Math. Z. 122, 10–32 (1971)

Diagonalisierungspaare. II

CLAUS MICHAEL RINGEL

Diese Arbeit schließt unmittelbar an [8] an, die Abschnitte und Sätze sind daher fortlaufend numeriert.

Ist $\mathscr{K}$ eine Kategorie mit Nullobjekt, so sei $\mathrm{l}\mathscr{Q}$ der Linksannulator der Objektklasse $\mathscr{Q}$ (also die Klasse aller Objekte P, für die jeder Morphismus $P \to Q$ mit $Q \in \mathscr{Q}$ trivial ist), entsprechend sei $\mathrm{r}\mathscr{P}$ der Rechtsannulator der Objektklasse $\mathscr{P}$. Lambek [6] hat Eigenschaften der Paare $(\mathscr{P}, \mathscr{Q})$ von Objektklassen in Modulkategorien angegeben, die die Gleichungen

$$\mathscr{P} = \mathrm{l}\mathscr{Q} \quad \text{und} \quad \mathrm{r}\mathscr{P} = \mathscr{Q}$$

erfüllen. Wir zeigen, daß es genau ein D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ gibt, für das $\mathscr{P}$ die Klasse der $\mathscr{C}$-Objekte, und $\mathscr{Q}$ die der $\mathscr{F}$-Objekte ist. Dieses D-Paar ist reflexiv und coreflexiv und jeder Morphismus g der Kategorie besitzt eine (bis auf Isomorphie eindeutige) Zerlegung $g = cf$ mit $c \in \mathscr{C}$ und $f \in \mathscr{F}$. Umgekehrt haben alle D-Paare, die gleichzeitig reflexiv und coreflexiv sind, diese Gestalt.

Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein reflexives D-Paar mit genügend $\mathscr{F}$-Objekten in einer Kategorie mit endlichen Limites, endlichen Colimites und einem Nullobjekt, so kann man sich auf die volle Unterkategorie $\mathscr{L}$ der Objekte in $\mathrm{r}(\mathscr{C}_0)$ beschränken: $(\mathscr{C} \cap \mathscr{L}, \mathscr{F} \cap \mathscr{L})$ ist wieder ein reflexives D-Paar (nun in $\mathscr{L}$), durch das $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ in kanonischer Weise bestimmt ist. Dieses D-Paar $(\mathscr{C} \cap \mathscr{L}, \mathscr{F} \cap \mathscr{L})$ hat aber zusätzlich die Eigenschaft, daß es keine (nicht trivialen) $\mathscr{F} \cap \mathscr{L}$-Objekte gibt. In additiven Kategorien folgt daraus, daß $\mathscr{C} \cap \mathscr{L}$ nur wesentliche Epimorphismen von $\mathscr{L}$ enthält.

Wir beschäftigen uns daher in Abschnitt 8 mit D-Paaren $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$, bei denen $\mathscr{C}$ nur Epimorphismen enthält. Existieren außerdem noch für alle Morphismen g Zerlegungen $g = cf$ mit $c \in \mathscr{C}$ und $f \in \mathscr{F}$, so ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ gerade eine Rechtsbikategorie im Sinne von Kennison [5]. Die Existenz von Zerlegungen braucht in gewissen Kategorien nicht vorausgesetzt zu werden, denn Kennison hat gezeigt, daß in lokal kleinen Kategorien mit beliebigen Colimites jedes solche D-Paar Zerlegungen besitzt. Wir folgern daraus dann ein Kriterium, wann ein D-Paar genügend $\mathscr{C}$-Objekte oder genügend $\mathscr{F}$-Objekte besitzt. Insbesondere zeigen wir, daß in solchen Kategorien alle reflexiven D-Paare genügend $\mathscr{C}$-Objekte besitzen.

Im letzten Abschnitt wird mit den hier entwickelten Methoden die Frage nach der Existenz reflexiver Unterkategorien in Modulkategorien untersucht. Dabei ergibt sich, daß jede Objektklasse $\mathscr{Y}$, für die $\mathrm{l}\mathscr{Y}$ subobjektvererblich ist, in einer kleinsten reflexiven Unterkategorie liegt. Insbesondere liegt jede

Klasse injektiver Objekte in einer kleinsten reflexiven Unterkategorie und man erhält auf diese Weise die Lokalisierungen im Sinne von Gabriel [2] (siehe auch [6]). Die reflexiven Unterkategorien $\mathscr{L}$, für die $\mathscr{P}=1|\mathscr{L}|$ eine fest vorgegebene subobjektvererbliche Objektklasse ist, und die alle injektiven Objekte aus $r\mathscr{P}$ enthalten, bilden einen vollständigen Verband mit Eins (nämlich die volle Unterkategorie der Objekte in $r\mathscr{P}$) und Null (die Lokalisierung $\mathscr{X}/\mathscr{P}$).

5. Annulatorpaare

Wir setzen voraus, daß $\mathscr{X}$ eine Kategorie mit endlichen Limites, endlichen Colimites und einem Nullobjekt ist[1].

Ist $\mathscr{P}$ eine Klasse von Objekten der Kategorie $\mathscr{X}$, so bezeichnen wir mit $r\mathscr{P}$ den Rechtsannullator von $\mathscr{P}$. $r\mathscr{P}$ ist die Klasse derjenigen Objekte X, für die für jedes $P\in\mathscr{P}$ die Menge $\mathscr{X}(P,X)$ nur ein Element, nämlich die Nullabbildung, enthält. Entsprechend ist $1\mathscr{P}$ der *Linksannullator* von $\mathscr{P}$ (hier ist $\mathscr{X}(X,P)=0$ für alle $P\in\mathscr{P}$).

Wir haben für ein festes D-Paar $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ das Objekt X ein $\mathscr{F}$-Objekt genannt, wenn der Morphismus $X\to O$ zu $\mathscr{F}$ gehört. Entsprechend heißt X $\mathscr{C}$-Objekt, wenn $O\to X$ zu $\mathscr{C}$ gehört. $\mathscr{C}_0$ sei die Klasse der $\mathscr{C}$-Objekte, $\mathscr{F}_0$ die der $\mathscr{F}$-Objekte.

Lemma 10. *$(\mathscr{C},\mathscr{F})$ sei ein D-Paar.*

(a) *$1(\mathscr{F}_0)$ ist die Klasse der Objekte X mit $X\to O$ in $\mathscr{C}$.*

(b) *Ist $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ regulär, so ist $\mathscr{C}_0\subseteq 1(\mathscr{F}_0)$.*

(c) *Ist $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ reflexiv, so ist $\mathscr{C}_0=1(\mathscr{F}_0)$.*

Beweis. (a) Um zu zeigen, daß $X\to O$ zu $\mathscr{C}$ gehört, genügt nach Lemma 3 der Nachweis, daß sich alle Diagramme der Form

$$(+)\qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ O & \xrightarrow{1} & O \end{array}$$

mit $F\in\mathscr{F}_0$ diagonalisieren lassen. Liegt X in $1(\mathscr{F}_0)$, so muß $a=0$ gelten, also gibt es in (+) wirklich eine Diagonale.

Ist umgekehrt $X\to O$ in $\mathscr{C}$ und $a\colon X\to F$ mit $F\in\mathscr{F}_0$ beliebig, so gibt es im Diagramm (+) eine Diagonale, das heißt aber, daß sich a durch O faktorisieren läßt, also $a=0$.

(b) Ist $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ regulär, so ist nach Satz 3 die Klasse $\mathscr{C}$ endvererblich. Liegt X in $\mathscr{C}_0$, so gehört mit $O\to X$ und $O\to O$ auch der Morphismus $X\to O$ zu $\mathscr{C}$. Aus (a) folgt daher die Behauptung.

(c) Da reflexive D-Paare regulär sind, gilt $\mathscr{C}_0\subseteq 1(\mathscr{F}_0)$. Ist $X\in 1(\mathscr{F}_0)$, so gehört $X\to O$ zu $\mathscr{C}$ (a). Da nach Definition $\mathscr{C}$ anfangsvererblich ist, liegt mit $X\to O$ und $O\to O$ auch $O\to X$ in $\mathscr{C}$; X ist also $\mathscr{C}$-Objekt.

[1] Ein Objekt O ist Nullobjekt, wenn O gleichzeitig Anfangs- und Endobjekt ist.

Wir betrachten nun reguläre D-Paare $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$, für die die beiden Gleichungen

$$\mathscr{F}_0 = \mathrm{r}(\mathscr{C}_0) \quad \text{und} \quad \mathscr{C}_0 = \mathrm{l}(\mathscr{F}_0)$$

gelten. Solche D-Paare nennen wir *Annullatorpaare.*

Nicht jedes reflexive D-Paar ist ein Annullatorpaar. Zwar haben wir in Lemma 10 gesehen, daß reflexive D-Paare immer die Gleichung $\mathscr{C}_0 = \mathrm{l}(\mathscr{F}_0)$ erfüllen, die Klasse $\mathrm{r}(\mathscr{C}_0)$ kann aber echt größer als $\mathscr{F}_0$ sein: In der Kategorie der vollständig regulären Räume mit Basispunkt ist die volle Unterkategorie der kompakten Räume eine reflexive Unterkategorie. Für das zugehörige D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ist $\mathscr{F}_0$ gerade die Klasse der kompakten Räume. Da sich jeder vollständig reguläre Raum in einen kompakten Raum einbetten läßt, besteht $\mathscr{C}_0$ nur aus Nullobjekten, und daher ist $\mathrm{r}(\mathscr{C}_0)$ die Klasse aller Objekte der Kategorie.

Der folgende Satz charakterisiert die Annullatorpaare einer Kategorie und gibt ein Konstruktionsverfahren für Annullatorpaare $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$, die für eine vorgegebene Objektklasse $\mathscr{P}$ die Gleichung $\mathscr{F}_0 = \mathrm{r}\mathscr{P}$ erfüllen. Insbesondere wird gezeigt, daß es stets solche Annullatorpaare gibt, die gleichzeitig reflexiv sind.

