Math. Ann. 190, 215—230 (1971)

Faserungen und Homotopie in Kategorien

CLAUS MICHAEL RINGEL

In einigen Arbeiten [1, 5, 7] sind Faserungs- und Homotopiebegriffe in beliebigen Kategorien untersucht worden. Dabei wurden beide Begriffe entweder unabhängig voneinander eingeführt, oder es wurde versucht, den Begriff der Faserung aus dem jeweiligen Homotopiebegriff abzuleiten. Betrachtet man allerdings die Kategorie der topologischen Räume, so scheint die Kenntnis der Homotopierelation zur Definition der (Hurewicz-) Faserungen nicht auszureichen, man muß zusätzlich die Konstruktion von „Homotopien" kennen.

Wir werden nun umgekehrt vom Faserungsbegriff ausgehen und zeigen, daß der Klasse der Faserungen in natürlicher Weise ein Homotopiebegriff zugeordnet werden kann. Die Beispiele zeigen, daß man so bei geeigneter Wahl der Faserungsklassen die übliche Homotopierelation in den Kategorien der topologischen Räume, der topologischen Räume mit Basispunkt, der simplizialen Mengen und der Kettenkomplexe über einer abelschen Kategorie erhält. Entsprechend wird in einer abelschen Kategorie mit genügend projektiven Objekten der Klasse der Epimorphismen die Eckmann-Hilton-Homotopie zugeordnet. Dualisieren wir, so läßt sich in der Kategorie der topologischen Räume der Homotopiebegriff auch aus der Klasse der Cofaserungen ableiten.

Wir beschränken uns auf Kategorien mit endlichen Limites und endlichen Colimites[1]. Im ersten Teil ordnen wir den in [8] eingeführten Diagonalisierungspaaren $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ einen Homotopiebegriff zu und leiten einige wichtige Eigenschaften ab. – Im zweiten Teil wenden wir uns denjenigen Diagonalisierungspaaren $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ zu, bei denen $\mathscr{C}$ nur Coretraktionen enthält und nennen sie Faserpaare. Die Faserpaare einer Kategorie entsprechen gerade den Klassen der $\mathscr{M}$-Faserungen [1]. In additiven Kategorien erhält man auf diese Weise die projektiven Klassen im Sinne von Eilenberg und Moore [2][2], die zugehörige Homotopiekategorie wurde von Freyd in [3] eingeführt. Allgemein ist die Homotopiekategorie zum Faserpaar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ in der Kategorie $\mathscr{K}$ die Quotientenkategorie $\mathscr{K}/\mathscr{C}$. – Der dritte Teil bringt als Anwendung einige Beispiele, insbesondere wird dabei der Zusammenhang zur Quillenschen Theorie hergestellt.

Für viele wertvolle Anregungen und Hinweise bin ich Friedrich Wilhelm Bauer zu Dank verpflichtet.

---

[1] Im folgenden verstehen wir unter „Kategorie" immer eine Kategorie mit endlichen Limites und endlichen Colimites.

[2] bis auf eine Zerlegbarkeitsbedingung, siehe Fußnote 5.

1. Die Homotopiekategorie zu einem Diagonalisierungspaar

Sind c und f zwei Morphismen der Kategorie $\mathcal{K}$, so nennen wir das Paar (c, f) *diagonalisierbar*, wenn es zu jedem kommutativen Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ \cdot \arrow[r, "b"'] \arrow[ur, dashed] & \cdot \end{tikzcd} \qquad (*)$$

eine Diagonale, also einen Morphismus d mit

$$cd = a \quad \text{und} \quad df = b$$

gibt. Ist $\mathcal{X}$ eine Morphismenklasse, so bezeichnen wir mit $\mathrm{d_r}\mathcal{X}$ und $\mathrm{d_l}\mathcal{X}$ die folgendermaßen definierten Klassen

$$\mathrm{d_r}\mathcal{X} = \{f \mid (x, f) \text{ diagonalisierbar, für alle } x \in \mathcal{X}\},$$

$$\mathrm{d_l}\mathcal{X} = \{c \mid (c, x) \text{ diagonalisierbar, für alle } x \in \mathcal{X}\}.$$

Das Paar $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ zweier Morphismenklassen heißt *Diagonalisierungspaar* (kurz: D-Paar), wenn die beiden Gleichungen

$$\mathcal{F} = \mathrm{d_r}\mathcal{C} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \mathrm{d_l}\mathcal{F}$$

erfüllt sind; $\mathcal{F}$ heißt dann D-Klasse und $\mathcal{C}$ heißt *Co-D*-Klasse. Im folgenden sei $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ ein festes D-Paar in der Kategorie $\mathcal{K}$. Wir bezeichnen mit ϱ die Klasse der Paare $[d, d']$, wobei d und d' Diagonalen eines kommutativen Diagramms der Form $(*)$ mit $c \in \mathcal{C}$ und $f \in \mathcal{F}$ sind. $[d, d']$ gehört also genau dann zu ϱ, wenn es $c \in \mathcal{C}$ und $f \in \mathcal{F}$ mit

$$cd = cd' \quad \text{und} \quad df = d'f$$

gibt. Die von ϱ erzeugte distributive Äquivalenzrelation[3] heißt *Homotopierelation zu* $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$. Wir bezeichnen sie, falls keine Verwechslung möglich ist, mit $\sim$ und nennen zwei Morphismen x und y homotop, falls $x \sim y$ gilt. Die Faktorkategorie $\mathcal{K}/\sim$ heißt Homotopiekategorie zu $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$. Mit π bezeichnen wir den kanonischen Funktor

$$\pi : \mathcal{K} \to \mathcal{K}/\sim ,$$

der jedem Morphismus in $\mathcal{K}$ seine Äquivalenzklasse in $\mathcal{K}/\sim$ zuordnet. π hat die folgende universelle Eigenschaft: es ist $d^\pi = d'^\pi$ für $[d, d'] \in \varrho$, ist andererseits $T : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ ein Funktor mit $d^T = d'^T$ für $[d, d'] \in \varrho$, so läßt sich T eindeutig durch π faktorisieren.

Lemma 1. *Die Homotopierelation zu* $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ *wird als distributive Äquivalenzrelation von der Klasse der Paare* $[d, d']$ *mit*

$$cd = cd' = 1 \quad \textit{und} \quad df = d'f \qquad (**)$$

für ein $c \in \mathcal{C}$ *und eine Retraktion* $f \in \mathcal{F}$ *erzeugt.*

---

[3] Eine Relation ϱ auf $\mathcal{K}$ heißt distributiv, wenn aus $[a, b] \in \varrho$ für alle Morphismen x, y, für die xay definiert ist, $[xay, xby] \in \varrho$ folgt. Die von einer Relation ϱ erzeugte distributive Äquivalenzrelation ist die kleinste distributive Äquivalenzrelation, die ϱ enthält.

Beweis. ϱ' sei die Klasse der Paare $[d, d']$, zu denen es ein $c \in \mathscr{C}$ und eine Retraktion $f \in \mathscr{F}$ mit $(**)$ gibt.

Wir zeigen, daß ϱ in der von ϱ' erzeugten distributiven Äquivalenzrelation liegt. Daraus folgt dann, daß ϱ und ϱ' die gleiche distributive Äquivalenzrelation erzeugen. Sei also $[d, d'] \in \varrho$ und es seien die Gleichungen

$$cd = cd' \quad \text{und} \quad df = d'f$$

mit $c \in \mathscr{C}$, $f \in \mathscr{F}$ erfüllt.

