Math. Z. 117, 249–266 (1970)


# Diagonalisierungspaare. I

CLAUS MICHAEL RINGEL

Herrn Helmut Wielandt zum 60. Geburtstag am 19. 12. 1970 gewidmet

Wir betrachten Paare $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ von Morphismenklassen einer Kategorie $\mathscr{K}$ mit der Eigenschaft, daß jedes kommutative Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ \cdot \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "b"'] & \cdot \end{tikzcd} \qquad (+)$$

mit $c \in \mathscr{C}$ und $f \in \mathscr{F}$ eine Diagonale, also einen (nicht notwendig eindeutig bestimmten) Morphismus $d$ mit

$$cd = a \quad \text{und} \quad df = b$$

besitzt, wobei $\mathscr{C}$ und $\mathscr{F}$ maximale Morphismenklassen mit dieser Eigenschaft sein sollen. Wir nennen in diesem Fall $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein Diagonalisierungspaar (kurz: D-Paar); $\mathscr{F}$ heißt D-Klasse und $\mathscr{C}$ heißt Co-D-Klasse. Man sieht unmittelbar, daß das D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ durch jede der beiden Klassen $\mathscr{C}$ und $\mathscr{F}$ eindeutig bestimmt ist[1].

Als wichtigste Beispiele möchten wir anführen:

(A) Die verschiedensten Begriffe von *Faserungen* und *Cofaserungen* in der algebraischen Topologie: die Klassen der Hurewicz- und der Serre-Faserungen (allgemeiner die der $\mathscr{X}$-Faserungen [1]) in der Kategorie $\mathfrak{Top}$ der topologischen Räume sind D-Klassen, die Cofaserungen in $\mathfrak{Top}$ bilden eine Co-D-Klasse. Dem Faserungsbegriff entspricht in abelschen Kategorien der Begriff der projektiven Klasse (Eilenberg und Moore [2]): die projektiven Klassen sind D-Klassen und entsprechen den D-Paaren $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ mit genügend $\mathscr{C}$-Objekten[2], bei denen $\mathscr{C}$ nur Coretraktionen enthält[3].

[1] Der Begriff des D-Paares geht im wesentlichen auf Quillen [9] zurück: die geschlossenen Modellkategorien sind gerade durch die Vorgabe zweier D-Paare, die gewissen Bedingungen genügen, definiert.

[2] Besitzt $\mathscr{K}$ ein Anfangsobjekt $\otimes$ (also $\mathscr{K}(\otimes, X)$ ist einelementig für alle Objekte $X$ von $\mathscr{K}$), so heißt $X$ $\mathscr{C}$-Objekt, wenn der Morphismus $\otimes \to X$ zu $\mathscr{C}$ gehört. $\mathscr{C}_0$ sei die Klasse der $\mathscr{C}$-Objekte. Wir sagen, daß es genügend $\mathscr{C}$-Objekte gibt, wenn zu jedem Objekt $X$ ein Morphismus $X' \to X$ in $\mathscr{F}$ mit $X' \in \mathscr{C}_0$ existiert. Der duale Begriff ist der des $\mathscr{F}$-Objekts, $\mathscr{F}_0$ sei entsprechend die Klasse der $\mathscr{F}$-Objekte.

[3] Eine systematische Untersuchung der Faserungsklassen wird in [12] geliefert. Insbesondere wird dort jedem D-Paar ein Homotopiebegriff zugeordnet, der für spezielle D-Paare in $\mathfrak{Top}$ mit dem üblichen übereinstimmt.

(B) Die *Bikategorien* im Sinne von Isbell [7]. Die Theorie der Bikategorien untersucht, wann es Klassen $\mathscr{E}'$ von Epimorphismen und $\mathscr{M}'$ von Monomorphismen gibt, so daß jeder Morphismus $g$ der Kategorie eine (bis auf Isomorphie eindeutige) Zerlegung $g=em$ mit $e\in\mathscr{E}'$ und $m\in\mathscr{M}'$ besitzt. Jede Bikategorie $(\mathscr{E}',\mathscr{M}')$ ist ein D-Paar. Allgemeiner sind die Linksbikategorien und die Rechtsbikategorien, die Kennison [6] eingeführt hat, D-Paare[4].

(C) Ist $\mathscr{L}$ eine (volle) *reflexive Unterkategorie* von $\mathscr{K}$, ist also der Inklusionsfunktor $\mathscr{L}\subseteq\mathscr{K}$ zu einem Funktor $R$ adjungiert, so ist die Klasse $R^{-1}\mathscr{I}$ derjenigen Morphismen, die unter $R$ in die Klasse $\mathscr{I}$ der Isomorphismen abgebildet werden, eine Co-D-Klasse. Wie in [4] gezeigt worden ist, ist $\mathscr{L}$ durch $R^{-1}\mathscr{I}$ eindeutig bestimmt.

In dieser Arbeit sollen einige grundlegende Eigenschaften von D-Paaren untersucht werden. Wir werden dabei im allgemeinen voraussetzen, daß die Kategorie $\mathscr{K}$ endliche Limites und endliche Colimites besitzt. Von großer Bedeutung ist die (für beliebige Kategorien gültige) Tatsache, daß D-Klassen mit adjungierten Funktoren verträglich sind: Das Urbild einer D-Klasse unter einem (rechts-)adjungierten Funktor ist wieder eine D-Klasse. Dies entspricht dem Satz von Eilenberg und Moore, daß Urbilder projektiver Klassen unter adjungierten Funktoren wieder projektive Klassen sind.

Die D-Paare $(\mathscr{C},\mathscr{F})$, die in (B) und (C) auftreten, haben die Eigenschaft, daß es zu jedem kommutativen Diagramm (+) mit $c\in\mathscr{C}$ und $f\in\mathscr{F}$ *genau eine* Diagonale gibt. Solche D-Paare nennen wir regulär. Die regulären D-Paare lassen sich durch interne Eigenschaften einer der beiden Klassen $\mathscr{C}$ und $\mathscr{F}$ charakterisieren: so ist $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ genau dann regulär, wenn mit $c_1c_2$ und $c_1$ auch $c_2$ zu $\mathscr{C}$ gehört. Daraus folgt, daß die regulären D-Paare einen vollständigen Verband im Verband aller D-Paare einer Kategorie bilden. Insbesondere gibt es zu jeder Morphismenklasse $\mathscr{X}$ die kleinste D-Klasse eines regulären D-Paares, die $\mathscr{X}$ enthält.

Liegt mit zwei der drei Morphismen von $c=c_1c_2$ auch der dritte in $\mathscr{C}$, so nennen wir das D-Paar $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ reflexiv. Die reflexiven D-Paare sind also regulär. Sie stehen in engem Zusammenhang mit den reflexiven Unterkategorien der vorgegebenen Kategorie: die in (C) angegebene Co-D-Klasse $R^{-1}\mathscr{I}$ definiert nämlich ein reflexives D-Paar $(R^{-1}\mathscr{I},\mathscr{F})$. Auf diese Weise entsprechen sich bijektiv die reflexiven Unterkategorien von $\mathscr{K}$ und die reflexiven D-Paare mit genügend $\mathscr{F}$-Objekten.

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden wir neben den Rechtsbikategorien spezielle reflexive D-Paare untersuchen. Lambek hat in [7] Eigenschaften von Paaren $(\mathscr{P},\mathscr{Q})$ von Objektklassen in Modulkategorien, die die Gleichungen $\mathscr{P}=\mathrm{l}\mathscr{Q}$ und $\mathrm{r}\mathscr{P}=\mathscr{Q}$[5] erfüllen, angegeben. Wir zeigen, daß es genau ein D-Paar $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ mit $\mathscr{C}_0=\mathscr{P}$ und $\mathscr{F}_0=\mathscr{Q}$ gibt. Dieses D-Paar ist reflexiv und coreflexiv, und jeder Morphismus $g$ der Kategorie läßt sich (bis auf Isomorphie eindeutig) zerlegen in $g=cf$ mit $c\in\mathscr{C}$ und $f\in\mathscr{F}$. Umgekehrt haben alle D-Paare,

[4] Im 2. Teil dieser Arbeit wird eine Charakterisierung der Rechtsbikategorien gegeben.