Satz 5. *Die Kategorie $\mathscr{K}$ besitze endliche Limites und endliche Colimites, außerdem ein Nullobjekt. $\mathscr{P}$ sei eine Klasse von Objekten. Dann gilt:*

(a) *Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein Annullatorpaar mit $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{C}_0$ und $\mathrm{r}\mathscr{P} \subseteq \mathscr{F}_0$, so gilt*

$$(+) \qquad \mathrm{lr}\mathscr{P} = \mathscr{C}_0 \quad \textit{und} \quad \mathrm{r}\mathscr{P} = \mathscr{F}_0.$$

(b) *Es gibt ein reflexives Annullatorpaar $(\mathscr{C}', \mathscr{F}')$ mit $(+)$ und ein coreflexives*[2] *Annullatorpaar $(\mathscr{C}'', \mathscr{F}'')$ mit $(+)$.*

(c) *Ein reguläres D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ist genau dann ein Annullatorpaar mit $(+)$, wenn im Verband der D-Paare die Beziehung*

$$(\mathscr{C}', \mathscr{F}') \leqq (\mathscr{C}, \mathscr{F}) \leqq (\mathscr{C}'', \mathscr{F}'')$$

gilt.

Beweis. Die Aussage (a) ergibt sich unmittelbar aus den Eigenschaften der Operatoren l und r.

Um (b) zu beweisen, setzen wir

$$(\mathscr{C}', \mathscr{F}') = (\mathrm{e_l}\langle \mathrm{r}\mathscr{P}\rangle, \mathrm{e_r}\,\mathrm{e_l}\langle \mathrm{r}\mathscr{P}\rangle),$$
$$(\mathscr{C}'', \mathscr{F}'') = (\mathrm{e_l}\,\mathrm{e_r}\langle \mathrm{lr}\mathscr{P}\rangle, \mathrm{e_r}\langle \mathrm{lr}\mathscr{P}\rangle).$$

Nach Satz 2 sind dies reguläre D-Paare, nach Lemma 9 ist $(\mathscr{C}', \mathscr{F}')$ reflexiv, entsprechend ist $(\mathscr{C}'', \mathscr{F}'')$ coreflexiv. Wir zeigen als erstes:

$$(1) \qquad \langle \mathrm{r}\mathscr{P}\rangle \subseteq \mathrm{e_r}\langle \mathrm{lr}\mathscr{P}\rangle.$$

[2] „Coreflexiv" ist der zu „reflexiv" duale Begriff. $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ist coreflexiv, wenn $\mathscr{F}$ anfangs- und endvererblich ist.

Sei nämlich $f\colon Q \to Q'$ aus $\langle \mathrm{r}\mathscr{P}\rangle$, $c\colon P \to P'$ aus $\langle \mathrm{lr}\mathscr{P}\rangle$, und das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] & Q \arrow[d, "f"] \\ P' \arrow[r, "b"'] & Q'. \end{tikzcd}$$

Da Q Objekt in $\mathrm{r}\mathscr{P}$, P Objekt in $\mathrm{lr}\mathscr{P}$ ist, folgt $a=0$. Entsprechend ist auch $b=0$, also ist $d=0$ eine Diagonale des Diagramms. Für jede Diagonale muß aber die Gleichung $d=0$ gelten, denn $P'\in\mathrm{lr}\mathscr{P}$, $Q\in\mathrm{r}\mathscr{P}$. Daher ist (c,f) eindeutig diagonalisierbar.

(2) $(\mathscr{C}'', \mathscr{F}'')$ ist Annullatorpaar mit $(+)$.

Aus (1) folgt die Inklusion $\mathrm{r}\mathscr{P}\subseteq\mathscr{F}_0''$, und daraus folgt

$$\mathrm{l}(\mathscr{F}_0'')\subseteq\mathrm{lr}\mathscr{P}\subseteq(\mathrm{e_l}\,\mathrm{e_r}\langle\mathrm{lr}\mathscr{P}\rangle)_0=\mathscr{C}_0'',$$

dies ist aber die gesuchte Ungleichung, denn die umgekehrte Inklusion folgt schon aus Lemma 10(b). Es ist klar, daß $\mathscr{P}$ in $\mathrm{lr}\mathscr{P}$, also auch in $\mathscr{C}_0''$, und $\mathrm{r}\mathscr{P}$ wegen (1) in $\mathscr{F}_0''$ liegt. Aus (a) folgt daher $(+)$.

(3) Durch Dualisieren erhält man die Aussage, daß $(\mathscr{C}', \mathscr{F}')$ ein Annullatorpaar ist, das $(+)$ erfüllt.

(c) Sei nun $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein D-Paar mit

$$(\mathscr{C}', \mathscr{F}')\leqq(\mathscr{C}, \mathscr{F})\leqq(\mathscr{C}'', \mathscr{F}'').$$

Dann ist

$$\mathrm{r}\mathscr{P}=\mathscr{F}_0'\subseteq\mathscr{F}_0\subseteq\mathscr{F}_0''=\mathrm{r}\mathscr{P},$$

$$\mathrm{lr}\mathscr{P}=\mathscr{C}_0''\subseteq\mathscr{C}_0\subseteq\mathscr{C}_0'=\mathrm{lr}\mathscr{P},$$

und daraus erhalten wir sofort die Gleichungen

$$\mathrm{lr}\mathscr{P}=\mathscr{C}_0=\mathrm{l}\,\mathscr{F}_0 \quad \text{und} \quad \mathrm{r}\mathscr{P}=\mathscr{F}_0=\mathrm{r}\,\mathscr{C}_0.$$

Ist umgekehrt $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein Annullatorpaar mit $(+)$, so folgt aus der Regularität wegen Lemma 8

$$\langle\mathrm{lr}\mathscr{P}\rangle=\langle\mathscr{C}_0\rangle\subseteq\mathscr{C},$$

also

$$\mathscr{F}=\mathrm{e_r}\,\mathscr{C}\subseteq\mathrm{e_r}\langle\mathrm{lr}\mathscr{P}\rangle=\mathscr{F}''.$$

Dabei haben wir wieder verwendet, daß $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ regulär ist. Damit gilt also

$$(\mathscr{C}, \mathscr{F})\leqq(\mathscr{C}'', \mathscr{F}'').$$

Entsprechend zeigt man die zweite Relation. Damit ist der Satz bewiesen.

Dieser Satz gestattet es nun, Beispiele von Annullatorpaaren anzugeben:

In der Kategorie der topologischen Räume mit Basispunkt bezeichnen wir mit $\mathscr{P}$ die Klasse der zusammenhängenden Räume. Dann ist $(\mathrm{e_l}\,\mathrm{e_r}\langle\mathscr{P}\rangle, \mathrm{e_r}\langle\mathscr{P}\rangle)$ ein Annullatorpaar und $\mathrm{e_r}\langle\mathscr{P}\rangle$ enthält die volle Unterkategorie der diskreten Räume.

In der Kategorie der abelschen Gruppen gilt für die Klasse $\mathscr{P}$ der Torsionsgruppen und die Klasse $\mathscr{Q}$ der torsionsfreien Gruppen

$$\mathscr{P} = \mathrm{l}\,\mathscr{Q}, \qquad \mathscr{Q} = \mathrm{r}\,\mathscr{P}.$$

Es gibt daher ein Annullatorpaar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$, so daß $\mathscr{C}$ die volle Unterkategorie der Torsionsgruppen, $\mathscr{F}$ die volle Unterkategorie der torsionsfreien Gruppen enthält. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ dadurch eindeutig bestimmt ist.

Weitere Beispiele erhält man, wenn man in der Kategorie der (nicht notwendig abelschen) Gruppen die Klasse $\mathscr{P}$ der Gruppen, die gleich ihrer Kommutatorgruppe sind, betrachtet (hier ist $\mathscr{P} = \mathrm{lr}\,\mathscr{P}$), oder wenn man verschiedene Radikalbegriffe der Ringtheorie untersucht.

6. Abelsche Kategorien

Um zu entscheiden, ob ein vorgegebenes D-Paar regulär ist, genügt in abelschen Kategorien die Kenntnis der $\mathscr{C}$-Objekte und der $\mathscr{F}$-Objekte. Es gilt nämlich:

Satz 6. *$\mathscr{K}$ sei eine abelsche Kategorie. Das D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ist genau dann regulär, wenn $\mathscr{C}_0 \subseteq \mathrm{l}(\mathscr{F}_0)$ gilt.*

Beweis. Daß aus der Regularität die Inklusion $\mathscr{C}_0 \subseteq \mathrm{l}(\mathscr{F}_0)$ folgt, haben wir in Lemma 10 notiert. Sei nun umgekehrt $\mathscr{C}_0 \subseteq \mathrm{l}(\mathscr{F}_0)$.

Wir zeigen, daß die Bedingung (ii)* von Satz 3 erfüllt ist. Ist $u\colon A \to X$ eine Coretraktion, also $ur = 1$ für ein r, und ist B der Cokern von u, so gibt es einen Isomorphismus φ, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{r} & A \\ {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ A & \xrightarrow[i_A]{} & A \oplus B & \xrightarrow[p_A]{} & A, \end{array}$$

dabei sei i_A die kanonische Inklusion, p_A die kanonische Projektion.

Gehört u zu $\mathscr{C}$, so liegt der Cokern B von u in $\mathscr{C}_0$, es ist aber

$$\mathscr{C}_0 \subseteq \mathrm{l}(\mathscr{F}_0) = \{X \mid X \to O \text{ in } \mathscr{C}\}$$

nach Lemma 10. Daher wissen wir, daß der Morphismus $B \to O$ zu $\mathscr{C}$ gehört.

Der Morphismus p_A ist isomorph zu $1_A \oplus (B \to O)$, nach Lemma 2 gehört auch p_A und damit auch r zu $\mathscr{C}$.

Korollar. *Sei $\mathscr{K}$ abelsch. Gibt es genügend $\mathscr{C}$-Objekte oder genügend $\mathscr{F}$-Objekte*[3]*, so ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ genau dann regulär, wenn $\mathscr{C}_0 \cap \mathscr{F}_0 = O$ gilt.*

Beweis. Wir zeigen, daß aus $\mathscr{C}_0 \cap \mathscr{F}_0 = O$ die Inklusion $\mathscr{C}_0 \subseteq \mathrm{l}(\mathscr{F}_0)$ folgt.

[3] Wir sagten, daß es genügend $\mathscr{F}$-Objekte gibt, wenn es zu jedem Objekt X einen Morphismus $X \to X'$ in $\mathscr{C}$ gibt, wobei X' ein $\mathscr{F}$-Objekt ist. Entsprechend gibt es genügend $\mathscr{C}$-Objekte, wenn es zu jedem X einen Morphismus $X' \to X$ in $\mathscr{F}$ gibt, derart, daß X' ein $\mathscr{C}$-Objekt ist.