Wir bilden das Pullback von df und f:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f'"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ \cdot \arrow[r, "df"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Wir können das Paar $1, d$ durch das Pullback faktorisieren und erhalten ein e mit

$$ef' = 1 \quad \text{und} \quad ep = d\,.$$

Wegen $1 \cdot df = d' \cdot f$ können wir auch 1, d' durch das Pullback faktorisieren und erhalten ein e' mit

$$e'f' = 1 \quad \text{und} \quad e'p = d'\,.$$

Da nun $(ce)f' = c \cdot 1 = (ce')f'$ und $(ce)p = cd = cd' = (ce')p$ gilt, folgt aus der Eindeutigkeit der Faktorisierung durch das Pullback die Gleichung

$$ce = ce'\,.$$

Wir bilden jetzt das Pushout von c und ce:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "ce"] \arrow[d, "c"'] & \cdot \arrow[d, "c'"] \\ \cdot \arrow[r, "q"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

und erhalten entsprechend zwei Abbildungen g und g' mit

$$qg = e\,, \quad qg' = e'\,, \quad c'g = 1 = c'g'\,,$$

und die Eindeutigkeit der Faktorisierung liefert wieder

$$gf' = g'f'\,.$$

Mit c liegt auch c' in $\mathscr{C}$, entsprechend liegt mit f auch f' in $\mathscr{F}$. f' ist Retraktion, denn es gilt die Gleichung

$$(qg')\,f' = e'f' = 1\,.$$

Damit ist gezeigt, daß das Paar $[g, g']$ in ϱ' liegt. Da nun die Gleichung

$$[d, d'] = [e, e']\,p = q\,[g, g']\,p$$

erfüllt ist (dabei steht $[e, e']p$ für $[ep, e'p]$, um anzudeuten, daß p gemeinsamer Faktor ist), liegt $[d, d']$ in der von $[g, g']$ erzeugten distributiven Äquivalenzrelation.

Wir bezeichnen mit $\mathscr{R}$ die Klasse der Retraktionen in $\mathscr{K}$, mit $\mathscr{S}$ die der Coretraktionen („Schnitte") in $\mathscr{K}$. Eine unmittelbare Folgerung von Lemma 1 ist:

Korollar. *Die Homotopierelation zu $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ hängt nur von den Klassen $\mathscr{C} \cap \mathscr{S}$ und $\mathscr{F} \cap \mathscr{R}$ ab.*

Beweis. Wir können ϱ' in der Form

$$\varrho' = \{[d, d'] \mid \text{Es gibt } c \in \mathscr{C} \cap \mathscr{S},\ f \in \mathscr{F} \cap \mathscr{R} \text{ mit } (**)\}$$

schreiben.

Ein Morphismus x heißt *zerlegbar* (für vorgegebenes *D-Paar* $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$), wenn es $x_1 \in \mathscr{C}$, $x_2 \in \mathscr{F}$ mit $x = x_1 x_2$ gibt.

Lemma 2. *Sind alle Retraktionen oder alle Coretraktionen zerlegbar, so wird die Homotopierelation zu $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ als distributive Äquivalenzrelation von der Klasse*

$$\tau = \{[ru, 1] \mid ur = 1, u \in \mathscr{C}, r \in \mathscr{F}\}$$

erzeugt.

Beweis. Wir setzen voraus, daß alle Retraktionen zerlegbar sind. Durch Dualisieren folgt dann die Behauptung auch für den Fall, daß nur die Coretraktionen zerlegbar sind. Sei also $[d, d']$ in ϱ' und sei $c \in \mathscr{C}$, $f \in \mathscr{F} \cap \mathscr{R}$ mit

$$cd = cd' = 1 \qquad \text{und} \qquad df = d'f$$

gegeben. Da $cd = 1$ gilt, ist d eine Retraktion, also gibt es nach Voraussetzung $d_1 \in \mathscr{C}$, $d_2 \in \mathscr{F}$ mit $d = d_1 d_2$.
Die Gleichung

$$d_1(d_2 f) = d' f$$

besitzt wegen $d_1 \in \mathscr{C}, f \in \mathscr{F}$ eine Diagonale d'_2, für die also

$$d_1 d'_2 = d' \qquad \text{und} \qquad d'_2 f = d_2 f$$

gilt. Nun ist $c d_1 d'_2 = cd' = 1$, also haben wir

$$[d, d'] = d_1 [d_2, d'_2] = d_1 [d_2(c d_1 d'_2), d'_2] = d_1 [d_2(c d_1), 1] d'_2 .$$

Da d_2 zu $\mathscr{F}$, cd_1 zu $\mathscr{C}$ gehört und die Gleichung $(cd_1)d_2 = 1$ erfüllt ist, liegt das Paar $[d_2(cd_1), 1]$ in τ. $[d, d']$ gehört also zu der von τ erzeugten distributiven Äquivalenzrelation.

Umgekehrt gehören alle Paare aus τ zu ϱ, daher stimmt die von τ erzeugte distributive Äquivalenzrelation mit der von ϱ erzeugten distributiven Äquivalenzrelation überein.

Aus Lemma 2 folgt unmittelbar, daß die Homotopiekategorie $\mathscr{K}/\sim$ eine Quotientenkategorie im Sinne von [1] ist:

Satz 1. *$(\mathscr{C},\mathscr{F})$ sei ein D-Paar in $\mathscr{K}$. Sind alle Retraktionen oder alle Coretraktionen zerlegbar, so ist die Homotopiekategorie $\mathscr{K}/\sim$ zu $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ Quotientenkategorie zur Klasse*

$$\{ru \mid ur = 1, u \in \mathscr{C}, r \in \mathscr{F}\}.$$

Wir wenden uns nun der Untersuchung additiver Kategorien zu.

Lemma 3. *$(\mathscr{C},\mathscr{F})$ sei D-Paar in einer additiven Kategorie. Dann ist die Homotopiekategorie $\mathscr{K}/\sim$ additiv und der kanonische Funktor $\pi:\mathscr{K}\to\mathscr{K}/\sim$ ist additiv.*

Beweis. Man verifiziert, daß für jedes Objekt X aus $[d,d']\in\varrho$ auch $[d\oplus 1_X, d'\oplus 1_X]\in\varrho$ folgt. Die von ϱ erzeugte distributive Äquivalenzrelation ist daher additiv.

Wir haben vorausgesetzt, daß $\mathscr{K}$ endliche Limites und endliche Colimites besitzt. Insbesondere gibt es also ein Anfangsobjekt $\ominus$ und ein Endobjekt $\ominus$[4]. $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ sei wieder ein festes D-Paar. Wir nennen C ein *$\mathscr{C}$-Objekt*, wenn der Morphismus $\ominus\to C$ zu $\mathscr{C}$ gehört. $\mathscr{C}_0$ sei die Klasse aller $\mathscr{C}$-Objekte. Wir sagen, daß $\mathscr{K}$ genügend $\mathscr{C}$-Objekte besitzt, wenn es zu jedem Objekt X einen Morphismus $X'\to X$ in $\mathscr{F}$ gibt, wobei X' ein $\mathscr{C}$-Objekt ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß sich die Morphismen der Form $\ominus\to X$ zerlegen lassen. Dual zum Begriff des $\mathscr{C}$-Objekts ist der des $\mathscr{F}$-Objekts: F heißt *$\mathscr{F}$-Objekt*, wenn $F\to\ominus$ zu $\mathscr{F}$ gehört. $\mathscr{K}$ besitzt genügend $\mathscr{F}$-Objekte, wenn es zu jedem Objekt Y ein $\mathscr{F}$-Objekt Y' und einen Morphismus $Y\to Y'$ in $\mathscr{C}$ gibt.