[5] $\mathrm{l}\mathscr{Q}$ sei der Linksannullator von $\mathscr{Q}$, also die Klasse aller Objekte $P$, für die jeder Morphismus $P\to Q$ mit $Q\in\mathscr{Q}$ trivial ist. Entsprechend sei $\mathrm{r}\mathscr{P}$ der Rechtsannullator von $\mathscr{P}$.

die gleichzeitig reflexiv und coreflexiv sind, diese Gestalt. Wir werden uns ferner mit den hier entwickelten Methoden der Frage nach der Existenz reflexiver Unterkategorien in Modulkategorien zuwenden. Es läßt sich zeigen, daß jede Objektklasse $\mathscr{Y}$, für die $1\mathscr{Y}$ subobjekt-vererblich ist, in einer kleinsten reflexiven Unterkategorie liegt. Insbesondere liegt jede Klasse injektiver Objekte in einer kleinsten reflexiven Unterkategorie, und man erhält auf diese Weise die Lokalisierungen im Sinne von Gabriel [3].

Friedrich Wilhelm Bauer bin ich für viele Anregungen und Hinweise zu Dank verpflichtet.

## 1. Definition des Diagonalisierungspaars

Sind $c$ und $f$ zwei Morphismen in der Kategorie $\mathscr{K}$, so nennen wir das Paar $(c, f)$ *diagonalisierbar*, wenn es zu jeder Gleichung der Form

$$cb = af$$

einen Morphismus $d$ gibt mit

$$cd = a \quad \text{und} \quad df = b.$$

$d$ ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Wir nennen solche Morphismen $d$, die die Gleichung $cd = a$ und $df = b$ erfüllen, *Diagonalen* der Gleichung $cd = af$ oder auch Diagonalen des (kommutativen) Diagramms

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ \cdot \arrow[r, "b"'] \arrow[ur, dashed, "d"] & \cdot \end{tikzcd}$$

Ist $\mathscr{X}$ eine Morphismenklasse in der Kategorie $\mathscr{K}$, so bezeichnen wir mit $\mathrm{d_r}\mathscr{X}$ und $\mathrm{d_l}\mathscr{X}$ die folgendermaßen definierten Klassen

$$\mathrm{d_r}\mathscr{X} = \{f \mid (x, f) \text{ diagonalisierbar, für alle } x \in \mathscr{X}\},$$
$$\mathrm{d_l}\mathscr{X} = \{c \mid (c, x) \text{ diagonalisierbar, für alle } x \in \mathscr{X}\}.$$

Eine Morphismenklasse $\mathscr{F}$ heißt *Diagonalisierungsklasse* (kurz: *D-Klasse*), wenn $\mathscr{F} = \mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{F}$ gilt. Eine Morphismenklasse $\mathscr{C}$ heißt *Codiagonalisierungsklasse* (kurz: *Co-D-Klasse*), wenn $\mathscr{C} = \mathrm{d_l}\,\mathrm{d_r}\,\mathscr{C}$ gilt. Sind $\mathscr{C}$ und $\mathscr{F}$ zwei Morphismenklassen, so nennen wir das Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein *Diagonalisierungspaar* (kurz: *D-Paar*), wenn die beiden Gleichungen $\mathscr{F} = \mathrm{d_r}\mathscr{C}$ und $\mathscr{C} = \mathrm{d_l}\mathscr{F}$ gelten.

Die Operatoren $\mathrm{d_r}$ und $\mathrm{d_l}$ stellen eine Galoisbeziehung im Verband aller Teilklassen von $\mathscr{K}$ her, denn für beliebige Morphismenklassen $\mathscr{X}$ und $\mathscr{Y}$ gilt:

$$\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y} \quad \text{impliziert} \quad \mathrm{d_r}\mathscr{X} \supseteq \mathrm{d_r}\mathscr{Y} \quad \text{und} \quad \mathrm{d_l}\mathscr{X} \supseteq \mathrm{d_l}\mathscr{Y}, \tag{1}$$

$$\mathscr{X} \subseteq \mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{X}, \quad \mathscr{X} \subseteq \mathrm{d_l}\,\mathrm{d_r}\,\mathscr{X}. \tag{2}$$

Daher sind die Operatoren $d_r d_l$ und $d_l d_r$ Abschlußoperatoren. Die D-Klassen sind gerade die $d_r d_l$-abgeschlossenen Klassen, die Co-D-Klassen die $d_l d_r$-abgeschlossenen Klassen.

Trivialerweise liegen die Isomorphismen der Kategorie in jeder D-Klasse und in jeder Co-D-Klasse. Ist daher $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein D-Paar, so enthält der Durchschnitt $\mathscr{C} \cap \mathscr{F}$ sicher die Klasse der Isomorphismen.

**Lemma 1.** *Für ein D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ist $\mathscr{C} \cap \mathscr{F}$ genau die Klasse der Isomorphismen.*

*Beweis.* Sei $g \in \mathscr{C} \cap \mathscr{F}$. Wir betrachten die Gleichung

$$g \cdot 1 = 1 \cdot g.$$

Da $g$ sowohl in $\mathscr{C}$ als auch in $\mathscr{F}$ liegt, gibt es eine Diagonale $d$ mit

$$g d = 1 \quad \text{und} \quad d g = 1,$$

$g$ ist also Isomorphismus.

Daraus folgt unmittelbar:

(a) In jeder Kategorie $\mathscr{K}$ sind $(\mathscr{K}, \mathscr{I})$ und $(\mathscr{I}, \mathscr{K})$ D-Paare, dabei sei $\mathscr{I}$ die Klasse der Isomorphismen.

Weniger trivial sind die folgenden Beispiele:

(b) In der Kategorie $\mathfrak{Top}$ der topologischen Räume und stetigen Abbildungen bilden die Cofaserungen eine Co-D-Klasse. Bezeichnen wir mit $X^I$ den Wegeraum von $X$ und mit $p_X\colon X^I \to X$ die durch $p_X(w) = w(0)$ definierte Abbildung, so ist nämlich $c$ genau dann eine Cofaserung, wenn das Paar $(c, p_X)$ für alle Räume $X$ diagonalisierbar ist.

(c) In $\mathfrak{Top}$ bilden die Hurewicz-Faserungen und die Serre-Faserungen jeweils eine D-Klasse.

(d) In der Kategorie der simplizialen Mengen sei $\mathfrak{A}$ die Klasse der anodynen Erweiterungen, $\mathfrak{K}$ die Klasse der Kanfaserungen. Dann ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{K})$ ein D-Paar [9].

(e) Ist $\mathscr{K}$ eine abelsche Kategorie mit genügend projektiven Objekten, so ist die Klasse $\mathscr{E}$ der Epimorphismen eine D-Klasse. Ein Morphismus $e$ ist nämlich genau dann ein Epimorphismus, wenn $(O \to P, e)$ für jedes projektive Objekt $P$ diagonalisierbar ist.

(f) In jeder abelschen Kategorie bilden die Klassen $\mathscr{E}$ der Epimorphismen und $\mathscr{M}$ der Monomorphismen ein D-Paar $(\mathscr{E}, \mathscr{M})$.

(g) In $\mathfrak{Top}$ sei $\mathscr{M}_e$ die Klasse derjenigen Abbildungen $g\colon A \to B$, bei denen $A$ homöomorph auf einen Teilraum von $B$ abgebildet wird; $\mathscr{E}$ sei die Klasse der surjektiven Abbildungen. Dann ist $(\mathscr{E}, \mathscr{M}_e)$ ein D-Paar.

Weitere Beispiele werden wir im Laufe der Untersuchung kennenlernen.

Wir formulieren nun das für die Theorie der D-Paare äußerst wichtige Dualitätsprinzip. Dabei bezeichnen wir mit * den Übergang zur dualen Kategorie.