Sei nun X Objekt aus $\mathscr{C}_0$. Gibt es genügend $\mathscr{C}$-Objekte, so existiert ein Morphismus $X \to X'$ in $\mathscr{C}$, wobei X' ein $\mathscr{F}$-Objekt ist. Da $O \to X$ und $X \to X'$ zu $\mathscr{C}$ gehören, ist X' auch $\mathscr{C}$-Objekt, und liegt daher in $\mathscr{C}_0 \cap \mathscr{F}_0 = O$. Damit ist gezeigt, daß der Morphismus $X \to O$ zu $\mathscr{C}$ gehört. Nach Lemma 10 besagt dies gerade $X \in \mathrm{l}(\mathscr{F}_0)$.

Aus Satz 6 folgt insbesondere, daß man in abelschen Kategorien bei der Definition von Annullatorpaaren auf die Forderung der Regularität verzichten kann. Schon aus einer der beiden Gleichungen $\mathscr{F}_0 = \mathrm{r}(\mathscr{C}_0)$ und $\mathscr{C}_0 = \mathrm{l}(\mathscr{F}_0)$ folgt, daß $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ regulär ist.

Wir brauchen das folgende Lemma:

Lemma 11. *Sei $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein Annullatorpaar. Ist die Sequenz*

$$O \longrightarrow X \xrightarrow{m} Y \xrightarrow{e} Z \longrightarrow O$$

exakt und ist X ein $\mathscr{C}$-Objekt, so ist Z genau dann ein $\mathscr{F}$-Objekt, wenn m zu $\mathscr{F}$ gehört.

Beweis. Sei $m \in \mathscr{F}$. Wir zeigen, daß Z in $\mathrm{r}(\mathscr{C}_0)$ liegt. Sei also $z\colon C \to Z$ mit $C \in \mathscr{C}_0$ beliebig. Wir bilden die induzierte exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] & X \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "1"] & P \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "z'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "z"] & O \\ O \arrow[r] & X \arrow[r, "m"'] & Y \arrow[r, "e"'] & Z \arrow[r] & O. \end{tikzcd}$$

Mit X und C liegt auch P in $\mathrm{l}(\mathscr{F}_0) = \mathscr{C}_0$, also gibt es zum Diagramm

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "m"] \\ P \arrow[r, "z'"'] & Y \end{tikzcd}$$

eine Diagonale d mit $dm = z'$. Es ist

$$e'z = z'e = dme = 0,$$

und da e (also auch e') ein Epimorphismus ist, folgt $z = 0$.

Ist umgekehrt Z ein $\mathscr{F}$-Objekt, so folgt aus der Regularität von $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$, daß $O \to Z$ zu $\mathscr{F}$ gehört. Der Morphismus m ist aber Pullback von $O \to Z$ und gehört daher ebenfalls zu $\mathscr{F}$. Als Folgerung erhalten wir:

Korollar. *$(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ sei ein Annullatorpaar. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gibt genügend $\mathscr{C}$-Objekte.*

(ii) *Zu jedem Objekt X gibt es eine exakte Sequenz*

$$O \longrightarrow C \xrightarrow{m} X \xrightarrow{e} F \longrightarrow O$$

mit $C \in \mathscr{C}_0$ und $F \in \mathscr{F}_0$.

(i)* *Es gibt genügend $\mathscr{F}$-Objekte.*

Zusatz: Gilt die Aussage (ii), so ist $m \in \mathscr{F}$, $c \in \mathscr{C}$.

Beweis. (ii) ist selbstdual, also brauchen wir nur die Äquivalenz von (i) und (ii) nachzuweisen.

Ist (i) erfüllt, so gibt es zu X einen Morphismus $m: C \to X$ in $\mathscr{F}$ mit $C \in \mathscr{C}_0$. Um zu zeigen, daß m ein Monomorphismus ist, bilden wir

$$m = pq,$$

$p: C \to D$ ein Epimorphismus, $q: D \to X$ ein Monomorphismus. Nach dem Korollar zu Lemma 2 liegt mit pq auch p in $\mathscr{F}$. D ist Quotientenobjekt von $C \in \mathrm{l}(\mathscr{F}_0)$, gehört daher selbst zu $\mathrm{l}(\mathscr{F}_0) = \mathscr{C}_0$. Nach Lemma 8 liegt p in $\langle \mathscr{C}_0 \rangle \subseteq \mathscr{C}$. Aus Lemma 1 folgt nun, daß p ein Isomorphismus ist, also ist m ein Monomorphismus. Ist e der Cokern von m, so besagt das Lemma 11, daß $F \in \mathscr{F}_0$ gilt.

Beweis des Zusatzes. Aus Lemma 11 folgt, daß m zu $\mathscr{F}$ gehört, aus dem Dualen von Lemma 11, daß e zu $\mathscr{C}$ gehört. Damit ist aber auch gezeigt, daß (ii) die Aussage (i) impliziert.

Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein D-Paar, so sagen wir, daß der Morphismus g eine *Zerlegung* besitzt, falls es Morphismen $c \in \mathscr{C}$ und $f \in \mathscr{F}$ gibt mit

$$g = cf.$$

Daß es genügend $\mathscr{F}$-Objekte gibt, besagt gerade, daß die Morphismen der Form $X \to O$ zerlegt werden können. Gibt es zu allen Morphismen der Kategorie Zerlegungen, so sprechen wir von einem *D-Paar mit Zerlegungen.*

Das folgende Lemma gilt in beliebigen Kategorien. Es besagt, daß ein D-Paar mit Zerlegungen schon durch die Morphismen, die in Zerlegungen auftreten, eindeutig bestimmt ist.

Lemma 12. *$(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ und $(\mathscr{C}', \mathscr{F}')$ seien D-Paare. Gibt es zu jedem Morphismus g zwei Morphismen $c \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$ und $f \in \mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ mit $g = cf$, so ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F}) = (\mathscr{C}', \mathscr{F}')$.*

Beweis. Wir zeigen $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$.

Sei $x \in \mathscr{F}$. Nach Voraussetzung gibt es zu x Morphismen $c \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$ und $f \in \mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$ mit $x = cf$. Zur Gleichung

$$cf = 1 \cdot x$$

gibt es wegen $c \in \mathscr{C}$, $x \in \mathscr{F}$ eine Diagonale r, also

$$cr = 1 \quad \text{und} \quad rx = f.$$

r ist Retraktion, also liegt nach dem Korollar zu Lemma 2 mit rx auch x in $\mathscr{F}'$.

Entsprechend gilt $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$.

In abelschen Kategorien lassen sich die Ergebnisse von Satz 5 verschärfen: Haben wir dort gesehen, daß Annullatorpaare $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ mit vorgegebenem $\mathscr{F}_0$ im Verband der D-Paare zwischen einem reflexiven und einem coreflexiven D-Paar liegen, so zeigt sich, daß hier diese beiden D-Paare zusammenfallen, falls es zu einem der beiden genügend $\mathscr{F}$-Objekte gibt:

Satz 7. *$\mathscr{K}$ sei eine abelsche Kategorie. $\mathscr{P}$ und $\mathscr{Q}$ seien Objektklassen mit $\mathscr{P} = \mathrm{l}\,\mathscr{Q}$, $\mathscr{Q} = \mathrm{r}\,\mathscr{P}$, und zu jedem Objekt X gebe es eine exakte Folge*

$$O \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow Q \longrightarrow O$$

mit $P \in \mathscr{P}$ und $Q \in \mathscr{Q}$.

Dann gibt es genau ein D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ mit $\mathscr{C}_0 = \mathscr{P}$ und $\mathscr{F}_0 = \mathscr{Q}$. Dieses D-Paar ist ein reflexives und coreflexives Annullatorpaar mit Zerlegungen.

Beweis. Wir werden zeigen, daß sich jeder Morphismus g der Kategorie zerlegen läßt in $g = cf$, wobei c Pushout eines Morphismus aus $\langle \mathscr{P} \rangle$, f Pullback eines Morphismus aus $\langle \mathscr{Q} \rangle$ ist.

Ist nun $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein D-Paar mit $\mathscr{C}_0 = \mathscr{P}$ und $\mathscr{F}_0 = \mathscr{Q}$, so folgt aus Satz 6, daß $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ regulär ist. Wegen Lemma 8 ist $\langle \mathscr{Q} \rangle \subseteq \mathscr{F}$, wegen dem Dualen von Lemma 8 ist $\langle \mathscr{P} \rangle \subseteq \mathscr{C}$. Für jede solche Zerlegung $g = cf$ liegt daher c in $\mathscr{C}$ und f in $\mathscr{F}$. Aus Lemma 12 folgt dann die Eindeutigkeit von $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$.

$g \colon X \to Y$ sei also ein Morphismus der Kategorie. Wir konstruieren als erstes ein kommutatives Diagramm

$$(+) \qquad \begin{array}{ccccccccc} O & \longrightarrow & X_P & \xrightarrow{x} & X & \xrightarrow{s} & X_Q & \longrightarrow & O \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \\ O & \longrightarrow & Y_P & \xrightarrow{y} & Y & \xrightarrow{t} & Y_Q & \longrightarrow & O \end{array}$$

mit X_P, Y_P in $\mathscr{P}$ und X_Q, Y_Q in $\mathscr{Q}$.

Nach Voraussetzung existieren nämlich die Morphismen x, s, y, t. Ist nun $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein beliebiges Annullatorpaar mit $\mathscr{C}_0 = \mathscr{P}$ und $\mathscr{F}_0 = \mathscr{Q}$ (ein solches existiert nach Satz 5), so gehören die Morphismen x und y zu $\mathscr{F}$, die Morphismen s und t zu $\mathscr{C}$ (Korollar zu Lemma 11). Im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} O & \longrightarrow & Y_P \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ X_P & \xrightarrow[xg]{} & Y \end{array}$$

existiert wegen $X_P \in \mathscr{P} = \mathscr{C}_0$ und $y \in \mathscr{F}$ eine Diagonale, die wir mit p bezeichnen. Dualisierung liefert den Morphismus q.