In additiven Kategorien können wir den kanonischen Funktor $\pi:\mathscr{K}\to\mathscr{K}/\sim$ folgendermaßen charakterisieren:

Satz 2. *$\mathscr{K}$ sei additive Kategorie. $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ sei ein D-Paar und $\mathscr{K}$ besitze genügend $\mathscr{C}$-Objekte oder genügend $\mathscr{F}$-Objekte. Dann ist der Funktor $\pi:\mathscr{K}\to\mathscr{K}/\sim$ additiv und annulliert die Objekte in $\mathscr{C}_0\cap\mathscr{F}_0$. Jeder Funktor $T:\mathscr{K}\to\mathscr{L}$, der additiv ist und die Objekte in $\mathscr{C}_0\cap\mathscr{F}_0$ annulliert, läßt sich eindeutig durch π faktorisieren.*

Beweis. In Lemma 3 haben wir gezeigt, daß π additiv ist. Ist $X\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{F}_0$, und bezeichnen wir mit $n:X\to X$ die Nullabbildung von X, mit 1 die Identität von X, so gehört $[n,1]$ zu ϱ, also wird X von π annulliert.

Wir zeigen als nächstes:

Besitzt $\mathscr{K}$ genügend $\mathscr{C}$-Objekte, so lassen sich alle Coretraktionen zerlegen.

Ist nämlich u eine Coretraktion, so können wir annehmen, daß $u:A\to A\oplus B$ die Inklusion des ersten Summanden in die Summe $A\oplus B$ ist; nach Voraussetzung gibt es zu B ein Objekt B' in $\mathscr{C}_0$ und einen Morphismus $b:B'\to B$ in $\mathscr{F}$. Ist $v:A\to A\oplus B'$ wieder die Inklusion des ersten Summanden, so gehört v zu $\mathscr{C}$, denn v ist (isomorph zu) $1_A\oplus(0\to B')$. Die Abbildung $1_A\oplus b$ liegt in $\mathscr{F}$, da sie Produkt zweier Abbildungen aus $\mathscr{F}$ ist, Aus der Gleichung $u=v(1\oplus b)$ folgt nun, daß u zerlegbar ist.

Wir setzen jetzt voraus, daß $\mathscr{K}$ genügend $\mathscr{C}$-Objekte besitzt. Sei $T:\mathscr{K}\to\mathscr{L}$ ein additiver Funktor, der die Objekte in $\mathscr{C}_0\cap\mathscr{F}_0$ annulliert. Wenn wir zeigen,

---

[4] $\ominus$ ist Anfangsobjekt von $\mathscr{K}$, wenn für alle Objekte X die Menge $\mathscr{K}(\ominus, X)$ einelementig ist. Der duale Begriff ist der des Endobjekts.

daß T die Morphismen in

$$\mathscr{T} = \{ru \mid ur = 1, u \in \mathscr{C}, r \in \mathscr{F}\}$$

auf Isomorphismen abbildet, so folgt aus Satz 1 die Behauptung. Sei nun $ru \in \mathscr{T}$. Wegen $ur = 1$ können wir annehmen, daß $u: A \to A \oplus B$ die Inklusion von A in die Summe $A \oplus B$, entsprechend $r: A \oplus B \to A$ die Projektion von $A \oplus B$ auf B ist. Da u in $\mathscr{C}$ liegt, ist B ein $\mathscr{C}$-Objekt, da r in $\mathscr{F}$ liegt, ist B auch ein $\mathscr{F}$-Objekt. $n_B: B \to B$ sei die Nullabbildung von B, 1_A und 1_B seien die Identitäten von A und B. Da B in $\mathscr{C}_0 \cap \mathscr{F}_0$ liegt, gilt

$$n_B^T = 1_B^T .$$

Da wir die Abbildung ru in der Form $1_A \oplus n_B$ schreiben können, und ein additiver Funktor mit $\oplus$ verträglich ist, erhalten wir

$$(ru)^T = (1_A \oplus n_B)^T \approx 1_A^T \oplus n_B^T = 1_A^T \oplus 1_B^T = 1_{A \oplus B}^T .$$

Falls also $\mathscr{K}$ genügend $\mathscr{C}$-Objekte besitzt, gilt die Behauptung. Besitzt $\mathscr{K}$ genügend $\mathscr{F}$-Objekte, so folgt die Aussage durch Dualisieren.

Korollar. *$\mathscr{K}$ sei additive Kategorie. $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ sei ein D-Paar und $\mathscr{K}$ besitze genügend $\mathscr{C}$-Objekte oder genügend $\mathscr{F}$-Objekte. Dann sind zwei Morphismen g und h genau dann homotop, wenn $g - h$ durch ein Objekt aus $\mathscr{C}_0 \cap \mathscr{F}_0$ faktorisiert werden kann.*

Beweis. Wir definieren eine Relation σ in $\mathscr{K}$ folgendermaßen: $[g, h] \in \sigma$ genau dann, wenn $g - h$ durch ein Objekt aus $\mathscr{C}_0 \cap \mathscr{F}_0$ faktorisiert werden kann. Da $\mathscr{C}_0 \cap \mathscr{F}_0$ abgeschlossen gegen Summenbildung ist, ist σ eine distributive Äquivalenzrelation. Der kanonische Funktor $T: \mathscr{K} \to \mathscr{K}/\sigma$ ist additiv und annulliert die Objekte in $\mathscr{C}_0 \cap \mathscr{F}_0$, also läßt sich T durch π faktorisieren: homotope Morphismen g und h erfüllen die Beziehung $[g, h] \in \sigma$. Ist umgekehrt $g - h$ durch $X \in \mathscr{C}_0 \cap \mathscr{F}_0$ faktorisierbar, so gilt für die Morphismen $c: 0 \to X$ und $f: X \to 0$ sowohl $c(g-h) = c \cdot o$, als auch $(g-h)f = o \cdot f$. Demnach gehört $[g - h, o]$ zu ϱ und wegen Lemma 3 sind g und h homotop.

2. Faserpaare

Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein D-Paar und enthält $\mathscr{C}$ nur Coretraktionen, so ist jedes Objekt X ein $\mathscr{F}$-Objekt, denn aus $cr = 1$ folgt, daß $d = ra$ eine Diagonale von

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] & X \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r] & \ominus \end{tikzcd} \qquad (*)$$

ist. Ist andererseits jedes Objekt ein $\mathscr{F}$-Objekt und ist $c: X \to Y$ ein Morphismus in $\mathscr{C}$, so gibt es im Diagramm $(*)$ für $a = 1$ eine Diagonale r, also $cr = 1$. $\mathscr{C}$ enthält daher nur Coretraktionen. Enthält $\mathscr{C}$ nur Coretraktionen, so werden wir $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein *Faserpaar* nennen.