**Dualitätsprinzip.** *$\mathscr{C}$ und $\mathscr{F}$ seien zwei Morphismenklassen in $\mathscr{K}$. Dann ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ genau dann ein D-Paar in $\mathscr{K}$, wenn $(\mathscr{F}^*, \mathscr{C}^*)$ ein D-Paar in $\mathscr{K}^*$ ist.*

Beim Dualisieren geht also ein D-Paar wieder in ein D-Paar über. Daher liefert jeder Satz über D-Paare durch Dualisieren einen neuen Satz über D-Paare. Aus einem Satz über D-Klassen wird ein Satz über Co-D-Klassen. Wir überlassen es dem Leser, die Sätze dieser Arbeit zu dualisieren.

Die wichtigsten Abschlußeigenschaften von D-Klassen fassen wir in folgendem Lemma zusammen:

**Lemma 2.** *Sei $\mathscr{F}$ eine D-Klasse in der Kategorie $\mathscr{K}$. Dann gilt*

(i) *$\mathscr{F}$ ist pullbackabgeschlossen, d.h.: ist das folgende Diagramm ein Pullbackdiagramm*

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$

*so liegt mit $f$ auch $f'$ in $\mathscr{F}$.*

(ii) *Liegt die Familie $\{f_i\colon X_{i+1} \to X_i | i \in I\}$ in $\mathscr{F}$, wobei $I$ wohlgeordnet und $X_\alpha$ (für jede Limeszahl $\alpha$) gerade der Limes der $f_i$ $(i<\alpha)$ sei, so liegt für den Limes $X$ der $f_i$ der kanonische Morphismus $f\colon X \to X_1$ in $\mathscr{F}$.*

(iii) *$\mathscr{F}$ ist abgeschlossen gegen Produktbildung: Ist $\{f_i\colon X_i \to Y_i\}$ eine Familie von Morphismen aus $\mathscr{F}$ und ist $\prod f_i\colon \prod X_i \to \prod Y_i$ das Produkt dieser Familie, so ist dieser Morphismus Element von $\mathscr{F}$.*

(iv) *Jeder Retrakt eines Morphismus aus $\mathscr{F}$ (gebildet in der Kategorie $\mathscr{K}^{\to}$ der Morphismen aus $\mathscr{K}$) gehört wieder zu $\mathscr{F}$: ist das folgende Diagramm kommutativ*

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & \cdot \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"] & \cdot \arrow[d, "f'"] \\ \cdot \arrow[r, "v"'] & \cdot \arrow[r, "s"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

*und ist $ur=1$, $vs=1$, so liegt mit $f$ auch $f'$ in $\mathscr{F}$.*

$\mathscr{F}$ ist also cogesättigt im Sinne von Gabriel und Zisman [4].

Der Beweis von Lemma 2 sei dem Leser überlassen.

Für einzelne D-Klassen, die bisher in verschiedenen Gebieten der Mathematik eine Rolle gespielt haben, sind diese Eigenschaften von großer Bedeutung. Betrachtet man zum Beispiel die Klasse $\mathscr{F}$ der Hurewicz-Faserungen, so besagt Eigenschaft (i) gerade die Existenz induzierter Faserungen, während (ii) in die Konstruktion der Moore-Postnikov-Folgen eingeht.

Wir geben noch zwei Folgerungen aus Lemma 2 an:

**Korollar.** *$\mathscr{F}$ sei eine D-Klasse. Dann gilt:*

*Liegt $gm$ in $\mathscr{F}$ und ist $m$ ein Monomorphismus, so ist $g \in \mathscr{F}$.*

*Liegt $rg$ in $\mathscr{F}$ und ist $r$ eine Retraktion, so ist $g \in \mathscr{F}$.*

*Beweis.* Ist $m$ Monomorphismus, so ist $g$ Pullback von $gm$. Ist $r$ Retraktion, so ist $g$ (als Objekt von $\mathscr{K}^{\to}$) Retrakt von $rg$.

Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein D-Paar in einer Kategorie mit Pullbacks, und will man nachweisen, daß ein Morphismus $x$ zu $\mathscr{C}$ gehört, so braucht man nicht alle Gleichungen der Form

$$xb = af$$

mit $f \in \mathscr{F}$ zu betrachten. Es genügt, daß sich diejenigen Gleichungen, bei denen $b = 1$ gilt, diagonalisieren lassen, denn es läßt sich zeigen:

**Lemma 3.** *$\mathscr{K}$ besitze Pullbacks. $\mathscr{Y}$ sei eine Morphismenklasse, die pullback-abgeschlossen ist. Läßt sich für ein $x$ jede Gleichung der Form*

$$x \cdot 1 = af$$

*mit $y \in \mathscr{Y}$ diagonalisieren, so liegt $x$ in $\mathrm{d}_1\mathscr{Y}$.*

*Beweis.* Sei eine Gleichung der Form

$$xb = ay$$

mit $y \in \mathscr{Y}$ gegeben. Wir bilden das Pullback $(b', y')$ von $(y, b)$. Da die Gleichung $xb = ay$ gilt, können wir $(a, x)$ durch das Pullback faktorisieren: es gibt $a'$ mit

$$a' b' = a \quad \text{und} \quad a' y = x.$$

Die Gleichung

$$x \cdot 1 = a' y'$$

läßt sich diagonalisieren, denn mit $y$ liegt auch $y'$ in $\mathscr{Y}$. Sei nun $d$ gegeben mit

$$x d' = a' \quad \text{und} \quad d' y' = 1.$$

Setzen wir $d = d' b'$, so ist dies eine Diagonale von $xb = ay$.

## 2. Diagonalisierungspaare und adjungierte Funktoren

Wir setzen voraus, daß der Funktor $T: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ zum Funktor $S: \mathscr{L} \to \mathscr{K}$ adjungiert ist.

**Lemma 4.** *Sei $c \in \mathscr{L}$, $f \in \mathscr{K}$. Das Paar $(c^S, f)$ aus $\mathscr{K}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $(c, f^T)$ in $\mathscr{L}$ diagonalisierbar ist.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung existiert eine natürliche Äquivalenz

$$\gamma: \mathscr{K}(.^S, .) \to \mathscr{L}(., .^T).$$

Sei $(c^S, f)$ diagonalisierbar, und sei die folgende Gleichung gegeben:

$$cb = af^T.$$

Wenden wir $\bar{\gamma} = \gamma^{-1}$ an, so erhalten wir in $\mathscr{K}$ die Gleichung

$$c^S b^{\bar{\gamma}} = (cb)^{\bar{\gamma}} = (af^T)^{\bar{\gamma}} = a^{\bar{\gamma}} f.$$

Da $(c^S, f)$ diagonalisierbar ist, gibt es $d'$ mit

$$c^S d' = a^{\bar{\gamma}} \quad \text{und} \quad d' f = b^{\bar{\gamma}}.$$

Setzen wir $d = d'^{\gamma}$, so ist

$$c\,d = c\,d'^{\gamma} = (c^S d')^{\gamma} = a^{\bar{\gamma}\gamma} = a,$$
$$d f^T = d'^{\gamma} f^T = (d' f)^{\gamma} = b^{\bar{\gamma}\gamma} = b,$$

und daher ist $(c, f^T)$ diagonalisierbar.

Die Umkehrung folgt durch Dualisieren.

Es gilt also der folgende Adjunktionssatz:

**Satz 1 (Adjunktionssatz).** *Der Funktor $T$: $\mathscr{K} \to \mathscr{L}$ sei zu einem Funktor $S$ adjungiert. Für jede Morphismenklasse $\mathscr{X}$ aus $\mathscr{L}$ gilt in $\mathscr{K}$ die Gleichung*

$$\mathrm{d_r}(\mathscr{X}^S) = T^{-1}\,\mathrm{d_r}\mathscr{X}.$$

*Beweis.* Ein Morphismus $f \in \mathscr{K}$ liegt nach Lemma 4 genau dann in $\mathrm{d_r}(\mathscr{X}^S)$, wenn $f^T$ in $\mathrm{d_r}\mathscr{X}$ liegt, also genau dann, wenn $f$ in der Klasse $T^{-1}\mathrm{d_r}\mathscr{X}$ liegt.