Mit Hilfe des Pushouts von p und x bilden wir die von p induzierte exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} O & \longrightarrow & X_P & \xrightarrow{x} & X & \xrightarrow{s} & X_Q & \longrightarrow & O \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ O & \longrightarrow & Y_P & \xrightarrow[x']{} & A & \xrightarrow[s']{} & X_Q & \longrightarrow & O, \end{array}$$

entsprechend liefert das Pullback von t und q die von q induzierte exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} O & \longrightarrow & Y_P & \xrightarrow{y'} & B & \xrightarrow{t'} & X_Q & \longrightarrow & O \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle q'} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \\ O & \longrightarrow & Y_P & \xrightarrow[y]{} & Y & \xrightarrow[t]{} & Y_Q & \longrightarrow & O. \end{array}$$

Aus der Gleichung $p \cdot y = x \cdot g$ folgt, daß das Paar (y, g) durch das Pushout von p und x faktorisierbar ist: es gibt also einen Morphismus z mit

$$x' z = y \quad \text{und} \quad p' z = g.$$

Die Gleichungen

$$p'(z t) = g t = s q = p'(s' q),$$
$$x'(z t) = y t = 0 = x'(s' q)$$

implizieren wegen der Eindeutigkeit der Faktorisierung durch ein Pushout die Gleichung

$$z t = s' q.$$

Daher können wir das Paar (z, s') durch das Pullback von t und q faktorisieren: wir erhalten i mit

$$i q' = z \quad \text{und} \quad i t' = s'.$$

Aus den Gleichungen

$$(x' i) q' = x' z = y = y' q',$$
$$(x' i) t' = x' s' = 0 = y' t'$$

folgt wegen der Eindeutigkeit der Faktorisierung durch das Pullback die Gleichung

$$x' i = y'.$$

Damit ist gezeigt, daß das folgende Diagramm kommutativ ist

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & Y_P \arrow[r, "x'"] \arrow[d, "1"] & A \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "i"] & X_Q \arrow[r] \arrow[d, "1"] & O \\
O \arrow[r] & Y_P \arrow[r, "y'"'] & B \arrow[r, "t'"'] & X_Q \arrow[r] & O,
\end{tikzcd}$$

und da die Reihen exakt sind, ist i ein Isomorphismus. Für g erhalten wir die folgende Gleichung:

$$g = p' z = p' i q',$$

dabei ist p' (und weil i ein Isomorphismus ist, auch $p' i$) Pushout von $p \in \langle \mathscr{P} \rangle$, q' Pullback von $q \in \langle \mathscr{Q} \rangle$.

Setzen wir also $c = p' i$, $f = q'$, so haben wir eine gewünschte Zerlegung von g.

Damit ist gezeigt, daß es genau ein D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ mit $\mathscr{C}_0 = \mathscr{P}$ und $\mathscr{F}_0 = \mathscr{Q}$ gibt, und daß dieses D-Paar ein D-Paar mit Zerlegungen ist. Aus Satz 5 folgt, daß $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ gleichzeitig reflexiv und coreflexiv ist.

Wir können damit die Annullatorpaare mit genügend $\mathscr{F}$-Objekten folgendermaßen charakterisieren:

Satz 8. *$\mathscr{K}$ sei eine abelsche Kategorie. Ein D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ mit genügend $\mathscr{C}$-Objekten oder genügend $\mathscr{F}$-Objekten ist genau dann ein Annullatorpaar, wenn es reflexiv und coreflexiv ist.*

Beweis. Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ reflexiv und coreflexiv, so folgt aus Lemma 10 (und seinem Dualen), daß $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein Annullatorpaar ist.

Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein Annullatorpaar mit genügend $\mathscr{C}$-Objekten oder genügend $\mathscr{F}$-Objekten, so ist wegen des Korollars zu Lemma 11 die Voraussetzung von Satz 7 erfüllt. Also ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ reflexiv und coreflexiv.

In Abschnitt 8 werden wir sehen, daß in lokal kleinen Kategorien mit Durchschnitten (z.B. also in Modulkategorien) jedes Annullatorpaar genügend $\mathscr{C}$-Objekte besitzt. In diesen Kategorien brauchen wir daher die Existenz von $\mathscr{C}$-Objekten nicht vorauszusetzen.

7. Reduktion der Klassifizierung reflexiver D-Paare

Wir setzen wieder voraus, daß die Kategorie $\mathscr{K}$ endliche Limites und endliche Colimites besitzt und daß ein Nullobjekt existiert.

In [1] und [5] ist bewiesen worden, daß sich in bestimmten Kategorien jede Reflexion als Komposition zweier Epireflexionen darstellen läßt, daß es also zu jeder reflexiven Unterkategorie $\mathscr{L}$ von $\mathscr{K}$ eine Unterkategorie $\mathscr{Z}$ von $\mathscr{K}$ mit $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{Z}$ gibt, derart, daß $\mathscr{L}$ epireflexiv in $\mathscr{Z}$ und $\mathscr{Z}$ epireflexiv in $\mathscr{K}$ liegt.

Wir werden sehen, daß man in abelschen Kategorien für $\mathscr{Z}$ die volle Unterkategorie der Objekte aus $\mathrm{rl}\,|\mathscr{L}|$ nehmen kann.

Wir untersuchen als erstes, wie sich reflexive D-Paare auf reflexive Unterkategorien vererben.

Lemma 13. *$\mathscr{L}$ sei reflexive Unterkategorie von $\mathscr{K}$. Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein reflexives D-Paar mit genügend $\mathscr{F}$-Objekten und gilt $\mathscr{F}_0 \subseteq |\mathscr{L}|$, so ist $(\mathscr{C} \cap \mathscr{L}, \mathscr{F} \cap \mathscr{L})$ ein reflexives D-Paar in $\mathscr{L}$.*

Beweis. Trivialerweise gilt

$$\mathscr{C} \cap \mathscr{L} \subseteq \mathrm{d}_\mathrm{l}^{\mathscr{L}}(\mathscr{F} \cap \mathscr{L}),$$

dabei soll der Index $\mathscr{L}$ andeuten, daß sich der Operator $\mathrm{d}_\mathrm{l}^{\mathscr{L}}$ auf die Kategorie $\mathscr{L}$ bezieht. Nach Satz 4 gilt

$$\mathscr{C} = \mathrm{d}_\mathrm{l}^{\mathscr{K}} \langle \mathscr{F}_0 \rangle,$$

also haben wir wegen $\langle \mathscr{F}_0 \rangle \subseteq \mathscr{L}$

$$\mathrm{d}_\mathrm{l}^{\mathscr{L}}(\mathscr{F} \cap \mathscr{L}) \subseteq \mathrm{d}_\mathrm{l}^{\mathscr{L}} \langle \mathscr{F}_0 \rangle = \mathscr{C} \cap \mathscr{L}.$$

Wenden wir den Adjunktionssatz auf die Klasse $\mathscr{C}$ an, so erhalten wir

$$\mathrm{d}_\mathrm{r}^{\mathscr{L}}(\mathscr{C}^R) = U^{-1}\, \mathrm{d}_\mathrm{r}^{\mathscr{K}} \mathscr{C} = U^{-1} \mathscr{F} = \mathscr{F} \cap \mathscr{L},$$

dabei sei $U: \mathscr{L} \to \mathscr{K}$ der Inklusionsfunktor und U zu R adjungiert. Wir zeigen noch, daß die Morphismen aus $\mathscr{C}^{RU}$ wieder zu $\mathscr{C}$ gehören. Ist $c: C \to D$ gegeben, so ist für die kanonischen Morphismen $\beta_C: C \to C^{RU}$, $\beta_D: D \to D^{RU}$ die Gleichung

$$c\, \beta_D = \beta_C\, c^{RU}$$

erfüllt. Nun ist $\beta_C, \beta_D \in \mathrm{d}_\mathrm{l}\, \mathscr{L} \subseteq \mathrm{d}_\mathrm{l} \langle \mathscr{F}_0 \rangle = \mathscr{C}$. Ist c aus $\mathscr{C}$, so liegt mit c, β_D und β_C auch der Morphismus c^{RU} in $\mathscr{C}$. Dies liefert die Inklusion

$$\mathrm{d}_\mathrm{r}^{\mathscr{L}}(\mathscr{C} \cap \mathscr{L}) \subseteq \mathrm{d}_\mathrm{r}^{\mathscr{L}}(\mathscr{C}^R) = \mathscr{F} \cap \mathscr{L}.$$

Mit $\mathscr{C}$ ist auch $\mathscr{C} \cap \mathscr{L}$ anfangs- und endvererblich, also ist $(\mathscr{C} \cap \mathscr{L}, \mathscr{F} \cap \mathscr{L})$ ein reflexives D-Paar.

Wir wollen Lemma 13 in additiven Kategorien auf die Unterkategorie $\mathscr{L} = \langle \mathrm{rl}\, \mathscr{F}_0 \rangle$ anwenden. Ist $\mathscr{L}$ reflexive Unterkategorie, so erhalten wir ein D-Paar $(\mathscr{C} \cap \mathscr{L}, \mathscr{F} \cap \mathscr{L})$, das keine nicht-trivialen $\mathscr{C} \cap \mathscr{L}$-Objekte besitzt. Denn nach Lemma 10 ist $\mathscr{C}_0 = \mathrm{l}(\mathscr{F}_0)$, daher liegen die $\mathscr{C}$-Objekte, die zu $\mathscr{L}$ gehören, in $\mathrm{l}(\mathscr{F}_0) \cap \mathrm{rl}(\mathscr{F}_0) = O$.

Lemma 14. *$\mathscr{K}$ sei additiv. Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein D-Paar, so ist äquivalent:*

(i) $\mathscr{C}_0 = O$,

(ii) *$\mathscr{C}$ enthält nur Epimorphismen.*

Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ reflexiv, so ist (in beliebigen Kategorien) zur Bedingung (ii) *äquivalent:*

(iii) *$\mathscr{C}$ enthält nur wesentliche Epimorphismen.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $c \in \mathscr{C}$, $c\,x = 0$. Dann läßt sich x durch den Cokern von c faktorisieren. Ist $c \in \mathscr{C}$, so ist der Cokern von c ein $\mathscr{C}$-Objekt, also ein Nullobjekt. Damit haben wir $x = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Ist X ein $\mathscr{C}$-Objekt, so gehört $O \to X$ zu $\mathscr{C}$. Ist dies ein Epimorphismus, so folgt $X = O$.

