrechten Abbildungen aus β. Wir haben in $\mathscr{X}$ die Gleichung

$$(\varphi_{(X^T)})^S \cdot \beta_{(X^{TS})} = 1_{(X^{TS})},$$

also ist in $\mathscr{X}/\beta$ mit der Abbildung $\beta_{(X^{TS})}$ auch $(\varphi_{(X^T)})^S$ ein Isomorphismus. Da in $\mathscr{X}$ außerdem die Gleichung

$$(\varphi_{(X^T)})^S \cdot \beta_X^{TS} = (\varphi_{(X^T)} \cdot \beta_X^T)^S = 1^S_{(X^T)} = 1_{(X^{TS})}$$

gilt, sind in $\mathscr{X}/\beta$ die Abbildungen $(\varphi_{(X^T)})^S$ und β_X^{TS} zueinander inverse Isomorphismen.

Setzen wir also

$$h = (\varphi_{(X_1^T)})^S \cdot f_1^{TS} \ldots (\varphi_{(X_n^T)})^S \cdot f_n^{TS} \cdot \beta_B,$$

so liegt h in $\mathscr{X}(A^{TS}, B)$ und in $\mathscr{X}/\beta$ gilt die Gleichung

$$g = \beta_A^{-1} h.$$

Korollar. *$\mathscr{X}/\beta$ gehört zum gleichen Universum wie $\mathscr{X}$.*

Beweis. Die Abbildung

$$\mathscr{X}(A^{TS}, B) \to (\mathscr{X}'/\beta')(A, B), \text{ definiert durch } f \mapsto \beta_A^{-1} f$$

ist surjektiv.

Lemma. *Die Funktoren S und T induzieren Funktoren*

$$S'\colon \mathscr{L}/\varphi \to \mathscr{X}/\beta \quad \text{und} \quad T'\colon \mathscr{X}/\beta \to \mathscr{L}/\varphi,$$

die zueinander inverse Äquivalenzen sind.

Beweis. $P\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}/\beta$ und $Q\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}/\varphi$ seien die kanonischen Funktoren. Unter dem Funktor TQ geht β_X wegen

$$\varphi_{(X^T)} \cdot \beta_X^T = 1$$

in einen Isomorphismus über, also läßt sich TQ eindeutig durch P faktorisieren: es gibt $T'\colon \mathscr{X}/\beta \to \mathscr{L}/\varphi$ mit $TQ = PT'$. Entsprechend gibt es $S'\colon \mathscr{L}/\varphi \to \mathscr{X}/\beta$ mit $SP = QS'$. In $\mathscr{X}/\beta$ induziert β eine natürliche Transformation

$$\beta\colon T'S' \to Id_{\mathscr{X}/\beta},$$

und da β in $\mathscr{X}/\beta$ nur Isomorphismen enthält, ist dies eine natürliche Äquivalenz. Entsprechend induziert φ eine natürliche Äquivalenz

$$\varphi\colon Id_{\mathscr{L}/\varphi} \to S'T'.$$

Als Korollar erhalten wir den folgenden Satz von Gabriel und Zisman [2]:

Korollar. *Ist* $T: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ *adjungiert zu* S *mit den Transformationen* β *und* φ, *so ist äquivalent:*

(i) φ *ist eine natürliche Äquivalenz,*

(ii) T *induziert eine Äquivalenz* $\mathscr{K}/\beta \to \mathscr{L}$.

Wir nennen die zu $\mathscr{K}/\beta$ (und damit auch zu $\mathscr{L}/\varphi$) äquivalenten Kategorien Quotientenkategorien zu den adjungierten Funktoren S und T.

Literatur

1. Bauer, F.W., Dugundji, J.: Categorical homotopy and fibrations. Trans. Amer. Math. Soc. **140**, 239–256 (1969).
2. Gabriel, P., Zisman, M.: Calculus of fractions and homotopy theory. Ergebnisse 35. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
3. Knighton, R.L.: An application of categories of fractions to homotopy theory. In: Reports of the Midwest Category Seminar II. Lecture Notes 61, S. 62–68. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.
4. Lamotke, K.: Semisimpliziale algebraische Topologie. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.
5. Quillen, D.G.: Homotopical algebra. Lecture Notes 43. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.

Claus Michael Ringel
Mathematisches Institut der
Universität Tübingen
D-74 Tübingen, Wilhelmstr. 7

(Eingegangen am 4. März 1970)