**Korollar 1.** *Der Funktor $T$: $\mathscr{K} \to \mathscr{L}$ sei zu einem Funktor $S$ adjungiert. Ist $\mathscr{F}$ eine D-Klasse in $\mathscr{L}$, so ist $T^{-1}\mathscr{F}$ D-Klasse in $\mathscr{K}$.*

*Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ D-Paar in $\mathscr{L}$, so ist $\left(\mathrm{d_l}\,\mathrm{d_r}(\mathscr{C}^S), T^{-1}\mathscr{F}\right)$ D-Paar in $\mathscr{K}$.*

*Beweis.* Es genügt, die zweite Aussage zu beweisen. Wir wenden den Adjunktionssatz auf die Klasse $\mathscr{X} = \mathscr{C}$ an und erhalten die Gleichung

$$\mathrm{d_r}(\mathscr{C}^S) = T^{-1}\,\mathrm{d_r}\mathscr{C} = T^{-1}\mathscr{F},$$

die zugehörige Co-D-Klasse ist dann

$$\mathrm{d_l}\,T^{-1}\mathscr{F} = \mathrm{d_l}\,\mathrm{d_r}(\mathscr{C}^S).$$

Wir geben zwei Anwendungsbeispiele. Dabei bezeichnen wir mit *Sin*: $\mathfrak{Top} \to \mathfrak{S}$ den Singularisierungsfunktor von der Kategorie $\mathfrak{Top}$ der topologischen Räume in die Kategorie $\mathfrak{S}$ der simplizialen Mengen.

(a) *Ein topologischer Raum $X$ ist genau dann $n$-zusammenhängend, wenn $X^{Sin}$ $n$-zusammenhängend ist.*

*Beweis.* Der Funktor *Sin* ist adjungiert zum Realisierungsfunktor $R$.

Unter dem Realisierungsfunktor geht die Einbettung

$$[\dot{m}] \subseteq [m]$$

der simplizialen $(m-1)$-Sphäre in das Standard-$m$-Simplex über in die Einbettung der topologischen $(m-1)$-Sphäre als Rand eines $m$-Simplexes. Bezeichnen wir mit $\mathscr{X}$ die Menge

$$\mathscr{X} = \{[\dot{m}] \subseteq [m] \mid m \leqq n+1\},$$

und wenden wir den Adjunktionssatz an:

$$\mathrm{d}_r(\mathscr{X}^R) = Sin^{-1}\,\mathrm{d}_r\mathscr{X}, \qquad (+)$$

so folgt die Behauptung, denn der topologische Raum $X$ ist genau dann $n$-zusammenhängend, wenn die Abbildung $X \to P$ ($P$ der Raum mit genau einem Punkt) in $\mathrm{d}_r(\mathscr{X}^R)$ liegt, und die simpliziale Menge $Y$ ist genau dann $n$-zusammenhängend, wenn die Abbildung $Y \to [0]$ in $\mathrm{d}_r\mathscr{X}$ liegt.

(b) *Eine Abbildung $f$ aus $\mathfrak{Top}$ ist genau dann eine Serre-Faserung, wenn $f^{Sin}$ eine Kanfaserung ist.*

*Beweis.* Wir bezeichnen mit $\mathscr{X}$ die Klasse der Inklusionen

$$\mathscr{X} = \{[n] \times [0] \cup A \times [1] \to [n] \times [1] \mid n \geqq 0, A \subseteq [n]\}$$

aus $\mathfrak{S}$. Es gilt wiederum die Gleichung $(+)$.

Eine Abbildung aus $\mathfrak{Top}$ ist aber genau dann Serre-Faserung, wenn sie in $\mathrm{d}_r(\mathscr{X}^R)$ liegt, eine Abbildung aus $\mathfrak{S}$ ist genau dann Kanfaserung, wenn sie in $\mathrm{d}_r\mathscr{X}$ liegt.

Der Adjunktionssatz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Eilenberg und Moore [2]. Dazu führen wir die folgende Definition ein:

$\mathscr{K}$ sei eine Kategorie mit Anfangsobjekt $\circleddash$, $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ sei ein D-Paar in $\mathscr{K}$. Gibt es in $\mathscr{K}$ eine Klasse $\mathscr{P}$ von Objekten, so daß

$$\mathscr{F} = \mathrm{d}_r(\{\circleddash \to P \mid P \in \mathscr{P}\}) \qquad (++)$$

gilt, so nennen wir $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein *projektives Paar*. Wir schreiben statt $(++)$ auch einfach

$$\mathscr{F} = \mathrm{d}_r\mathscr{P}.$$

Die D-Klassen projektiver Paare sind im wesentlichen die projektiven Klassen von Eilenberg und Moore[6].

Aus dem Adjunktionssatz folgt:

**Korollar 2** (Eilenberg und Moore). *Der Funktor $T$: $\mathscr{K} \to \mathscr{L}$ sei zu einem Funktor $S$ adjungiert und $\mathscr{L}$ besitze ein Anfangsobjekt $\circleddash$. Ist $\mathscr{P}$ eine Objektklasse in $\mathscr{L}$, so gilt in $\mathscr{K}$ die Gleichung*

$$\mathrm{d}_r(\mathscr{P}^S) = T^{-1}\,\mathrm{d}_r\mathscr{P}.$$

*Ist also $\mathscr{F}$ die D-Klasse eines projektiven Paares in $\mathscr{L}$, so ist $T^{-1}\mathscr{F}$ die D-Klasse eines projektiven Paares in $\mathscr{K}$.*

*Beweis.* Unter $S$ geht $\circleddash$ in ein Anfangsobjekt von $\mathscr{K}$ über, das wir wiederum mit $\circleddash$ bezeichnen. Es ist also

$$\{\circleddash \to P \mid P \in \mathscr{P}\}^S = \{\circleddash \to P^S \mid P \in \mathscr{P}\},$$

daher folgt die obige Gleichung aus dem Adjunktionssatz.

[6] $\mathscr{F}$ ist genau dann projektive Klasse im Sinne von [3], wenn $(\mathrm{d}_l\mathscr{F}, \mathscr{F})$ projektives Paar mit genügend $\mathrm{d}_l\mathscr{F}$-Objekten ist.

## 3. Reguläre Diagonalisierungspaare

Wir nennen das D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ *regulär*, wenn zu jeder Gleichung

$$cb = af$$

mit $c \in \mathscr{C}$, $f \in \mathscr{F}$ genau eine Diagonale existiert.

Dazu äquivalent ist, daß aus den Gleichungen

$$cx = cy \quad \text{und} \quad xf = yf$$

mit $c \in \mathscr{C}$ und $f \in \mathscr{F}$ die Gleichung $x = y$ folgt.

Der Begriff „regulär" ist selbstdual: Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ regulär in $\mathscr{K}$, so ist in der dualen Kategorie $\mathscr{K}^*$ das D-Paar $(\mathscr{F}^*, \mathscr{C}^*)$ regulär.

Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein D-Paar und enthält $\mathscr{F}$ nur Monomorphismen oder $\mathscr{C}$ nur Epimorphismen, so ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ trivialerweise regulär.

Bezeichnen wir in $\mathfrak{Top}$ die Klasse der Hurewicz-Faserungen mit eindeutiger Weghochhebung mit $\mathfrak{F}'$, so ist $(\mathrm{d_l}\,\mathfrak{F}', \mathfrak{F}')$ ein reguläres D-Paar.

Wir bemerken als erstes:

**Lemma 5.** *$(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ sei reguläres D-Paar. Ist $cf = c'f'$ und liegen die Morphismen $c, c'$ in $\mathscr{C}$, die Morphismen $f, f'$ in $\mathscr{F}$, so gibt es einen Isomorphismus $t$ mit*

$$ct = c' \quad \textit{und} \quad f = tf'.$$

Der Beweis sei dem Leser überlassen.