Sei nun $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ reflexiv. Wir brauchen nur zu zeigen:

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sei e ein Epimorphismus in $\mathscr{C}$, $e = e'\,r$, wobei e' ein Epimorphismus ist und $u\,r = 1$ gilt für einen Morphismus u. Wir müssen nachweisen, daß r ein Isomorphismus ist.

Da e' epimorph ist, folgt aus dem Dualen des Korollar zu Lemma 2, daß r zu $\mathscr{C}$ gehört. Wegen der Reflexivität liegt mit r auch u in $\mathscr{C}$. Ist nun u ein Epimorphismus, so folgt aus der Gleichung $u\,r = 1$ die Gleichung $r\,u = 1$, und r ist ein Isomorphismus.

Wir geben noch ein zweites Kriterium dafür an, daß die *Co-D*-Klasse eines reflexiven (oder allgemeiner: eines regulären) D-Paares nur Epimorphismen enthält.

Lemma 15. *Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ reguläres D-Paar und enthält $\mathscr{C}$ nur Monomorphismen, so ist jeder Morphismus in $\mathscr{C}$ ein Bimorphismus.*

Beweis. Sei $c \in \mathscr{C}$ und es gelte $c\,x = c\,y$. Bilden wir das Pushout von c und $c\,x$, also

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "c\,x"] \arrow[d, "c"'] & \bullet \arrow[d, "c'"] \\ \bullet \arrow[r, "q"'] & \bullet, \end{tikzcd}$$

so können wir das Paar $(x, 1)$ durch das Pushout faktorisieren und erhalten r mit

$$q\,r = x \quad \text{und} \quad c'\,r = 1.$$

Entsprechend faktorisieren wir $(y, 1)$ durch das Pushout und erhalten s mit

$$q s = y \quad \text{und} \quad c' s = 1.$$

Mit c liegt auch c' in $\mathscr{C}$. Aus der Regularität folgt, daß r zu $\mathscr{C}$ gehört, denn wir haben die Gleichung $c' r = 1$. Ist aber r ein Monomorphismus, so ist $r c' = 1$ und deswegen haben wir

$$x = q r = q r(c' s) = q(r c') s = q \cdot 1 \cdot s = y.$$

Damit ist gezeigt, daß c ein Epimorphismus ist.

Lemma 15 entspricht der bekannten Tatsache, daß Monoreflexionen Epireflexionen sind. Ist $\mathscr{L}$ eine monoreflexive Unterkategorie von $\mathscr{K}$, so sieht man unmittelbar, daß die *Co-D*-Klasse des *D*-Paares $(\mathrm{d_l}\,\mathscr{L}, \mathrm{d_r}\,\mathrm{d_l}\,\mathscr{L})$ tatsächlich nur Monomorphismen enthält.

Fassen wir die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen, und beschränken wir uns auf Kategorien, in denen Annullatorpaare genügend $\mathscr{F}$-Objekte besitzen, so sehen wir, daß wir alle reflexiven Unterkategorien erhalten, wenn wir in den vollen Unterkategorien $\mathscr{L}$ mit $\mathrm{rl}|\mathscr{L}| = |\mathscr{L}|$ reflexive *D*-Paare $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ suchen, bei denen $\mathscr{C}$ nur Morphismen enthält, die in $\mathscr{L}$ Epimorphismen sind.

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß die *D*-Paare $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$, bei denen $\mathscr{C}$ nur Epimorphismen enthält, klassifiziert werden können. Dies liefert gleichzeitig Kriterien für die Existenz von Zerlegungen. Insbesondere wird sich zeigen, daß die Beschränkung auf Kategorien, in denen Annullatorpaare genügend $\mathscr{C}$-Objekte besitzen, sinnvoll ist.

8. Rechts-Bikategorien

In [5] hat Kennison den Begriff der Rechts-Bikategorie eingeführt:

Ein Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ von Morphismenklassen der Kategorie $\mathscr{K}$ heißt Rechts-Bikategorie, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(0) Jeder Isomorphismus liegt in $\mathscr{C} \cap \mathscr{F}$,

(1) $\mathscr{C}$ und $\mathscr{F}$ sind Unterkategorien,

(2) Jeder Morphismus g läßt sich faktorisieren in

$$g = c f$$

mit $c \in \mathscr{C}$ und $f \in \mathscr{F}$ und diese Faktorisierung ist bis auf Isomorphie eindeutig (gibt es also $c' \in \mathscr{C}, f' \in \mathscr{F}$ mit $g = c' f'$, so existiert ein Isomorphismus t mit $c t = c'$ und $t f' = f$).

(3) $\mathscr{C}$ enthält nur Epimorphismen.

Zwischen den Rechts-Bikategorien und den *D*-Paaren besteht die folgende Beziehung:

Satz 9. *$(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ist genau dann Rechts-Bikategorie, wenn $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein D-Paar mit Zerlegungen ist und $\mathscr{C}$ nur Epimorphismen enthält.*

Beweis. Sei $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ Rechts-Bikategorie. Kennison hat gezeigt, daß $\mathscr{C}\subseteq \mathrm{d}_l\mathscr{F}$ gilt. Denn ist $cb=af$ mit $c\in\mathscr{C}$ und $f\in\mathscr{F}$ gegeben, so betrachtet man Faktorisierungen $a=a_1a_2, b=b_1b_2$ mit $a_1, b_1\in\mathscr{C}$ und $a_2, b_2\in\mathscr{F}$. Dann sind aber $(cb_1)b_2$ und $a_1(a_2f)$ Faktorisierungen des gleichen Morphismus, nach (2) gibt es einen Isomorphismus t mit

$$cb_1t=a_1 \quad \text{und} \quad ta_2f=b_2.$$

Man sieht, daß b_1ta_2 die gesuchte Diagonale ist.

Ist $x\in\mathrm{d}_l\mathscr{F}$, so gibt es eine Faktorisierung $x=cf$ mit $c\in\mathscr{C}$ und $f\in\mathscr{F}$. Zur Gleichung

$$x\cdot 1=cf$$

gibt es eine Diagonale d, also

$$xd=c \quad \text{und} \quad df=1.$$

Nach (3) ist c ein Epimorphismus. Dann ist aber auch d Epimorphismus und aus der Gleichung $df=1$ folgt, daß d ein Isomorphismus ist. Wegen (0) liegt mit c auch x in $\mathscr{C}$. Damit ist gezeigt, daß $\mathrm{d}_l\mathscr{F}\subseteq\mathscr{C}$ gilt.

Ist $x\in\mathrm{d}_r\mathscr{C}$ und $x=cf$ für ein $c\in\mathscr{C}$ und ein $f\in\mathscr{F}$, so gibt es zur Gleichung

$$cf=1\cdot x$$

eine Diagonale d mit

$$cd=1 \quad \text{und} \quad dx=f.$$

Nun ist c ein Epimorphismus, also wegen $cd=1$ ein Isomorphismus. Mit f liegt daher auch x in $\mathscr{F}$. Dies zeigt, daß auch $\mathrm{d}_r\mathscr{C}\subseteq\mathscr{F}$ gilt.

$(\mathscr{C},\mathscr{F})$ ist demnach ein $\boldsymbol{D}$-Paar, das wegen (2) und (3) die gewünschten Eigenschaften hat.

Ist $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ ein D-Paar und enthält $\mathscr{C}$ nur Epimorphismen, so ist $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ regulär. Lemma 5 besagt, daß Zerlegungen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Die Eigenschaften (0) und (1) haben wir in Lemma 1 und Lemma 2 notiert.

Das folgende Lemma stammt im wesentlichen von Kennison [5], man kann dabei allerdings auf die Existenz von Summen verzichten, wenn man die (schwächere) Voraussetzung einführt, daß es beliebige Codurchschnitte gibt. Dabei verstehen wir unter einem Codurchschnitt den Colimes eines Pinsels von Epimorphismen.

Lemma 16. *$\mathscr{K}$ sei colokal klein mit Pushouts und Codurchschnitten. $\mathfrak{X}$ sei eine Klasse von Epimorphismen mit*

(a) *$\mathfrak{X}$ ist Unterkategorie und enthält alle Identitäten,*

(b) *$\mathfrak{X}$ ist pushout-abgeschlossen,*

(c) *Ist $\{x_i\colon A\to X_i\}$ ein Pinsel von Morphismen aus $\mathfrak{X}$, und ist $\{q_i\colon X_i\to B\}$ ein Codurchschnitt, so liegt $x_i q_i$ in $\mathfrak{X}$.*

Dann gibt es zu jedem Morphismus g eine Faktorisierung

$$g = x\,y$$

mit $x \in \mathscr{X}$ und $y \in \mathrm{d_r}\,\mathscr{X}$.

Beweis. Aus (a) und (b) folgt unmittelbar:

(a') $\mathscr{X}$ enthält alle Isomorphismen.

Sei nun $g: A \to B$ ein Morphismus. $\mathscr{K}$ ist colokal klein, also gibt es eine Repräsentantenmenge $\mathscr{V}$ von Epimorphismen mit Quelle A. Wir bilden den Pinsel

$$\mathscr{P} = \{x_i\colon\ A \to X_i \mid x_i \in \mathscr{V} \cap \mathscr{X}, \text{ es gibt } y_i \text{ mit } x_i\,y_i = g\}.$$

Nach Voraussetzung ist $\mathscr{P}$ eine (nicht leere) Menge und $\{q_i\colon\ X_i \to B\}$ sei ein Codurchschnitt dieses Pinsels. Wir setzen $x = x_i\,q_i$. Wegen (c) liegt x in $\mathscr{X}$.

Die Familie der y_i mit $x_i\,y_i = g$ läßt sich durch den Codurchschnitt faktorisieren: es gibt y mit $q_i\,y = y_i$. Es bleibt zu zeigen, daß y in $\mathrm{d_r}\,\mathscr{X}$ liegt, also, wegen des Dualen von Lemma 3, daß die Gleichungen der Form

$$(+) \qquad z\,b = 1 \cdot y$$

mit $x \in \mathscr{X}$ diagonalisierbar sind. Zu $x\,z$ gibt es einen Isomorphismus e mit $x\,z\,e$ in $\mathscr{X} \cap \mathscr{V}$. Wegen $(x\,z\,e)(e^{-1}\,b) = x\,y = g$ gehört $x\,z\,e$ zu $\mathscr{P}$ und es gibt q_i mit $(x\,z\,e)\,q_i = x$. Da s ein Epimorphismus ist, folgt

$$z(e\,q_i) = 1\,.$$

Dann gilt aber auch

$$(e\,q_i)\,y = b,$$

denn es ist $z(e\,q_i\,y) = 1 \cdot y = z\,b$ und z ist ein Epimorphismus. $e\,q_i$ ist die gesuchte Diagonale von $(+)$.