Bauer und Dugundji haben in [1] den Begriff der $\mathscr{X}$-Faserung eingeführt. Wir wollen zeigen, daß die so definierten Klassen der $\mathscr{X}$-Faserungen den D-Klassen von Faserpaaren entsprechen. Wir wiederholen zuerst die Definition: Ist $\mathscr{X}$ eine Morphismenklasse, so heißt f $\mathscr{X}$-Faserung, wenn es zu jedem Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "x"] & \cdot \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ & & \cdot \end{tikzcd} \tag{$**$}$$

mit $xaf = xb$ und $x \in \mathscr{X}$ einen Morphismus a' mit

$$xa = xa' \quad \text{und} \quad a'f = b$$

gibt.

Lemma 4. *Enthält $\mathscr{X}$ nur Coretraktionen, so ist $\mathrm{d}_r\mathscr{X}$ die Klasse aller $\mathscr{X}$-Faserungen.*

Beweis. Ist f eine $\mathscr{X}$-Faserung und ist die Gleichung

$$xb = af$$

mit $x \in \mathscr{X}$ gegeben, so betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "x"] & \cdot \arrow[r, "ra"] \arrow[dr, "b"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ & & \cdot \end{tikzcd}$$

dabei sei r ein Morphismus mit $xr = 1$. Da die Gleichung $xraf = 1 \cdot af = af = xb$ gilt, gibt es einen Morphismus a' mit

$$x(ra) = xa' \quad \text{und} \quad a'f = b\,.$$

wegen $xr = 1$ ist a' die gesuchte Diagonale.

Umgekehrt sei f aus $\mathrm{d}_r\mathscr{X}$ und das Diagramm $(**)$ mit $xaf = xb$ und $x \in \mathscr{X}$ gegeben. Die Gleichung

$$xb = (xa)f$$

besitzt wegen $x \in \mathscr{X}$ und $f \in \mathrm{d}_r\mathscr{X}$ eine Diagonale d mit

$$xd = xa \quad \text{und} \quad df = b\,,$$

daher ist d der gesuchte Morphismus.

Wir können nun zeigen, daß es zu jeder Morphismenklasse $\mathscr{X}$ eine Morphismenklasse $\mathscr{Y}$ gibt, die nur Coretraktionen enthält, so daß f genau dann $\mathscr{X}$-Faserung ist, wenn f $\mathscr{Y}$-Faserung ist. Daraus folgt dann, daß für beliebiges $\mathscr{X}$ die Klasse der $\mathscr{X}$-Faserungen D-Klasse eines Faserpaares ist:

Satz 3. *Die Morphismenklasse $\mathscr{F}$ ist genau dann die Klasse aller $\mathscr{X}$-Faserungen (für eine Klasse $\mathscr{X}$), wenn $(\mathrm{d}_l\mathscr{F}, \mathscr{F})$ ein Faserpaar ist. $\mathscr{F}$ ist dann die Klasse der $\mathrm{d}_l\mathscr{F}$-Faserungen.*

Beweis. Ist $(\mathrm{d}_1\mathscr{F}, \mathscr{F})$ ein Faserpaar, so besagt das Lemma 4, daß $\mathscr{F} = \mathrm{d}_r\mathrm{d}_1\mathscr{F}$ gerade die Klasse aller $\mathrm{d}_1\mathscr{F}$-Faserungen ist. Sei umgekehrt eine beliebige Klasse $\mathscr{X}$ gegeben und $\mathscr{F}$ die Klasse der $\mathscr{X}$-Faserungen. Wir bezeichnen mit $\mathscr{P}$ den Pushoutabschluß von $\mathscr{X}$, also die Klasse aller Morphismen p, für die es ein Pushoutdiagramm der Form

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "z"] \arrow[d, "x"'] & \cdot \arrow[d, "p"] \\ \cdot \arrow[r, "z'"'] & \cdot \end{tikzcd} \tag{***}$$

mit $x \in \mathscr{X}$ gibt. Man verifiziert unmittelbar, daß jede $\mathscr{X}$-Faserung eine $\mathscr{P}$-Faserung ist. $\mathscr{S}$ sei die Klasse der Coretraktionen. Wir zeigen als erstes:

(1) Jede $(\mathscr{P} \cap \mathscr{S})$-Faserung ist $\mathscr{P}$-Faserung.

f sei also eine $(\mathscr{P} \cap \mathscr{S})$-Faserung und im Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "p"] & \cdot \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "b"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ & & \cdot \end{tikzcd}$$

mit $p \in \mathscr{P}$ gelte die Gleichung $paf = pb$. Wir bilden das Pushout von p und pa:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "pa"] \arrow[d, "p"'] & \cdot \arrow[d, "p'"] \\ \cdot \arrow[r, "q"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Das Morphismenpaar a, 1 läßt sich wegen $p \cdot a = pa \cdot 1$ durch das Pushout faktorisieren und wir erhalten $\bar{a}$ mit

$$q\bar{a} = a \quad \text{und} \quad p'\bar{a} = 1 .$$

Da nach Voraussetzung die Gleichung $p \cdot b = pa \cdot f$ gilt, können wir auch die Morphismen b und f durch das Pushout faktorisieren und erhalten $\bar{b}$ mit

$$q\bar{b} = b \quad \text{und} \quad p'\bar{b} = f .$$

Im Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "p'"] & \cdot \arrow[r, "\bar{a}"] \arrow[dr, "\bar{b}"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ & & \cdot \end{tikzcd}$$

gilt die Gleichung

$$p'\bar{a}f = 1 \cdot f = p'\bar{b} .$$

Nun ist $\mathscr{P}$ pushout-abgeschlossen, also liegt mit p auch p' in $\mathscr{P}$. Andererseits ist aber $p'\bar{a} = 1$, daher ist p' eine Coretraktion. Da p' in $\mathscr{P} \cap \mathscr{S}$ liegt und f $(\mathscr{P} \cap \mathscr{S})$-Faserung ist, gibt es einen Morphismus $\bar{a}'$ mit

$$p'\bar{a} = p'\bar{a}' \quad \text{und} \quad \bar{a}'f = \bar{b} .$$

Wir setzen $a' = q\overline{a}'$. Dann gilt:

$$pa' = pq\overline{a}' = pap'\overline{a}' = pap'\overline{a} = pu\,,$$
$$a'f = q\overline{a}'f = q\overline{b} = b\,,$$

also ist a' der gesuchte Morphismus.

(2) $\mathscr{F}$ ist die Klasse der $(\mathscr{P}\cap\mathscr{S})$-Faserungen.

Ist f $\mathscr{X}$-Faserung, so auch $\mathscr{P}$-Faserung, damit aber auch $(\mathscr{P}\cap\mathscr{S})$-Faserung, denn $\mathscr{P}\cap\mathscr{S} \subseteqq \mathscr{P}$. Ist f $(\mathscr{P}\cap\mathscr{S})$-Faserung, so nach (1) auch $\mathscr{P}$-Faserung, damit aber auch $\mathscr{X}$-Faserung, denn $\mathscr{X} \subseteqq \mathscr{P}$.

(3) $(\mathrm{d}_l\mathscr{F}, \mathscr{F})$ ist Faserpaar.