Wir kommen nun zu einer Methode, die es gestattet, in Kategorien mit Pullbacks und Pushouts reguläre D-Paare zu konstruieren. Wie wir jeder Morphismenklasse $\mathscr{X}$ die von ihr erzeugte D-Klasse $\mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{X}$ zuordnen können, so werden wir hier der Klasse $\mathscr{X}$ die D-Klasse $\mathrm{e_r}\,\mathrm{e_l}\,\mathscr{X}$ eines regulären D-Paares zuordnen. Dabei ist $\mathrm{e_r}\,\mathrm{e_l}\,\mathscr{X}$ die kleinste solche Klasse, die $\mathscr{X}$ enthält.

Wir setzen während des ganzen Abschnitts voraus, daß die Kategorie $\mathscr{K}$ Pullbacks und Pushouts besitzt.

Sind $c$ und $f$ zwei Morphismen aus $\mathscr{K}$, so nennen wir das Paar $(c, f)$ *eindeutig diagonalisierbar*, wenn es zu jeder Gleichung

$$cb = af$$

genau eine Diagonale $d$ gibt.

Ist $\mathscr{X}$ eine Morphismenklasse, so bezeichnen wir mit $\mathrm{e_r}\,\mathscr{X}$ und $\mathrm{e_l}\,\mathscr{X}$ die folgendermaßen definierten Klassen

$$\mathrm{e_r}\,\mathscr{X} = \{f \mid (x, f) \text{ eindeutig diagonalisierbar für } x \in \mathscr{X}\},$$
$$\mathrm{e_l}\,\mathscr{X} = \{c \mid (c, x) \text{ eindeutig diagonalisierbar für } x \in \mathscr{X}\}.$$

Trivialerweise haben wir die Inklusionen

$$\mathrm{e_r}\,\mathscr{X} \subseteq \mathrm{d_r}\,\mathscr{X} \quad \text{und} \quad \mathrm{e_l}\,\mathscr{X} \subseteq \mathrm{d_l}\,\mathscr{X}$$

für beliebiges $\mathscr{X}$.

Die Operatoren $\mathrm{e}_r$ und $\mathrm{e}_l$ stellen wieder eine Galois-Beziehung im Verband der Teilklassen von $\mathscr{K}$ her, $\mathrm{e}_r\mathrm{e}_l$ und $\mathrm{e}_l\mathrm{e}_r$ sind daher Abschlußoperatoren.

Man sieht sofort, daß das D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ genau dann regulär ist, wenn $\mathscr{C} = \mathrm{e}_l\mathscr{F}$ gilt, und dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $\mathscr{F} = \mathrm{e}_r\mathscr{C}$ gilt. Morphismenklassen der Form $\mathrm{e}_r\mathscr{X}$ erhält man also, wenn man D-Klassen regulärer D-Paare betrachtet. Wir werden zeigen, daß man auf diese Weise alle solchen Klassen erhält.

Für reguläre D-Paare $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ haben wir die Gleichung

$$\mathrm{d}_l\mathscr{F} = \mathscr{C} = \mathrm{e}_l\mathscr{F},$$

und unsere wichtigste Aufgabe wird nun sein, Morphismenklassen $\mathscr{X}$ zu finden, für die die entsprechende Gleichung

$$\mathrm{d}_l\mathscr{X} = \mathrm{e}_r\mathscr{X} \tag{+}$$

gilt. Das folgende Lemma spielt dabei eine entscheidende Rolle.

**Lemma 6.** *$\mathscr{X}$ sei eine Morphismenklasse mit*

(a) *$\mathscr{X}$ ist pullbackabgeschlossen,*

(b) *$\mathscr{X}$ ist coretraktvererblich, d.h.: gilt $ur = 1$, so liegt mit $r$ auch $u$ in $\mathscr{X}$.*

*Dann gilt die Gleichung* (+).

*Beweis.* Sei $c \in \mathrm{d}_l\mathscr{X}$. Seien $d, d'$ zwei Morphismen, für die es ein $x \in \mathscr{X}$ mit

$$cd = cd' \quad \text{und} \quad dx = d'x$$

gibt. Wir bilden das Pullback $(x', p)$ von $(dx, x)$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "p"] \arrow[d, "x'"'] & \cdot \arrow[d, "x"] \\ \cdot \arrow[r, "dx"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

und faktorisieren $(1, d)$ durch das Pullback. Wir erhalten $e$ mit

$$ex' = 1 \quad \text{und} \quad ep = d.$$

Es ist $1 \cdot dx = d'x$, also können wir auch $(1, d')$ durch das Pullback faktorisieren und erhalten $e'$ mit

$$e'x' = 1 \quad \text{und} \quad e'p = d'.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Faktorisierung folgt aus den Gleichungen $(ce)x' = c \cdot 1 = (ce')x'$ und $(ce)p = cd = cd' = (ce')p$ die Gleichung

$$ce = ce'. \tag{++}$$

Mit $x$ liegt auch $x'$ in $\mathscr{X}(a)$, wegen $e'x' = 1$ liegt auch $e'$ in $\mathscr{X}(b)$. Da $c \in \mathrm{d}_l\mathscr{X}$, gibt es zur Gleichung (++) eine Diagonale $h$, insbesondere ist

$$he' = e.$$

Dann ist aber

$$h=h\cdot 1=h(e'x')=(he')\,x'=ex'=1,$$

und daher ist

$$e=e',$$

also auch

$$d=ep=e'p=d'.$$

Damit ist gezeigt, daß $c$ in $\mathrm{e}_1\mathscr{X}$ liegt.

Wir wollen dieses Lemma später auf Klassen der Form $\mathrm{e}_\mathrm{r}\mathscr{Y}$ anwenden. Dazu müssen wir wissen, daß $\mathrm{e}_\mathrm{r}\mathscr{Y}$ coretraktvererblich ist. Wir zeigen eine etwas schärfere Aussage:

**Lemma 7.** *Für beliebiges $\mathscr{Y}$ ist $\mathrm{e}_\mathrm{r}\mathscr{Y}$ anfangsvererblich, d.h.: gilt die Gleichung $z_1 z_2=z$ und liegen die beiden Morphismen $z_2$ und $z$ in $\mathrm{e}_\mathrm{r}\mathscr{Y}$, so liegt auch $z_1$ in $\mathrm{e}_\mathrm{r}\mathscr{Y}$.*

*Beweis.* Sei eine Gleichung der Form

$$yb=az_1$$

mit $y\in\mathscr{Y}$ gegeben. Wir schalten $z_2$ dahinter und erhalten

$$y(bz_2)=az,$$

und da $z$ in $\mathrm{d}_\mathrm{r}\mathscr{Y}$ liegt, gibt es einen Morphismus $d$ mit

$$yd=a \quad \text{und} \quad dz=bz_2.$$

Nun haben wir aber

$$y(dz_1)=yb \quad \text{und} \quad (dz_1)\,z_2=bz_2.$$

Da $(y, z_2)$ eindeutig diagonalisierbar ist, folgt

$$dz_1=b,$$

und $d$ ist eine Diagonale der Ausgangsgleichung.

Ist $d'$ eine zweite Diagonale, also

$$yd=yd' \quad \text{und} \quad dz_1=d'z_1,$$

so schalten wir hinter die zweite Gleichung wiederum $z_2$ und erhalten

$$yd=yd' \quad \text{und} \quad dz=d'z.$$

Da $(y, z)$ eindeutig diagonalisierbar ist, folgt $d=d'$. Damit ist gezeigt, daß $z_1$ in $\mathrm{e}_\mathrm{r}\mathscr{Y}$ liegt.

Wir haben nun alle Hilfsmittel bereitgestellt, um beweisen zu können, daß für beliebiges $\mathscr{Y}$ das Paar $(\mathrm{e}_\mathrm{l}\,\mathrm{e}_\mathrm{r}\mathscr{Y}, \mathrm{e}_\mathrm{r}\mathscr{Y})$ ein reguläres D-Paar ist.

**Satz 2.** *$\mathscr{K}$ sei eine Kategorie mit Pullbacks und Pushouts. Für jede Morphismenklasse $\mathscr{Y}$ ist $\mathrm{e}_\mathrm{r}\mathscr{Y}$ die D-Klasse eines regulären D-Paares.*

*Beweis.* Wir zeigen als erstes:

(1) $\mathrm{e}_r\mathcal{Y}$ ist pullbackvererblich.