Als Korollar erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 10. *$\mathscr{K}$ sei colokal klein mit Pushouts und Codurchschnitten. Dann ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ genau dann Rechts-Bikategorie, wenn $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein D-Paar ist und $\mathscr{C}$ nur Epimorphismen enthält.*

Beweis. Sei $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein D-Paar und $\mathscr{C}$ enthalte nur Epimorphismen. Dann erfüllt die Klasse $\mathscr{X} = \mathscr{C}$ die Voraussetzungen von Lemma 16. Also gibt es Zerlegungen.

Die Behauptung des Satzes folgt nun aus Satz 9.

Die D-Paare, deren *Co-D*-Klassen nur Epimorphismen enthalten, lassen sich folgendermaßen charakterisieren:

Satz 11. *$\mathscr{K}$ sei colokal klein mit Pushouts und Codurchschnitten. Ist $\mathscr{C}$ eine Klasse von Epimorphismen, so ist äquivalent:*

(i) $\begin{cases} \text{(a) } \mathscr{C} \textit{ ist Unterkategorie und enthält alle Identitäten,} \\ \text{(b) } \mathscr{C} \textit{ ist pushout-abgeschlossen,} \\ \text{(c) } \mathscr{C} \textit{ ist codurchschnittsabgeschlossen (Lemma 16(c)).} \end{cases}$

(ii) $(\mathscr{C}, \mathrm{d_r}\,\mathscr{C})$ *ist ein D-Paar.*

Beweis. Es bleibt zu zeigen, daß (ii) aus (i) folgt, daß also $d_l\, d_r\, \mathscr{C} \subseteq \mathscr{C}$ gilt. Ist $g \in d_l\, d_r\, \mathscr{C}$, so gibt es nach Lemma 16 $x \in \mathscr{C}$, $y \in d_r\, \mathscr{C}$ mit

$$(++) \qquad g \cdot 1 = x\, y.$$

Eine Diagonale d zu $(++)$ erfüllt

$$g\, d = x \quad \text{und} \quad d\, y = 1.$$

Mit x ist d ein Epimorphismus, wegen $d\, y = 1$ ist d sogar Isomorphismus. $\mathscr{C}$ enthält alle Isomorphismen, also ist $g \in \mathscr{C}$.

Eine unmittelbare Folgerung ist ein Satz, der auf Isbell [4] zurückgeht:

Korollar. *$\mathscr{K}$ sei colokal klein mit Pushouts und Codurchschnitten. Ist $\mathscr{E}$ die Klasse der Epimorphismen, so ist $(\mathscr{E}, d_r\, \mathscr{E})$ ein D-Paar mit Zerlegungen.*

Beweis. $\mathscr{E}$ erfüllt die Bedingungen (i) von Satz 11.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse läßt sich nun zeigen, daß gewisse D-Paare genügend $\mathscr{F}$-Objekte besitzen.

Satz 12. *$\mathscr{K}$ sei colokal klein und besitze endliche Limites, endliche Colimites, beliebige Codurchschnitte und ein Nullobjekt.*

Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein D-Paar mit $\mathrm{rl}(\mathscr{F}_0) = \mathscr{F}_0$, so gibt es genügend $\mathscr{F}$-Objekte, und zwar gibt es zu jedem Objekt X einen Epimorphismus *$X \to X'$ in $\mathscr{C}$, wobei X' ein $\mathscr{F}$-Objekt ist.*

Beweis. Aus obigem Korollar folgt, daß $(\mathscr{C} \cap \mathscr{E}, d_r(\mathscr{C} \cap \mathscr{E}))$ ein D-Paar ist. Aus Satz 10 folgt, daß es zu diesem D-Paar genügend $d_r(\mathscr{C} \cap \mathscr{E})$-Objekte gibt: Zu jedem Objekt X gibt es also einen Morphismus $X \to X'$ in $\mathscr{C} \cap \mathscr{E}$, wobei X' ein $d_r(\mathscr{C} \cap \mathscr{E})$-Objekt ist.

Es bleibt zu zeigen, daß X' in $\mathscr{F}_0$ liegt.

Sei $A \in \mathrm{l}(\mathscr{F}_0)$, $a\colon A \to X'$ ein beliebiger Morphismus. Nach Lemma 10(a) gehört $A \to O$ zu $\mathscr{C}$. Betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ O & \longrightarrow & O, \end{array}$$

so liegt $A \to O$ in $\mathscr{C} \cap \mathscr{E}$, $X' \to O$ in $d_r(\mathscr{C} \cap \mathscr{E})$. Es gibt also eine Diagonale, also ist $a = 0$. Demnach liegt X' in $\mathrm{rl}(\mathscr{F}_0) = \mathscr{F}_0$.

Korollar. *$\mathscr{K}$ sei lokal kleine Kategorie mit endlichen Limites, endlichen Colimites, beliebigen Durchschnitten und einem Nullobjekt.*

Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein reflexives D-Paar oder ein Annullatorpaar, so gibt es genügend $\mathscr{C}$-Objekte.

Beweis. Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ reflexiv, so folgt aus Lemma 10 die Gleichung $\mathscr{C}_0 = \mathrm{lr}(\mathscr{C}_0)$. Für Annullatorpaare steht dies in der Definition. Die Behauptung folgt durch Dualisieren von Satz 12.

9. Reflexive Unterkategorien von Modulkategorien

Wir betrachten in diesem Abschnitt Modulkategorien, oder (allgemeiner) Grothendieck-Kategorien mit einem Generator. Bewiesen werden soll der folgende Satz, der die Konstruktion reflexiver Unterkategorien gestattet. Dabei heißt eine Objektklasse $\mathscr{P}$ subobjektvererblich, wenn mit einem Objekt P jedes Subobjekt von P zu $\mathscr{P}$ gehört.

Satz 13. *$\mathscr{K}$ sei eine Grothendieck-Kategorie mit Generator. Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein reflexives D-Paar und ist $\mathscr{C}_0$ subobjektvererblich, so gibt es genügend $\mathscr{F}$-Objekte.*

Beweis. Nach dem Korollar zu Satz 11 ist $(\mathscr{E}, \mathrm{d_r}\,\mathscr{E})$ und damit auch $(\mathscr{C} \cap \mathscr{E}, \mathrm{d_r}(\mathscr{C} \cap \mathscr{E}))$ ein D-Paar. Wir setzen $\mathscr{F}' = \mathrm{d_r}(\mathscr{C} \cap \mathscr{E})$. Nach Satz 10 gibt es genügend $\mathscr{F}'$-Objekte.

(1) Ist X, $Y \in \mathscr{F}_0'$, und $x\colon X \to Y$ in $\mathscr{C}$, so ist x ein wesentlicher Monomorphismus.

Sei $x = e\,m$, e Epimorphismus, m Monomorphismus. Mit x gehört auch m zu $\mathscr{C}$ und wegen der Reflexivität gilt nun $e \in \mathscr{C}$. Die Quelle von e ist ein $\mathscr{F}'$-Objekt, also gibt es im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1} & X \\ {\scriptstyle e}\downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & O \end{array}$$

eine Diagonale. Da e ein Epimorphismus ist, ist e sogar Isomorphismus.

Damit ist gezeigt, daß x ein Monomorphismus ist. Sei nun

$$X \xrightarrow{u} Z \xrightarrow{m} Y$$

mit $u\,m = x$ gegeben, dabei sei m ein Monomorphismus und u eine Coretraktion (es gebe also ein r mit $u\,r = 1$).

Wir bilden den Kern $v\colon C \to Z$ von r. Ist $q\colon Y \to Q$ der Cokern von x, so ist $v\,m\,q$ ein Monomorphismus. C ist also ein Subobjekt von Q und Q gehört als Cokern von $x \in \mathscr{C}$ zu $\mathscr{C}_0$. Wegen der Subobjektvererblichkeit folgt $C \in \mathscr{C}_0$.

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{vm} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ O & \longrightarrow & O \end{array}$$

besitzt wegen $Y \in \mathscr{F}_0'$ eine Diagonale, also ist $v\,m = 0$ und damit auch $C = O$.

(2) Sind $m_1\colon X \to Z$ und $m_2\colon Z \to Y$ zwei Monomorphismen mit $m_1\,m_2$ in $\mathscr{C}$, so liegen beide Morphismen m_1 und m_2 in $\mathscr{C}$.

Wir zeigen, daß m_2 zu $\mathscr{C}$ gehört. Aus der Reflexivität folgt dann, daß auch m_1 zu $\mathscr{C}$ gehört. Sei die Gleichung

$$m_2 \cdot 1 = a\,f$$

mit $f \in \mathscr{F}$ gegeben. Schalten wir m_1 davor, so läßt sich die Gleichung

$$(m_1 m_2) \cdot 1 = (m_1 a) f$$

diagonalisieren: es gibt ein d mit

$$m_1 m_2 d = m_1 a \quad \text{und} \quad df = 1.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $m_2 d = a$ gilt. Aus der Gleichung

$$m_1(m_2 d - a) = 0$$

folgt, daß $m_2 d - a$ durch den Cokern $q_1: Z \to Q_1$ faktorisierbar ist: es gibt ein x mit

$$m_2 d - a = q_1 x.$$

Nun ist aber

$$q_1 xf = (m_2 d - a) f = m_2 df - af = m_2 - af = 0,$$

und da q_1 ein Epimorphismus ist, ist auch

$$xf = 0.$$

Daher können wir x den Kern $k: K \to \bullet$ von f faktorisieren: es gibt ein y mit

$$x = yk.$$

y ist ein Morphismus mit Quelle Q_1 und Ziel K. Q_1 ist Subobjekt vom Cokern von $m_1 m_2$. Da $m_1 m_2$ zu $\mathscr{C}$ gehört und $\mathscr{C}_0$ subobjektvererblich ist, gehört Q_1 zu $\mathscr{C}_0$. f liegt in $\mathscr{F}$, also ist der Kern K von f ein $\mathscr{F}$-Objekt. Aus Lemma 10 folgt nun $y = 0$. Damit ist aber auch

$$m_2 d - a = 0,$$

und d ist die gesuchte Diagonale unserer Ausgangsgleichung.