Wegen (2) folgt aus Lemma 3 die Gleichung

$$\mathscr{F} = \mathrm{d}_r(\mathscr{P}\cap\mathscr{S}),$$

und es bleibt zu zeigen, daß $\mathrm{d}_l\mathscr{F}$ nur Coretraktionen enthält. Nun ist aber

$$\mathrm{d}_l\mathscr{F} = \mathrm{d}_l\mathrm{d}_r(\mathscr{P}\cap\mathscr{S}) \subseteqq \mathrm{d}_l\mathrm{d}_r\mathscr{S} = \mathscr{S}\,,$$

denn $\mathscr{S}$ ist *Co-D*-Klasse (es ist $\mathscr{S} = \mathrm{d}_l\{X \to \otimes \mid X \text{ beliebiges Objekt}\}$).

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir haben $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein Faserpaar genannt, falls $\mathscr{C}$ nur Coretraktionen enthält. Der duale Begriff ist der des Cofaserpaares: $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ist ein *Cofaserpaar*, wenn $\mathscr{F}$ nur Retraktionen enthält. In [1] ist neben dem Begriff der $\mathscr{X}$-Faserung auch der der $\mathscr{X}$-Cofaserung eingeführt worden. Dualisieren wir Satz 3, so erhalten wir die Aussage, daß eine Morphismenklasse $\mathscr{C}$ genau dann die Klasse aller $\mathscr{X}$-Cofaserungen ist, wenn $(\mathscr{C}, \mathrm{d}_r\mathscr{C})$ ein Cofaserpaar ist, und entsprechend ist $\mathscr{C}$ die Klasse der $\mathrm{d}_r\mathscr{C}$-Cofaserungen.

Wir wollen uns nun einer Klasse von D-Paaren zuwenden, die schon in Arbeiten von Eilenberg und Moore [2] und Maranda [6] untersucht worden ist. Das D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ heißt *projektives Paar*, wenn es eine Objektklasse $\mathscr{P}$ mit

$$\mathscr{F} = \mathrm{d}_r\{\otimes \to P \mid P \in \mathscr{P}\}$$

gibt (dabei sei $\otimes$ wieder ein Anfangsobjekt der Kategorie)[5]. Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein projektives Paar, so können wir für $\mathscr{P}$ gerade die Klasse der $\mathscr{C}$-Objekte nehmen, $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ist also durch die Klasse der $\mathscr{C}$-Objekte schon eindeutig bestimmt.

Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein projektives Paar, so sieht man sofort, daß mit $f_1 f_2$ auch f_2 zu $\mathscr{F}$ gehört. Insbesondere gehören alle Retraktionen zu $\mathscr{F}$. Sei nun umgekehrt $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein D-Paar mit genügend $\mathscr{C}$-Objekten, das die Eigenschaft hat, daß mit $f_1 f_2$ auch f_2 zu $\mathscr{F}$ gehört. Trivialerweise gilt

$$\mathscr{F} \subseteqq \mathrm{d}_r\{\otimes \to C \mid C \in \mathscr{C}_0\}\,.$$

[5] Die projektiven Klassen im Sinne von [2] sind gerade die D-Klassen von projektiven Paaren $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ mit genügend $\mathscr{C}$-Objekten. In diesem Fall heißt $(\mathscr{C}_0, \mathscr{F})$ bei Maranda [6] projektive Struktur.

Sei nun $g: A \to B$ aus $\mathrm{d_r}\{\otimes \to C | C \in \mathscr{C}_0\}$. Nach Voraussetzung gibt es zu B einen Morphismus $b: B' \to B$ in $\mathscr{F}$ mit B' in $\mathscr{C}_0$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \otimes \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "g"] \\ B' \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd}$$

besitzt eine Diagonale d und aus der Gleichung $b = dg$ folgt, daß mit b auch g zu $\mathscr{F}$ gehört. Ein D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ mit genügend $\mathscr{C}$-Objekten ist also genau dann ein projektives Paar, wenn mit $f_1 f_2$ auch f_2 zu $\mathscr{F}$ gehört.

Besitzt die Kategorie $\mathscr{K}$ ein Nullobjekt, so sind alle Morphismen der Form $0 \to X$ Coretraktionen, und daher sind in solchen Kategorien projektive Paare Faserpaare. Da in additiven Kategorien (mit Cokernen) jede Coretraktion als Inklusion eines Summanden A in die Summe $A \oplus A'$ aufgefaßt werden kann, gilt dort auch die Umkehrung:

Satz 4. *In additiven Kategorien sind die Faserpaare gerade die projektiven Paare.*

Aus diesem Satz folgt, daß in additiven Kategorien $(\mathscr{S}, \mathscr{R})$ ein D-Paar ist ($\mathscr{S}$ die Klasse der Coretraktionen, $\mathscr{R}$ die der Retraktionen). $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ist daher genau dann ein Faserpaar, wenn $\mathscr{F}$ alle Retraktionen enthält.

Betrachten wir die Homotopiekategorie $\mathscr{K}/\sim$ zu einem Faserpaar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$, so wissen wir aus Satz 1, daß $\mathscr{K}/\sim$ unter gewissen Voraussetzungen eine Quotientenkategorie ist. Hier können wir auf diese Voraussetzungen verzichten, es gilt nämlich:

Satz 5. *Die Homotopiekategorie zu einem Faserpaar $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ist die Quotientenkategorie zur Klasse $\mathscr{C}$.*

Beweis. Sei $c \in \mathscr{C}$. Nach Voraussetzung gibt es ein r mit $cr = 1$. Wenn wir zeigen, daß $[rc, 1]$ zu ϱ gehört, wissen wir, daß c in der Homotopiekategorie $\mathscr{K}/\sim$ ein Isomorphismus wird. Einerseits ist $c(rc) = c \cdot 1$, andererseits sind alle Objekte der Kategorie $\mathscr{F}$-Objekte, und ist n die Abbildung vom Zielobjekt von c auf das Endobjekt $\ominus$ der Kategorie, so ist $(rc)n = 1 \cdot n$ (und $n \in \mathscr{F}$). Also gehört $[rc, 1]$ wirklich zu ϱ. Damit ist gezeigt, daß der kanonische Funktor $\pi: \mathscr{K} \to \mathscr{K}/\sim$ ganz $\mathscr{C}$ auf Isomorphismen abbildet. Sei nun $T: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ ein Funktor, der $\mathscr{C}$ auf Isomorphismen abbildet. Ist $[d, d'] \in \varrho$, so gibt es ein $c \in \mathscr{C}$ mit $cd = cd'$. Unter dem Funktor T erhalten wir

$$c^T d^T = c^T d'^T ,$$

und da c^T ein Isomorphismus ist, gilt $d^T = d'^T$. Daraus folgt aber, daß sich T eindeutig durch π faktorisieren läßt.

Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ ein Faserpaar in einer additiven Kategorie, so sind alle Objekte der Kategorie $\mathscr{F}$-Objekte: es gibt also genügend $\mathscr{F}$-Objekte, und es gilt die Gleichung $\mathscr{C}_0 \cap \mathscr{F}_0 = \mathscr{C}_0$. Nach Satz 2 wissen wir daher, daß der Homotopie-funktor $\pi : \mathscr{K} \to \mathscr{K}/\sim$ der universelle additive Funktor ist, der die $\mathscr{C}$-Objekte annulliert. Das Korollar zu Satz 2 besagt, daß zwei Morphismen g, h genau dann homotop sind, wenn $g-h$ durch ein $\mathscr{C}$-Objekt faktorisiert werden kann. Freyd hat in [3] zu einer Objektklasse $\mathscr{P}$, die "ample" ist, die Quotientenkategorie $\mathscr{K}/\mathscr{P}$ betrachtet. Man sieht, daß $\mathscr{K}/\mathscr{P}$ gerade die Homotopiekategorie zum projektiven Paar $(\mathrm{d_l d_r}\{0 \to P \mid P \in \mathscr{P}\}, \mathrm{d_r}\{0 \to P \mid P \in \mathscr{P}\})$ ist.

3. Beispiele

Im folgenden wollen wir einige wichtige D-Paare in speziellen Kategorien angeben und den zugehörigen Homotopiebegriff untersuchen. Es wird sich zeigen, daß bei gewissen D-Paaren unser Homotopiebegriff mit dem üblichen „Homotopie"-Begriff, wie er in diesen Kategorien gegeben ist, übereinstimmt (dabei bezeichnen wir zur Unterscheidung den üblichen „Homotopie"-Begriff durch Anführungsstriche).

(a) In der Kategorie $\mathfrak{T}$ der topologischen Räume und stetigen Abbildungen bezeichnen wir mit I das Einheitsintervall. $\mathfrak{X}$ sei die Klasse der Abbildungen

$$i_0 : X \to X \times I, \quad \text{mit} \quad i_0(x) = (x, o) \quad \text{für} \quad x \in X.$$

$\mathfrak{F} = \mathrm{d_r}\mathfrak{X}$ ist die Klasse der Hurewicz-Faserungen. Da $\mathfrak{X}$ nur Coretraktionen enthält, ist $(\mathrm{d_l}\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$ ein Faserpaar.

Wir zeigen, daß $\mathrm{d_l}\mathfrak{F}$ nur „Homotopie"-Äquivalenzen enthält. Liegt c in $\mathrm{d_l}\mathfrak{F}$, so liefert die übliche Zerlegung von c in eine „Homotopie"-Äquivalenz und eine Hurewicz-Faserung Abbildungen s, f, p mit $f \in \mathfrak{F}$ und

$$c = sf, \; sp = 1 \quad \text{und} \quad ps \text{„}\sim\text{"} 1$$

([9], 2.8.9). Die Gleichung

$$c \cdot 1 = sf$$

besitzt wegen $c \in \mathrm{d_l}\mathfrak{F}$ und $f \in \mathfrak{F}$ eine Diagonale d, für die also

$$cd = s \quad \text{und} \quad df = 1$$

gilt. Es bleibt zu zeigen, daß dp „homotopie"-invers zu c ist. Einerseits ist

$$c(dp) = sp = 1,$$

andererseits folgt aus ps „$\sim$" 1

$$(dp)c = (dp)(sf) = d(ps)f \text{„}\sim\text{"} d \cdot 1 \cdot f = df = 1.$$

Es ist damit gezeigt, daß c „Homotopie"-Äquivalenz ist.

Da die Quotientenkategorie $\mathfrak{T}/\mathfrak{X}$ gerade die übliche „Homotopie"-Kategorie ist, folgt aus Satz 5, daß auch die Homotopiekategorie zu $(\mathrm{d_l}\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$ mit der üblichen „Homotopie"-Kategorie übereinstimmt.

(b) In $\mathfrak{T}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{Y}$ die Klasse der Abbildungen

$$p_0 : X^I \to X, \quad \text{mit} \quad p_0(w) = w(o) \quad \text{für} \quad w \in X^I,$$

dabei trage der Raum X^I der stetigen Abbildungen von I nach X die kompakt-offene Topologie. Die Elemente in $\mathfrak{C} = \mathrm{d}_l \mathfrak{Y}$ sind gerade die üblichen Cofaserungen. Da $\mathfrak{Y}$ nur Retraktionen enthält, ist $(\mathfrak{C}, \mathrm{d}_r\mathfrak{C})$ ein Cofaserpaar.

Wir zeigen, daß $\mathrm{d}_r\mathfrak{C}$ nur „Homotopie"-Äquivalenzen enthält. Die Konstruktion des Abbildungszylinders liefert zu einer Abbildung f Abbildungen i, r, u mit $i \in \mathfrak{C}$ und

$$f = ir, \quad ur = 1 \quad \text{und} \quad ur „\sim" 1$$

([9], 1.5.12). Liegt f in $\mathrm{d}_r\mathfrak{C}$, so gibt es zur Gleichung

$$ir = 1 \cdot f$$

eine Diagonale d mit

$$id = 1 \quad \text{und} \quad df = r .$$

ud und f sind „homotopie"-invers zueinander, denn einerseits ist

$$(ud)f = u(df) = ur = 1 ,$$

andererseits folgt aus $ru „\sim" 1$

$$f(ud) = (ir)(ud) = i(ru)d „\sim" i \cdot 1 \cdot d = id = 1 .$$

Damit ist gezeigt, daß alle Abbildungen in $\mathrm{d}_r\mathfrak{C}$ „Homotopie"-Äquivalenzen sind.

Dualisieren wir Satz 5, so folgt, daß die Homotopiekategorie zu $(\mathfrak{C}, \mathrm{d}_r\mathfrak{C})$ gerade die Quotientenkategorie $\mathfrak{T}/\mathrm{d}_r\mathfrak{C}$ ist. Dies ist aber die übliche „Homotopie"-Kategorie, wie aus obigem unmittelbar folgt.

(c) Ist $\mathfrak{T}_*$ die Kategorie der topologischen Räume mit Basispunkt und der basispunkterhaltenden stetigen Abbildungen, so bilden wir entsprechend

$$\mathfrak{X}_* = \{i_0 : X \to X \times I^+ \mid i_0(x) = (x, o) \quad \text{für} \quad x \in X\}$$

wobei I^+ aus I durch Hinzufügung eines (zusätzlichen) Punktes als Basispunkt entsteht. Wir erhalten auch hier mit $\mathfrak{F}_* = \mathrm{d}_r\mathfrak{X}_*$ die Klasse der Hurewicz-Faserungen (nun von $\mathfrak{T}_*$).

Die Klasse $\mathfrak{Y}$ aus (b) können wir als Abbildungsklasse in $\mathfrak{T}_*$ ansehen (und schreiben dann $\mathfrak{Y}_*$): ist $*$ der Basispunkt von X, so sei $w_* \in X^I$ durch $w_*(t) = *$ für alle $t \in I$ definiert. Wir betrachten w_* als Basispunkt von X^I und sehen, daß die Abbildungen p_0 basispunkterhaltend sind. $\mathfrak{C}_* = \mathrm{d}_l\mathfrak{Y}_*$ ist die Klasse der Cofaserungen in $\mathfrak{T}_*$.

$(\mathrm{d}_l\mathfrak{F}_*, \mathfrak{F}_*)$ ist ein Faserpaar, $(\mathfrak{C}_*, \mathrm{d}_r\mathfrak{C}_*)$ ist ein Cofaserpaar, und wie in (a) und (b) zeigt man, daß die übliche „Homotopie"-Kategorie (definiert durch basispunkterhaltende „Homotopien") die Homotopiekategorie zu jedem der beiden D-Paare $(\mathrm{d}_l\mathfrak{F}_*, \mathfrak{F}_*)$ und $(\mathfrak{C}_*, \mathrm{d}_r\mathfrak{C}_*)$ ist.