Sei das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "f'"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ \cdot \arrow[r, "p"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

ein Pullbackdiagramm, sei $f \in \mathrm{e}_r\mathcal{Y}$. Da $\mathrm{e}_r\mathcal{Y} \subseteq \mathrm{d}_r\mathcal{Y}$ folgt aus Lemma 2, daß $f'$ in $\mathrm{d}_r\mathcal{Y}$ liegt. Es bleibt daher zu zeigen, daß aus den Gleichungen

$$yd = yd' \quad \text{und} \quad df' = d'f'$$

für ein $y \in \mathcal{Y}$ die Gleichung $d = d'$ folgt.

Aus den beiden Gleichungen folgt aber

$$y(dp') = y(d'p')$$

und

$$(dp')f = df'p = d'f'p = (d'p')f.$$

Da $(y, f)$ eindeutig diagonalisierbar ist, gilt $dp' = d'p'$. Diese Gleichung aber, zusammen mit $df' = d'f'$, impliziert wegen der Eindeutigkeit der Faktorisierung durch ein Pullback die gesuchte Gleichung.

(2) Es ist $\mathrm{d}_l\mathrm{e}_r\mathcal{Y} = \mathrm{e}_l\mathrm{e}_r\mathcal{Y}$.

Nach Lemma 7 wissen wir nämlich, daß die Klasse $\mathcal{X} = \mathrm{e}_r\mathcal{Y}$ coretraktvererblich ist, aus (1) folgt, daß sie pullbackvererblich ist: daher können wir Lemma 6 anwenden.

(3) Durch Dualisieren erhalten wir: für beliebiges $\mathcal{X}$ gilt die Gleichung $\mathrm{d}_r\mathrm{e}_l\mathcal{X} = \mathrm{e}_r\mathrm{e}_l\mathcal{X}$.

(4) Unter Verwendung von (2) und der Anwendung von (3) auf die Klasse $\mathcal{X} = \mathrm{e}_r\mathcal{Y}$ erhalten wir

$$\mathrm{d}_r\mathrm{d}_l\mathrm{e}_r\mathcal{Y} = \mathrm{d}_r\mathrm{e}_l\mathrm{e}_r\mathcal{Y} = \mathrm{e}_r\mathrm{e}_l\mathrm{e}_r\mathcal{Y} = \mathrm{e}_r\mathcal{Y}.$$

Dabei folgt die letzte Gleichung direkt aus der Definition von $\mathrm{e}_r$ und $\mathrm{e}_l$.

Damit ist bewiesen, daß $\mathrm{e}_r\mathcal{Y}$ eine D-Klasse ist. Aus (2) folgt nun, daß das zugehörige D-Paar $(\mathrm{d}_l\mathrm{e}_r\mathcal{Y}, \mathrm{e}_r\mathcal{Y})$ regulär ist.

**Korollar 1.** $\mathrm{e}_r\mathrm{e}_l\mathcal{X}$ *ist die kleinste D-Klasse eines regulären D-Paares, die* $\mathcal{X}$ *enthält.*

*Beweis.* Ist nämlich $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ reguläres D-Paar mit $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{F}$, so ist

$$\mathrm{e}_r\mathrm{e}_l\mathcal{X} \subseteq \mathrm{e}_r\mathrm{e}_l\mathcal{F} = \mathcal{F}.$$

Andererseits liegt aber $\mathcal{X}$ in $\mathrm{e}_r\mathrm{e}_l\mathcal{X}$, und $\mathrm{e}_r\mathrm{e}_l\mathcal{X}$ ist D-Klasse eines regulären D-Paares, wie aus Satz 2 durch Dualisierung folgt.

**Korollar 2.** *Für beliebiges $\mathscr{X}$ ist*

$$\mathrm{d_r\,d_l}\,\mathscr{X} \subseteq \mathrm{e_r\,e_l}\,\mathscr{X}.$$

*Beweis.* $\mathrm{d_r\,d_l}\,\mathscr{X}$ ist nämlich die kleinste D-Klasse überhaupt, die $\mathscr{X}$ enthält.

Wir sehen also, daß die Operatoren $\mathrm{d_r\,d_l}$ und $\mathrm{e_r\,e_l}$ miteinander vergleichbar sind.

Lemma 6 gestattet, die regulären D-Paare durch Vererbungseigenschaften der D-Klassen oder der Co-D-Klassen zu charakterisieren:

**Satz 3.** *$\mathscr{K}$ sei eine Kategorie mit Pullbacks und Pushouts. Dann sind für das D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) *$\mathscr{F}$ ist anfangsvererblich (also: $fg$, $g \in \mathscr{F} \Rightarrow f \in \mathscr{F}$),*

(ii) *$\mathscr{F}$ ist coretraktvererblich (also: $r \in \mathscr{F}$, $ur = 1 \Rightarrow u \in \mathscr{F}$),*

(iii) *$(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ist regulär,*

(ii)* *$\mathscr{C}$ ist retraktvererblich (also: $u \in \mathscr{C}$, $ur = 1 \Rightarrow r \in \mathscr{C}$),*

(i)* *$\mathscr{C}$ ist endvererblich (also: $cd$, $c \in \mathscr{C} \Rightarrow d \in \mathscr{C}$).*

*Beweis.* Wir zeigen die Äquivalenz von (i), (ii) und (iii). Da (iii) selbstdual ist, folgen die anderen Aussagen durch Dualisieren.

Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Nach Lemma 2 ist $\mathscr{F}$ pullbackvererblich. Also folgt aus Lemma 6 die Gleichung $\mathrm{d_l}\,\mathscr{F} = \mathrm{e_l}\,\mathscr{F}$, das heißt, daß $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ regulär ist.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Es ist $\mathscr{F} = \mathrm{e_r}\,\mathscr{C}$. Aus Lemma 7 folgt daher die Behauptung.

Die D-Klassen einer Kategorie sind durch die Inklusion in natürlicher Weise halbgeordnet. Definieren wir in der Klasse aller D-Paare eine Halbordnung durch

$$(\mathscr{C}, \mathscr{F}) \leqq (\mathscr{C}', \mathscr{F}') \Leftrightarrow \mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}',$$

so bilden die D-Paare einen vollständigen Verband.

Denn ist $\{(\mathscr{C}_i, \mathscr{F}_i)\}$ eine Familie von D-Paaren, so verifiziert man unmittelbar die Gleichung

$$\mathrm{d_r}\Big(\bigcup_i \mathscr{C}_i\Big) = \bigcap_i \mathscr{F}_i,$$

also ist mit $\mathscr{F}_i$ auch $\bigcap \mathscr{F}_i$ eine D-Klasse und $(\mathrm{d_l\,d_r}(\bigcup \mathscr{C}_i), \bigcap \mathscr{F}_i)$ ist das Infimum der Familie $\{(\mathscr{C}_i, \mathscr{F}_i)\}$.

Entsprechend ist $(\bigcap \mathscr{C}_i, \mathrm{d_r\,d_l}(\bigcup \mathscr{F}_i))$ das Supremum dieser Familie.

Eine unmittelbare Folgerung von Satz 3 ist:

**Korollar.** *Die regulären D-Paare bilden einen vollständigen Unterverband im Verband aller D-Paare.*

*Beweis.* Ist die Familie $\{(\mathscr{C}_i, \mathscr{F}_i)\}$ gegeben und sind die Klassen $\mathscr{F}_i$ anfangsvererblich, so ist auch $\bigcap \mathscr{F}_i$ anfangsvererblich. Das Infimum regulärer D-Paare ist daher regulär. Durch Dualisieren erhält man die Aussage, daß das Supremum regulärer D-Paare regulär ist.

## 4. Reflexive Unterkategorien

Wir setzen im folgenden voraus, daß die Kategorie $\mathscr{K}$ endliche Limites und endliche Colimites besitzt. Insbesondere gibt es also in $\mathscr{K}$ ein Anfangsobjekt $\circledS$ und ein Endobjekt $\ominus$.