(3) Sind Monomorphismen c_1, c_2, m_1, m_2 mit

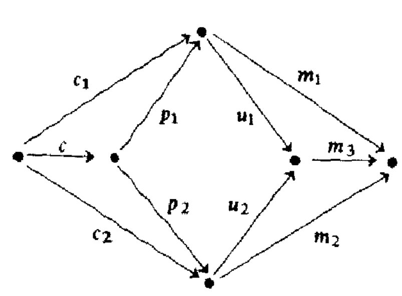
$$c_1 m_1 = c_2 m_2$$

gegeben und liegen die Morphismen c_1 und c_2 in $\mathscr{C}$, so gibt es Monomorphismen u_1, u_2 und m_3 mit

$$u_1 m_3 = u_2 m_3,$$

wobei $c_1 u_1 (= c_2 u_2)$ zu $\mathscr{C}$ gehört.

Zu m_1 und m_2 gibt es nach [9], 14.2.7 ein kommutatives Diagramm



wobei das mittlere Quadrat ein Pushout-Diagramm ist und alle Morphismen Monomorphismen sind. Wir zeigen, daß $c_1 u_1$ zu $\mathscr{C}$ gehört.

Sei daher die folgende Gleichung

$$(c_1 u_1) b = af$$

mit $f \in \mathscr{F}$ gegeben. Zu den Gleichungen

$$c_1(u_1 b) = af \quad \text{und} \quad c_2(u_2 b) = af$$

gibt es Diagonalen d_i, die die Gleichungen

$$c_i d_i = a \quad \text{und} \quad d_i f = u_i b \qquad (i=0,1)$$

erfüllen. Nach (2) gehört mit $c_1 = c p_1$ auch c zu $\mathscr{C}$.

Aus den Gleichungen

$$c(p_1 d_1) = c_1 d_1 = a = c_2 d_2 = c(p_2 d_2),$$
$$(p_1 d_1) f = p_1 u_1 b = p_2 u_2 b = (p_2 d_2) f$$

und der Regularität eines reflexiven D-Paares folgt

$$p_1 d_1 = p_2 d_2.$$

Das Paar d_1, d_2 läßt sich daher durch das Pushout faktorisieren: wir erhalten ein d mit

$$u_1 d = d_1 \quad \text{und} \quad u_2 d = d_2.$$

Einerseits gilt nun

$$(c_1 u_1) d = c_1(u_1 d) = c_1 d_1 = a,$$

andererseits folgt die Gleichung $df = b$ aus den beiden Gleichungen

$$u_i(df) = (u_i d) f = d_i f = b \qquad (i=1,2),$$

und der Eindeutigkeit der Faktorisierung durch ein Pushout.

(4) Sei $x\colon X \to I$ injektive Hülle von X. Wir betrachten die Familie der Zerlegungen

$$X \xrightarrow{c_i} Y_i \xrightarrow{m_i} I$$

von x (also: $c_i m_i = x$), wobei m_i ein Monomorphismus ist und c_i zu $\mathscr{C}$ gehört. Ist $m\colon Y \to I$ die Vereinigung der m_i und $u_i m = m_i$, so liegt der Morphismus $y = c_i u_i$ in $\mathscr{C}$.

Nach (3) ist die Familie der Morphismen c_i, zu denen es ein m_i mit $c_i m_i = x$ gibt, eine gerichtete Familie: wir müssen dabei allerdings zusätzlich die Morphismen c_{ij} mit $c_{ij} m_j = m_i$ berücksichtigen.

Aus [7], III.1.2 folgt, daß die Familie $\{u_i\}$ gerade der Colimes von $\{c_i, c_{ij}\}$ ist.

Sei nun die Gleichung $\qquad y b = a f$

mit $f \in \mathscr{F}$ gegeben. Zu den Gleichungen

$$c_i(u_i b) = a f$$

gibt es Diagonalen d_i mit

$$c_i d_i = a \quad \text{und} \quad d_i f = u_i b.$$

Für c_{ij} gilt

$$(+) \qquad c_{ij} d_j = d_i,$$

denn einerseits ist

$$c_i(c_{ij} d_j) = (c_i c_{ij}) d_j = c_j d_j = a = c_i d_i,$$

andererseits ist

$$(c_{ij} d_j) f = c_{ij}(d_j f) = c_{ij} u_j b = u_i b = d_i f,$$

so daß $(+)$ aus der Regularität von $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ folgt.

Wir können daher die Familie der d_i durch den Colimes faktorisieren und erhalten ein d mit

$$u_i d = d_i.$$

Dann ist

$$y d = c_i u_i d = c_i d_i = a,$$

und aus

$$u_i(df) = (u_i d) f = d_i f = u_i b$$

folgt wegen der Eindeutigkeit der Faktorisierung die zweite Gleichung

$$df = b.$$

(5) Zu jedem Objekt X in $\mathscr{F}_0'$ gibt es ein $\mathscr{F}$-Objekt Y und einen Morphismus $y: X \to Y$ in $\mathscr{C}$.

Wir bilden wie in (4) den Morphismus $y: X \to Y$. Es bleibt zu zeigen, daß Y ein $\mathscr{F}$-Objekt ist, daß also alle Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "1"] \arrow[d, "c"'] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

mit $c \in \mathscr{C}$ diagonalisierbar sind. Nach Satz 10 gibt es genügend $\mathscr{F}'$-Objekte, also gibt es zu Z einen Morphismus $e: Z \to Z'$ in $\mathscr{C}$, wobei Z' ein $\mathscr{F}'$-Objekt ist. Da $y c e: X \to Z'$ zu $\mathscr{C}$ gehört, und X und Z' $\mathscr{F}'$-Objekte sind, folgt aus (1), daß $y c e$ ein wesentlicher Monomorphismus ist. Zur injektiven Hülle $x: X \to I$ gibt es einen Monomorphismus d mit

$$(y c e) d = x.$$

In (4) nimmt daher yce an der Colimesbildung teil: es gibt ein i mit $yce=c_i$. Also ist

$$yceu_i = c_i u_i = y,$$

und der Morphismus $ceu_i - 1$ läßt sich durch den Cokern $q\colon Y \to Q$ von y faktorisieren: es gibt $z\colon Q \to Y$ mit

$$qz = ceu_i - 1.$$

Wegen (4) liegt c in $\mathscr{C}$, also Q in $\mathscr{C}_0$ und $Q \to O$ in $\mathscr{C} \cap \mathscr{E}$, denn $\mathscr{C}$ ist reflexiv. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{zce} & Z' \\ \downarrow & & \downarrow \\ O & \longrightarrow & O \end{array}$$

existiert wegen $Z' \in \mathscr{F}_0'$ eine Diagonale, daher ist $zce = 0$. Nun ist aber yce ein Monomorphismus und y ein wesentlicher Monomorphismus. Daraus folgt, daß ce ein Monomorphismus ist und daß $z=0$ gilt. Die Gleichung

$$c(eu_i) = 1$$

besagt nun, daß unser Ausgangsdiagramm eine Diagonale besitzt.

(6) Ist X ein beliebiges Objekt, so gibt es nach Satz 10 einen Epimorphismus $x'\colon X \to X'$ in $\mathscr{C}$, wobei X' ein $\mathscr{F}'$-Objekt ist. Zu X' gibt es nach (5) einen Morphismus $x''\colon X' \to X''$ in $\mathscr{C}$ mit $X'' \in \mathscr{F}_0$. Der Morphismus $x'x''\colon X \to X''$ liegt in $\mathscr{C}$ und X'' ist $\mathscr{F}$-Objekt. Damit ist der Satz bewiesen.

Korollar 1. *Ist $\mathscr{Y}$ eine Klasse von Objekten und ist $\mathrm{l}\mathscr{Y}$ subobjektvererblich, so liegt $\mathscr{Y}$ in einer kleinsten reflexiven Unterkategorie.*

Beweis. Eine reflexive Unterkategorie enthält das Nullobjekt, andererseits ist der Linksannullator von $\mathscr{Y}$ gleich dem Linksannullator von $\mathscr{Y} \cup \{O\}$. Daher können wir annehmen, daß $\mathscr{Y}$ das Nullobjekt enthält.

Nach Lemma 9 ist $\mathscr{C} = \mathrm{e}_{\mathrm{l}}\mathscr{Y}$ die *Co-D*-Klasse eines reflexiven *D*-Paares $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ und man sieht leicht, daß $\mathscr{C}_0 = \mathrm{l}\mathscr{Y}$ gilt. Also besitzt das reflexive *D*-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ genügend $\mathscr{F}$-Objekte und nach Satz 4 ist $\langle \mathscr{F}_0 \rangle$ reflexive Unterkategorie. Wiederum nach Satz 4 ist $\langle \mathscr{F}_0 \rangle$ die kleinste reflexive Unterkategorie, die $\mathscr{Y}$ enthält.

Korollar 2. *Jede Klasse $\mathscr{Y}$ von injektiven Objekten liegt in einer kleinsten reflexiven Unterkategorie von $\mathscr{K}$.*

Beweis. Enthält $\mathscr{Y}$ nur injektive Objekte, so ist $\mathrm{l}\mathscr{Y}$ subobjektvererblich.

Korollar 3. *Sei $\mathscr{P}$ eine subobjektvererbliche Objektklasse. Sei $\mathscr{Q} = \mathrm{r}\mathscr{P}$, $\mathscr{Y}$ die Klasse der injektiven Objekte von $\mathscr{Q}$. Dann bilden die reflexiven Unterkategorien $\mathscr{R}$* mit

(+) $$\mathscr{Y} \subseteq |\mathscr{R}| \subseteq \mathscr{Q}$$

einen vollständigen Verband mit Null $\langle (e_r\, e_l\, \mathscr{Y})_0 \rangle$ *und Eins* $\langle \mathscr{Q} \rangle$. *Dabei ist die Durchschnittsbildung durch die mengentheoretische Durchschnittsbildung gegeben.*

Beweis. Die kleinste reflexive Unterkategorie, die $\mathscr{Y}$ enthält, ist $\langle (e_l\, e_r\, \mathscr{Y})_0 \rangle$. $\langle \mathscr{Q} \rangle$ selbst ist reflexive Unterkategorie. Ist nun $\mathscr{X}$ eine Objektklasse mit

$$\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{X} \subseteq \mathscr{Q},$$

so liegt $\mathscr{X}$ in einer kleinsten reflexiven Unterkategorie, denn es ist $1\mathscr{Y} = 1\mathscr{Q}$, also $1\mathscr{Y} = 1\mathscr{X} = \mathrm{lr}\,\mathscr{P}$ und mit $\mathscr{P}$ ist auch $\mathrm{lr}\,\mathscr{P}$ subobjektvererblich.