(d) In [7] hat Quillen den Begriff einer Modellkategorie eingeführt. $\mathscr{K}$ sei nun Modellkategorie bezüglich $(\mathscr{C}, \mathscr{F}, \mathscr{W})$, wobei $\mathscr{C}$ die Klasse der „Cofaserungen", $\mathscr{F}$ die der „Faserungen" und $\mathscr{W}$ die der „schwachen Äquivalenzen" sei. Wir können annehmen, daß die Modellkategorie abgeschlossen ("closed") ist[6], daß also $(\mathscr{C}, \mathscr{F} \cap \mathscr{W})$ und $(\mathscr{C} \cap \mathscr{W}, \mathscr{F})$ zwei D-Paare sind.

Es gilt: *Die Homotopiekategorien zu* $(\mathscr{C}, \mathscr{F} \cap \mathscr{W})$ *und* $(\mathscr{C} \cap \mathscr{W}, \mathscr{F})$ *stimmen überein.* Die Homotopiekategorie zu $(\mathscr{C}, \mathscr{F} \cap \mathscr{W})$ ist nach Satz 1 die Quotientenkategorie zur Klasse

$$\mathscr{T} = \{ru \mid ur = 1, u \in \mathscr{C}, r \in \mathscr{F} \cap \mathscr{W}\}.$$

Aus $ur = 1$ folgt aber, daß r genau dann in $\mathscr{W}$ liegt, wenn u in $\mathscr{W}$ liegt. Wir können daher $\mathscr{T}$ schreiben als

$$\mathscr{T} = \{ru \mid ur = 1, u \in \mathscr{C} \cap \mathscr{W}, r \in \mathscr{F}\}.$$

Wieder mit Satz 1 sieht man, daß die Quotientenkategorie zu $\mathscr{T}$ auch die Homotopiekategorie zu $(\mathscr{C} \cap \mathscr{W}, \mathscr{F})$ ist.

Sei nun X „cofaserndes" Objekt, also $\otimes \to X$ in $\mathscr{C}$. Dann ist in $\mathscr{K}(X, Y)$ eine Äquivalenzrelation „linkshomotop" definiert. *Zwei Morphismen in* $\mathscr{K}(X, Y)$ *sind genau dann „linkshomotop", wenn sie homotop bezüglich* $(\mathscr{C}, \mathscr{F} \cap \mathscr{W})$ *(und damit auch bezüglich* $(\mathscr{C} \cap \mathscr{W}, \mathscr{F})$*) sind:* sind die Morphismen g, $h \in \mathscr{K}(X, Y)$ „linkshomotop", so gibt es eine Zerlegung der Faltungsabbildung $\nabla : X \oplus X \to X$

$$\nabla = cs, c \in \mathscr{C}, s \in \mathscr{F} \cap \mathscr{W}, \tag{$*$}$$

und einen Morphismus z mit

$$u_0 cz = g, u_1 cz = h,$$

dabei seien $u_i : X \to X \oplus X$ die Inklusionen in die Summe. Mit $\otimes \to X$ gehört auch u_i zu $\mathscr{C}$. Aus der Gleichung $(u_i c)s = 1$ folgt wegen $u_i c \in \mathscr{C}$ und $s \in \mathscr{F} \cap \mathscr{W}$

$$s(u_0 c) \sim 1 \sim s(u_1 c)$$

($\sim$ sei die Homotopierelation zu $(\mathscr{C}, \mathscr{F} \cap \mathscr{W})$). Daher erhalten wir

$$g = u_0 cz = (u_0 cs)(u_0 cz) = u_0 c(su_0 c) z \sim u_0 c(su_1 c) z = (u_0 cs)(u_1 cz) = u_1 cz = h.$$

Umgekehrt zeigen wir, daß homotope Morphismen g, h aus $\mathscr{K}(X, Y)$ „linkshomotop" sind. Wir setzen $g \underset{0}{\sim} h$, wenn es Morphismen a, b, y mit $g = ay$, $h = by$ und $[a, b] \in \varrho$ gibt. Da $\otimes \to X$ zu $\mathscr{C}$ gehört, ist $\underset{0}{\sim}$ distributiv; die Homotopierelation $\sim$ ist daher der transitive Abschluß von $\underset{0}{\sim}$. Sei nun $g \underset{0}{\sim} h$. Zu $[a, b] \in \varrho$ gibt es $f \in \mathscr{F} \cap \mathscr{W}$ mit $af = bf$. Wir betrachten eine Zerlegung $(*)$ der Faltungsabbildung. $a + b : X \oplus X \to Z$ sei durch $u_0(a + b) = a$, $u_1(a + b) = b$ definiert. Zur Gleichung

$$c(saf) = (a + b) f$$

[6] Ist $(\mathscr{C}, \mathscr{F}, \mathscr{W})$ eine beliebige Modellkategorie, so sieht man leicht, daß durch $\mathscr{C}' = d_l(\mathscr{F} \cap \mathscr{W})$, $\mathscr{F}' = d_r(\mathscr{C} \cap \mathscr{W})$, $\mathscr{W}' = \{gh \mid g \in d_l \mathscr{F}, h \in d_r \mathscr{C}\}$ eine geschlossene Modellkategorie $(\mathscr{C}', \mathscr{F}', \mathscr{W}')$ definiert wird. Dies ist die einzige geschlossene Modellkategorie mit $\mathscr{C} \subsetneq \mathscr{C}'$, $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{F}'$ und $\mathscr{W} \subsetneq \mathscr{W}'$; die Konstruktionen, die Quillen durchführt, stimmen für beide Modellkategorien überein.

gibt es eine Diagonale z', insbesondere gilt dann für $z = z'y$

$$u_0 cz = u_0(cz')\,y = u_0(a+b)\,y = ay = g\,,$$
$$u_1 cz = u_1(cz')\,y = u_1(a+b)\,y = by = h\,.$$

g und h sind demnach „linkshomotop". Da die Relation „linkshomotop" transitiv ist, folgt, daß zwei Morphismen g und h mit $g \sim h$ „linkshomotop" sind.

Eine spezielle Modellkategorie werden wir im nächsten Abschnitt untersuchen:

(e) Die Kategorie $\mathfrak{S}$ der simplizialen Mengen ist geschlossene Modellkategorie bezüglich $(\mathfrak{M}, \mathfrak{K}, \mathfrak{W})$, wobei $\mathfrak{M}$ die Klasse der Monomorphismen, $\mathfrak{K}$ die der Kanfaserungen, und $\mathfrak{W}$ die Klasse derjenigen Abbildungen ist, die unter dem Realisierungsfunktor $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ auf „Homotopie"Äquivalenzen abgebildet werden ([7]). Ist $\mathfrak{A}$ die Klasse der anodynen Erweiterungen, so ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{W}$, also ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{K})$ ein D-Paar[7].