Wir wollen zeigen, daß die reflexiven Unterkategorien der Kategorie $\mathscr{K}$ gewissen regulären D-Paaren entsprechen. Dabei verstehen wir unter einer reflexiven Unterkategorie eine volle Unterkategorie $\mathscr{L}$, die mit jedem Objekt $X$ alle zu $X$ isomorphen Objekte enthält, und für die der Inklusionsfunktor $U\colon \mathscr{L}\to\mathscr{K}$ adjungiert zu einem Funktor $R\colon \mathscr{K}\to\mathscr{L}$ ist.

Bezeichnen wir mit $\mathscr{I}$ die Klasse der Isomorphismen von $\mathscr{L}$, so folgt aus dem Dualen des Adjunktionssatzes, daß

$$(R^{-1}\mathscr{I}, \mathrm{d_r\,d_l}(\mathscr{L}^U))$$

ein D-Paar in $\mathscr{K}$ ist.

Solche D-Paare haben zwei charakteristische Eigenschaften:

(a) Liegen zwei der drei Morphismen von $a=a_1 a_2$ in $R^{-1}\mathscr{I}$, so liegt auch der dritte in $R^{-1}\mathscr{I}$. $R^{-1}\mathscr{I}$ ist also anfangs- und endvererblich.

D-Paare $(\mathscr{C},\mathscr{F})$, deren Co-D-Klasse $\mathscr{C}$ anfangs- und endvererblich ist, nennen wir *reflexiv*.

Aus Satz 3 folgt, daß reflexive D-Paare regulär sind.

(b) Zu jedem Objekt $X$ gibt es einen Morphismus $x\colon X\to X^{RU}$ in $R^{-1}\mathscr{I}$, nämlich die durch die Adjunktion gegebene kanonische Abbildung. Es ist klar, daß der Morphismus $X^{RU}\to\ominus$ zu $\mathrm{d_r\,d_l}(\mathscr{L}^U)$ gehört.

Ist nun $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ ein beliebiges D-Paar, so nennen wir die Objekte $F$, für die $F\to\ominus$ in $\mathscr{F}$ liegt, $\mathscr{F}$-Objekte und bezeichnen die Klasse der $\mathscr{F}$-Objekte mit $\mathscr{F}_0$. Wir sagen, daß es *genügend $\mathscr{F}$-Objekte* gibt, wenn es zu jedem Objekt $X$ aus $\mathscr{K}$ einen Morphismus $x\colon X\to X'$ in $\mathscr{C}$ gibt, wobei $X'$ $\mathscr{F}$-Objekt ist.

Wir haben jeder reflexiven Unterkategorie ein reflexives D-Paar mit genügend $\mathscr{F}$-Objekten zugeordnet. Umgekehrt gilt:

**Lemma 8.** *$(\mathscr{C},\mathscr{F})$ sei ein reguläres D-Paar. Dann liegt die volle Unterkategorie $\langle\mathscr{F}_0\rangle$ der $\mathscr{F}$-Objekte ganz in $\mathscr{F}$. Gibt es genügend $\mathscr{F}$-Objekte, so ist $\langle\mathscr{F}_0\rangle$ eine reflexive Unterkategorie.*

*Beweis.* $E$ und $F$ seien zwei $\mathscr{F}$-Objekte, $a\colon E\to F$ ein beliebiger Morphismus. Bezeichnen wir mit $e$ und $f$ die Morphismen $e\colon E\to\ominus$, $f\colon F\to\ominus$, so ist $af=e$. Da nach Voraussetzung $e$ und $f$ zu $\mathscr{F}$ gehören und $\mathscr{F}$ nach Satz 3 anfangsvererblich ist, liegt auch $a$ in $\mathscr{F}$. Gibt es genügend $\mathscr{F}$-Objekte, so gibt es zu jedem Objekt $X$ einen Morphismus $x\colon X\to X'$ in $\mathscr{C}$, wobei $X'$ $\mathscr{F}$-Objekt ist. Wir zeigen, daß sich jeder Morphismus $a\colon X\to Y$, dessen Ziel ein $\mathscr{F}$-Objekt ist, eindeutig durch $x$ faktorisieren läßt. Zum Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & Y \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & \ominus \end{array} \qquad (+)$$

existiert eine Diagonale, da $x \in \mathscr{C}$ und $Y$ ein $\mathscr{F}$-Objekt ist. Also läßt sich $a$ durch $x$ faktorisieren. Sind $d$ und $d'$ zwei Morphismen mit

$$xd = a = xd',$$

so sind $d$ und $d'$ zwei Diagonalen des Diagramms $(+)$ und wegen der Regularität von $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ folgt $d = d'$. Es ist klar, daß $\mathscr{F}_0$ mit einem Objekt alle dazu isomorphen Objekte enthält. Also ist $\langle \mathscr{F}_0 \rangle$ reflexive Unterkategorie.

Zu einer reflexiven Unterkategorie $\mathscr{L}$ wird es im allgemeinen mehrere reguläre D-Paare mit genügend $\mathscr{F}$-Objekten geben, für die $\mathscr{L} = \langle \mathscr{F}_0 \rangle$ gilt. Ist zum Beispiel $\mathscr{K}$ eine abelsche Kategorie, $\mathscr{E}$ die Klasse der Epimorphismen, $\mathscr{M}$ die der Monomorphismen und $\mathscr{I}$ die Klasse der Isomorphismen, so sind $(\mathscr{K}, \mathscr{I})$ und $(\mathscr{E}, \mathscr{M})$ beides reguläre D-Paare mit genügend $\mathscr{F}$-Objekten, und für beide D-Paare ist $\langle \mathscr{F}_0)$ die volle Unterkategorie der Nullobjekte. Der nächste Satz zeigt jedoch, daß es zu einer reflexiven Unterkategorie nur ein reflexives D-Paar mit diesen Eigenschaften geben kann.

**Satz 4.** *Die Kategorie $\mathscr{K}$ besitze endliche Limites und endliche Colimites. Es entsprechen sich die reflexiven Unterkategorien $\mathscr{L}$ von $\mathscr{K}$ und die reflexiven D-Paare $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ mit genügend $\mathscr{F}$-Objekte bijektiv, wenn man der reflexiven Unterkategorie $\mathscr{L}$ das D-Paar* $(\mathrm{d_l}\,\mathscr{L}, \mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L})$ *und dem reflexiven D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ die volle Unterkategorie der $\mathscr{F}$-Objekte zuordnet.*

*Beweis.* (a) Ist $\mathscr{L}$ reflexive Unterkategorie, $R\colon \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ coadjungiert zur Inklusion $U\colon \mathscr{L} \to \mathscr{K}$, so haben wir gesehen, daß $(R^{-1}\mathscr{I}, \mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L})$ ein reflexives D-Paar mit genügend $\mathscr{F}$-Objekten ist. Zur D-Klasse $\mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L}$ gehört aber die Co-D-Klasse $\mathrm{d_l}\,\mathscr{L}$, also ist $\mathrm{d_l}\,\mathscr{L}$ gerade die Klasse $R^{-1}\mathscr{I}$.

(b) Da reflexive D-Paare regulär sind, folgt aus Lemma 8, daß für reflexive D-Paare $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ mit genügend $\mathscr{F}$-Objekten die Unterkategorie $\langle \mathscr{F}_0 \rangle$ eine reflexive Unterkategorie ist.

Es bleibt zu zeigen, daß diese Zuordnungen zueinander invers sind.

(c) Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ reflexiv mit genügend $\mathscr{F}$-Objekten, so ist

$$\mathrm{d_l}\langle \mathscr{F}_0 \rangle = \mathscr{C}.$$

Aus Lemma 8 folgt $\mathscr{C} \subseteq \mathrm{d_l}\langle \mathscr{F}_0 \rangle$. Sei umgekehrt $c\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathrm{d_l}\langle \mathscr{F}_0 \rangle$.