Sind nun $\mathscr{R}_i$ reflexive Unterkategorien mit $(+)$ und setzen wir $\mathscr{R} = \bigcap \mathscr{R}_i$, so erfüllt $\mathscr{R}$ die Bedingung $(+)$ und daher liegt $\mathscr{R}$ in einer kleinsten reflexiven Unterkategorie $\mathscr{R}'$. Da für alle i gilt

$$\mathscr{R} \subseteq \mathscr{R}' \subseteq \mathscr{R}_i,$$

folgt $\mathscr{R} = \mathscr{R}'$. Die reflexiven Unterkategorien mit $(+)$ bilden einen vollständigen Halbverband mit Null und Eins, also einen Verband.

Wir wollen noch die minimalen Elemente in den Verbänden von Korollar 3 charakterisieren. Es wird sich zeigen, daß diese gerade den Lokalisierungen im Sinne von Gabriel [2] entsprechen. Ist nämlich $\mathscr{P} = \mathrm{lr}\,\mathscr{P}$ subobjektvererblich, so ist $\mathscr{P}$ eine abgeschlossene Serre-Unterkategorie. Bezeichnen wir wieder mit $\mathscr{Y}$ die Klasse der injektiven Objekte, die in $\mathrm{r}\,\mathscr{P}$ liegen, so ist $e_l\,\mathscr{Y}$ gerade die Klasse der $\mathscr{P}$-Isomorphismen (also der Morphismen f, für die $\mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Cok}(f)$ zu $\mathscr{P}$ gehört):

Satz 14. *Sei* $\mathscr{P} = \mathrm{lr}\,\mathscr{P}$ *subobjektvererblich. Sei* $\mathscr{Y}$ *die Klasse der injektiven Objekte in* $\mathscr{Q}$. *Dann gilt für* $\mathscr{C} = e_l \langle \mathscr{Y} \rangle$:

(a) $\mathscr{C}$ *ist die Klasse der* $\mathscr{P}$*-Isomorphismen.*

(b) $\mathscr{C}$ *ist die kleinste Co-D-Klasse eines regulären D-Paares, die die Klasse* $\mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ *der Monomorphismen mit Cokern in* $\mathscr{P}$ *enthält.*

Beweis. Nach Korollar 1 zu Satz 2 ist die kleinste *Co-D*-Klasse eines regulären *D*-Paares, die $\mathscr{P}$ enthält, durch $e_l\, e_r\, \mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ gegeben. Bezeichnen wir mit $\mathscr{I}_{\mathscr{P}}$ die Klasse der $\mathscr{P}$-Isomorphismen, so werden wir die folgenden Inklusionen zeigen:

$$\mathscr{I}_{\mathscr{P}} \subseteq e_l\, e_r\, \mathscr{M}_{\mathscr{P}} \subseteq \mathscr{C} \subseteq \mathscr{I}_{\mathscr{P}}.$$

Dabei verwenden wir die folgende Gleichung:

$$\mathscr{P} = 1\mathscr{Y} = 1(e_r\, \mathscr{M}_{\mathscr{P}})_0,$$

die man unmittelbar verifiziert.

(1) $\mathscr{I}_{\mathscr{P}} \subseteq e_l\, e_r\, \mathscr{M}_{\mathscr{P}}$.

Ist g ein $\mathscr{P}$-Isomorphismus, $g = em$ eine Zerlegung von g in einen Epimorphismus e und einen Monomorphismus m, so ist $m \in \mathscr{M}_{\mathscr{P}} \subseteq e_l\, e_r\, \mathscr{M}_{\mathscr{P}}$. e ist ein Epimorphismus mit Kern in $\mathscr{P}$, und es genügt zu zeigen, daß solche Morphismen zu $e_l\, e_r\, \mathscr{M}_{\mathscr{P}}$ gehören. Ist die Gleichung

$$eb = af$$

mit $f \in \mathrm{e_r}\,\mathcal{M}_{\mathscr{P}}$ gegeben und bilden wir die Kerne k und l von e bzw. f, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "k"'] & L \arrow[d, "l"] \\ \bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, "e"'] & \bullet \arrow[d, "f"] \\ \bullet \arrow[r, "b"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

dabei ist a' die eindeutig bestimmte Faktorisierung von $k\,a$ durch den Kern von f. Nach Voraussetzung liegt K in $\mathscr{P} = \mathrm{l}(\mathrm{e_r}\,\mathcal{M}_{\mathscr{P}})_0$. f gehört zu $\mathrm{e_r}\,\mathcal{M}_{\mathscr{P}}$, also ist L ein Objekt aus $(\mathrm{e_r}\,\mathcal{M}_{\mathscr{P}})_0$.

Der Morphismus a' muß daher trivial sein, und es ist

$$k\,a = a'\,l = 0.$$

Daraus folgt, daß a durch den Cokern e von k faktorisierbar ist: es ist $e\,d = a$ für ein d. Da e ein Epimorphismus ist, folgt $d\,f = b$ (also ist d eine Diagonale) und daß e eindeutig bestimmt ist.

(2) $\mathrm{e_l}\,\mathrm{e_r}\,\mathcal{M}_{\mathscr{P}} \subseteq \mathscr{C}$.

Da $\mathscr{C} = \mathrm{e_l}\,\mathrm{e_r}\,\mathscr{C}$ gilt, genügt es zu zeigen: $\mathcal{M}_{\mathscr{P}} \subseteq \mathscr{C}$.

Sei also $m\colon A \to B$ ein Monomorphismus mit Cokern $q\colon B \to C$, wobei C zu $\mathscr{P}$ gehört. Ist im folgenden (kommutativen) Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "m"'] & Y_1 \arrow[d, "y"] \\ B \arrow[r, "b"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

y ein Morphismus in $\langle \mathscr{Y} \rangle$, so gibt es wegen der Injektivität von Y_1 einen Morphismus d mit

$$m\,d = a.$$

Es ist

$$m(d\,y - b) = 0,$$

daher können wir $d\,y - b$ durch den Cokern q von m faktorisieren und erhalten ein $z\colon C \to Y_2$ mit $q\,z = d\,y - b$. Es ist C aus $\mathscr{P} = \mathrm{l}\,\mathscr{Y}$, Y_2 aus $\mathscr{Y}$, daher ist $z = 0$ und $d\,y = b$. Damit ist gezeigt, daß d eine Diagonale des Diagramms ist. Ist d' eine zweite Diagonale, so läßt sich $d - d'$ durch den Cokern von m faktorisieren und wir erhalten einen Morphismus mit Quelle C und Ziel Y_1, der wiederum trivial sein muß. Daraus folgt $d = d'$ und d ist die einzige Diagonale.

(3) $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{I}_{\mathscr{P}}$.

Ist $g \in \mathscr{C}$, so gehört der Cokern von g zu $\mathscr{C}_0 = \mathscr{P}$. Es bleibt zu zeigen, daß auch der Kern zu $\mathscr{P}$ gehört. Sei $k\colon K \to A$ der Kern von $g\colon A \to B$. Wir zeigen, daß K in $\mathrm{l}\,\mathscr{Y}$ liegt. Ist $x\colon K \to Y$ ein Morphismus mit $Y \in \mathscr{Y}$, so gibt es wegen der Injektivität von Y ein a mit $ka = x$. Im Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d] \\ B \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

existiert wegen $g \in e_1\langle\mathscr{Y}\rangle$ eine Diagonale d, für die also $gd = a$ gilt. Dann ist

$$x = ka = kgd = 0,$$

und K liegt in $1\mathscr{Y} = \mathscr{P}$.

Damit ist der Satz bewiesen.

Die lokalisierenden Unterkategorien von $\mathscr{K}$ haben gerade die Form $\langle\mathscr{P}\rangle$, wobei $\mathscr{P} = \mathrm{lr}\,\mathscr{P}$ subobjektvererblich ist. In [2] ist jeder solchen Unterkategorie eine Quotientenkategorie $\mathscr{K}/\mathscr{P}$ zugeordnet worden.

Korollar. *Sei $\mathscr{P} = \mathrm{lr}\,\mathscr{P}$ eine subobjektvererbliche Objektklasse, $\mathscr{Y}$ die Klasse der injektiven Objekte in $\mathrm{r}\,\mathscr{P}$. Setzen wir $\mathscr{F} = e_r e_1\langle\mathscr{Y}\rangle$, so ist die volle Unterkategorie $\langle\mathscr{F}_0\rangle$ der $\mathscr{F}$-Objekte äquivalent zu $\mathscr{K}/\mathscr{P}$.*

Beweis. $\langle\mathscr{F}_0\rangle$ ist äquivalent zur Quotientenkategorie $\mathscr{K}/e_1\langle\mathscr{Y}\rangle$. $e_1\langle\mathscr{Y}\rangle$ ist aber nach Satz 14 gerade die Klasse der $\mathscr{P}$-Isomorphismen.

Literatur

1. Baron, S.: Reflectors as compositions of epi-reflectors. Trans. Amer. Math. Soc. **136**, 499–508 (1969).
2. Gabriel, P.: Des categories abeliennes. Bull. Soc. Math. France **90**, 323–448 (1962).
3. Goldman, O.: Rings and modules of quotients. J. Algebra **13**, 10–47 (1967).
4. Isbell, J. R.: Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras. Rozprawy Mat. XXXVI, 1964.
5. Kennison, J. F.: Full reflective subcategories and generalized covering spaces. Illinois J. **12**, 353–365 (1968).
6. Lambek, J.: Completion of categories. Lecture Notes 24. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.
7. Mitchell, B.: Theory of categories. New York: Academic Press 1965.
8. Ringel, C. M.: Diagonalisierungspaare. I. Math. Z. **117**, 249–266 (1970).
9. Schubert, H.: Kategorien I, II. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.

Claus Michael Ringel
Mathematisches Institut
der Universität
BRD-7400 Tübingen, Wilhelmstraße 7
Deutschland

zur Zeit:
Department of Mathematics
Carleton University
Ottawa 1
Canada

(Eingegangen am 16. Juni 1970)