Ist B ein Kankomplex, so ist in $\mathfrak{S}(A, B)$ eine Äquivalenzrelation „homotop" definiert. Aus (d) folgt, daß zwei Abbildungen in $\mathfrak{S}(A, B)$ genau dann „homotop" sind, wenn sie homotop bezüglich $(\mathfrak{A}, \mathfrak{K})$ sind. Dies kann man auch unmittelbar verifizieren.

(f) Ist $\mathscr{K}$ eine abelsche Kategorie mit genügend projektiven Objekten, und bezeichnen wir mit $\mathscr{S}_{\mathscr{P}}$ die Klasse der Coretraktionen, deren Cokern projektiv ist, mit $\mathscr{E}$ die Klasse der Epimorphismen, so ist $(\mathscr{S}_{\mathscr{P}}, \mathscr{E})$ ein Faserpaar. $\mathscr{S}_{\mathscr{P}}$-Objekte sind gerade die projektiven Objekte.

Die zugehörige Homotopierelation ist die Eckmann-Hilton-„Homotopie", denn zwei Morphismen g und h sind nach dem Korollar zu Satz 2 genau dann homotop bezüglich $(\mathscr{S}_{\mathscr{P}}, \mathscr{E})$, wenn $g - h$ durch ein projektives Objekt faktorisierbar ist.

(g) Wir betrachten die Kategorie $C(\mathscr{K})$ der Kettenkomplexe über einer abelschen Kategorie $\mathscr{K}$. Ist K ein Objekt aus $\mathscr{K}$, so definieren wir für jede ganze Zahl n einen Komplex $Z_n(K)$ durch

$$Z_n(K)_i = \begin{cases} K & \text{für} \quad i = n-1, n \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad i \neq n-1, n \end{cases},$$

$d_n : Z_n(K)_n \to Z_n(K)_{n-1}$ sei die Identität von K.

---

[7] Daß $(\mathfrak{A}, \mathfrak{K})$ ein D-Paar ist, folgt schon unmittelbar aus Satz 5.5.1 in [4]: denn nach Definition ist $\mathfrak{K} = d_r\mathfrak{A}$; liegt andererseits x in $d_l\mathfrak{K}$, so gibt es $a \in \mathfrak{A}$, $k \in \mathfrak{K}$ mit $x = ak$. Da (x, k) diagonalisierbar ist, gibt es zu $x \cdot 1 = ak$ eine Diagonale d und aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "x"'] & \cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "a"] & \cdot \arrow[d, "x"] \\ \cdot \arrow[r, "d"'] & \cdot \arrow[r, "k"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

mit $dk = 1$ folgt, daß mit a auch x eine anodyne Erweiterung ist.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Z}$ die folgende Morphismenklasse

$$\mathfrak{Z} = \{0 \to Z_n(K) \mid K \text{ Objekt in } \mathscr{K}, \, n \text{ ganze Zahl}\},$$

und bilden das projektive D-Paar $(\mathrm{d_l d_r}\mathfrak{Z}, \mathrm{d_r}\mathfrak{Z})$.

Die zusammenziehbaren Komplexe haben die Gestalt $\oplus Z_i(K_i)$, wobei K_i Objekt von $\mathscr{K}$ ist und i die ganzen Zahlen durchläuft. Da es zu jedem Kettenkomplex X einen zusammenziehbaren Komplex Y und einen Morphismus $p: Y \to X$ in $\mathrm{d_r}\mathfrak{Z}$ gibt, sind die $\mathscr{C}$-Objekte von $(\mathscr{C}, \mathscr{F}) = (\mathrm{d_l d_r}\mathfrak{Z}, \mathrm{d_r}\mathfrak{Z})$ gerade die zusammenziehbaren Komplexe. Daraus folgt, daß die Homotopierelation zu diesem D-Paar mit der üblichen „Homotopie"-Relation in $\mathrm{C}(\mathscr{K})$ übereinstimmt.

(h) Definieren wir in $\mathrm{C}(\mathscr{K})$ die Klasse $\mathfrak{Z}'$ durch

$$\mathfrak{Z}' = \{Z_n(K) \to 0 \mid K \text{ Objekt in } \mathscr{K}, \, n \text{ ganze Zahl}\},$$

so erhalten wir ein injektives D-Paar $(\mathscr{C}', \mathscr{F}') = (\mathrm{d_l}\mathfrak{Z}', \mathrm{d_r d_l}\mathfrak{Z}')$ in $\mathrm{C}(\mathscr{K})$ und hier gilt nun entsprechend:

Die $\mathscr{F}'$-Objekte sind gerade die zusammenziehbaren Objekte, es gibt genügend $\mathscr{F}'$-Objekte, und die Homotopierelation zu $(\mathscr{C}', \mathscr{F}')$ stimmt mit der üblichen überein.

(i) $\mathrm{A}(\mathscr{K})$ sei die Kategorie der augmentierten Kettenkomplexe über der abelschen Kategorie $\mathscr{K}$, also die volle Unterkategorie der Kettenkomplexe $(K_i)_i$ aus $\mathrm{C}(\mathscr{K})$ mit $K_i = o$ für $i < -1$. In dieser Kategorie heißen zwei Morphismen $f, g: X \to Y$ „homotop", wenn es eine „Homotopie" $(F_i: X_i \to Y_{i+1})_i$ in $\mathrm{C}(\mathscr{K})$ gibt, die zusätzlich die Bedingung $F_{-1} = o$ erfüllt.

Wir definieren $\mathfrak{Z}$ durch

$$\mathfrak{Z} = \{0 \to Z_n(K) \mid K \text{ Objekt aus } \mathscr{K}, \, n \geqq 1\},$$

und bilden das projektive D-Paar $(\mathscr{C}, \mathscr{F}) = (\mathrm{d_l d_r}\mathfrak{Z}, \mathrm{d_r}\mathfrak{Z})$ in $\mathrm{A}(\mathscr{K})$. Die durch dieses D-Paar definierte Homotopierelation ist wieder die übliche und die $\mathscr{C}$-Objekte sind gerade die in $\mathrm{A}(\mathscr{K})$ zusammenziehbaren Kettenkomplexe.

Literatur

1. Bauer, F. W., Dujundji, J.: Categorical homotopy and fibrations. Trans. Amer. Math. Soc. **140**, 239—256 (1969).
2. Eilenberg, S., Moore, J. C.: Foundations of relative homological algebra. Memoirs Amer. Math. Soc. 1965.
3. Freyd, P.: Representations in Abelian categories. In: Proceedings of the Conference on Categorical Algebra. Berlin 1966.
4. Gabriel, P., Zisman, M.: Calculus of fractions and homotopy theory (Ergebnisse 35). Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
5. Kamps, K. H.: Faserungen und Cofaserungen in Kategorien mit Homotopiesystem. Diss. Saarbrücken. 1968.

6. Maranda, J. M.: Injective structures. Trans. Amer. Math. Soc. **110**, 98—135 (1964).
7. Quillen, D. G.: Homotopical algebra. Lecture Notes 43. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
8. Ringel, C. M.: Diagonalisierungspaare I. Math. Z. **117**, 249—266 (1970).
9. Spanier, E.: Algebraic topology. New York: McGraw-Hill 1966.

Claus Michael Ringel
Mathematisches Institut der Universität
D-7400 Tübingen, Wilhelmstraße 7
z. Z. Department of Mathematics
Carleton-University
Ottawa, Canada

(Eingegangen am 24. Mai 1970)