Zu $X$ und $Y$ gibt es Morphismen

$$x\colon X \to X' \quad \text{und} \quad y\colon Y \to Y'$$

in $\mathscr{C}$, wobei $X'$ und $Y'$ $\mathscr{F}$-Objekte sind. Zum Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{cy} & Y' \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & \ominus \end{array}$$

gibt es wegen $x \in \mathscr{C}$, $Y' \in \mathscr{F}_0$ eine Diagonale $d$ mit

$$x d = c y. \tag{++}$$

In (b) wurde gezeigt, daß $\langle \mathscr{F}_0 \rangle$ reflexive Unterkategorie ist, also folgt aus (a), daß $(\mathrm{d_l}\langle \mathscr{F}_0 \rangle, \mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\langle \mathscr{F}_0 \rangle)$ ein reflexives D-Paar ist, insbesondere also, daß die Klasse $\mathrm{d_l}\langle \mathscr{F}_0 \rangle$ endvererblich ist. $x$ und $y$ liegen in $\mathscr{C} \subseteq \mathrm{d_l}\langle \mathscr{F}_0 \rangle$, $c$ liegt nach Voraussetzung in $\mathrm{d_l}\langle \mathscr{F}_0 \rangle$, also liegt mit $x$ und $c y$ auch $d$ in $\mathrm{d_l}\langle \mathscr{F}_0 \rangle$, denn es gilt ja die Gleichung (++). Andererseits ist aber $d$ ein Morphismus in $\langle \mathscr{F}_0 \rangle$, nach Lemma 1 muß $d$ daher ein Isomorphismus sein.

Als Isomorphismus liegt $d$ in $\mathscr{C}$, $x$ und $y$ liegen ebenfalls in $\mathscr{C}$. Da $\mathscr{C}$ anfangsvererblich ist, liegt mit $x d$ und $y$ wegen der Gleichung (++) auch $c$ in $\mathscr{C}$.

(c′) Gehen wir von einem reflexiven D-Paar mit genügend $\mathscr{F}$-Objekten aus, so ordnen wir ihm die reflexive Unterkategorie $\langle \mathscr{F}_0 \rangle$ zu und dieser dann das D-Paar $(\mathrm{d_l}\langle \mathscr{F}_0 \rangle, \mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\langle \mathscr{F}_0 \rangle)$. Aus (c) folgt, daß dies gerade wieder das D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ist.

(d) Ist $\mathscr{L}$ reflexive Unterkategorie, so liegen alle Objekte aus $(\mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L})_0$ in $\mathscr{L}$.

Sei $X$ Objekt in $(\mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L})_0$. Da $\mathscr{L}$ reflexive Unterkategorie ist, gibt es einen Morphismus $x\colon X \to X'$ in $\mathrm{d_l}\,\mathscr{L}$, wobei $X'$ zu $\mathscr{L}$ gehört. Zum Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1"] \arrow[d, "x"'] & X \arrow[d] \\ X' \arrow[r] & \oslash \end{tikzcd}$$

gibt es wegen $x \in \mathrm{d_l}\,\mathscr{L}$, $X \in (\mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L})_0$ eine Diagonale $d$. $d$ liegt in $\langle(\mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L})_0\rangle$, also wegen der Regularität von $(\mathrm{d_l}\,\mathscr{L}, \mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L})$ auch in $\mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L}$ (Lemma 8).

$x$ und $1$ liegen in $\mathrm{d_l}\,\mathscr{L}$. Da $\mathrm{d_l}\,\mathscr{L}$ endvererblich ist, liegt wegen $x d = 1$ auch $d$ in $\mathrm{d_l}\,\mathscr{L}$.

Nach Lemma 1 folgt wieder, daß $d$ ein Isomorphismus ist, also gehört mit $X'$ auch $X$ zu $\mathscr{L}$.

(d′) Der reflexiven Unterkategorie $\mathscr{L}$ von $\mathscr{K}$ wird das D-Paar $(\mathrm{d_l}\,\mathscr{L}, \mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L})$ und diesem die Unterkategorie $\langle(\mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L})_0\rangle$ zugeordnet.

Einerseits liegen alle Objekte aus $\mathscr{L}$ in $(\mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L})_0$, also ist

$$\mathscr{L} \subseteq \langle(\mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L})_0\rangle,$$

andererseits haben wir in (d) gezeigt, daß die Objekte aus $(\mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L})_0$ zu $\mathscr{L}$ gehören, und da $\mathscr{L}$ volle Unterkategorie ist, gilt auch

$$\langle(\mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L})_0\rangle \subseteq \mathscr{L}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Ein Verfahren zur Konstruktion reflexiver D-Paare liefert das folgende Lemma:

**Lemma 9.** *Sei $\mathscr{V}$ eine volle Unterkategorie von $\mathscr{K}$, und $\mathscr{V}$ enthalte das Endobjekt $\ominus$. Dann ist $\mathrm{e}_1\mathscr{V}$ die Co-D-Klasse eines reflexiven D-Paares.*

*Beweis.* Wegen Lemma 7 genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{e}_1\mathscr{V}$ anfangsvererblich ist. Sei also $z = z_1 z_2$ und $z, z_2 \in \mathrm{e}_1\mathscr{V}$. Wir betrachten die Gleichung

$$z_1 b = a v$$

mit $v\colon V \to W$ in $\mathscr{V}$.

Nach Voraussetzung liegt mit $W$ auch der Morphismus $W \to \ominus$ in $\mathscr{V}$, also gibt es zum Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "b"] \arrow[d, "z_2"'] & W \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r] & \ominus \end{tikzcd}$$

eine Diagonale $s$, für die also

$$z_2 s = b$$

gilt. Es ist $z_1 z_2 \in \mathrm{d}_1\mathscr{V}$, $v \in \mathscr{V}$, also gibt es zur Gleichung

$$(z_1 z_2)\, s = z_1 b = a v$$

eine Diagonale $t$, und diese erfüllt die Gleichungen

$$z_1 z_2 t = a \quad \text{und} \quad t v = s.$$

Setzen wir also $d = z_2 t$, so ist dies eine Diagonale unserer Ausgangsgleichung. Daher liegt $z_1$ in $\mathrm{d}_1\mathscr{V}$.

Ist $d'$ eine zweite Diagonale der Ausgangsgleichung, so ist

$$z_2 s = b = d' v,$$

und wegen $z_2 \in \mathrm{d}_1\mathscr{V}$, $v \in \mathscr{V}$ gibt es $t'$ mit

$$z_2 t = d' \quad \text{und} \quad t' v = s.$$

Wir haben also

$$(z_1 z_2)\, t = a = z_1 d' = (z_1 z_2)\, t'$$

und

$$t v = s = t' v.$$

Nun liegt $z_1 z_2$ in $\mathrm{e}_1\mathscr{V}$, also ist $(v, z_1 z_2)$ eindeutig diagonalisierbar und es gilt $t = t'$. Dann ist aber auch

$$d = z_2 t = z_2 t' = d',$$

und damit ist $(v, z_1)$ eindeutig diagonalisierbar.

## Literatur

1. Bauer, F. W., Dugundji, J.: Categorical homotopy and fibrations. Trans. Amer. Math. Soc. **140**, 239–256 (1969).
2. Eilenberg, S., Moore, J. C.: Foundations of relative homological algebra. Mem. Amer. Math. Soc. 55 (1965).
3. Gabriel, P.: Des categories abeliennes. Bull. Soc. Math. France **90**, 323–448 (1962).
4. – and Zisman, M.: Calculus of fractions and homotopy theory. Ergebnisse der Math. 35. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
5. Isbell, J. R.: Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras. Rozprawy Mat. **XXXVI**, 1964.
6. Kennison, J. F.: Full reflective subcategories and generalized covering spaces. Illinois J. Math. **12**, 353–365 (1968).
7. Lambek, J.: Completion of categories. Lecture Notes 24. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.
8. Mitchell, B.: Theory of categories. New York: Academic Press 1965.
9. Quillen, D. G.: Homotopical algebra. Lecture Notes 43. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
10. Ringel, C. M.: Faserungen und Homotopie in Kategorien. In Vorbereitung.

Claus Micheal Ringel
Mathematisches Institut der Universität
74 Tübingen, Wilhelmstraße 7

*(Eingegangen am 16. Juni 1970)*