Sigrid und
Günter Graumann

Lernsequenzen zur Grundschulmathematik I

Bericht über einen Unterrichtsversuch im 3. Schuljahr

I. Begründung und Planung des Unterrichtsversuchs

Vorüberlegungen zum Lerngegenstand ‚mathematische Strukturen'

Eine differenzierte mathematische Bildung schließt das Wissen um die Vielfältigkeit mathematischer Strukturen mit ein. Schon in der Grundschule sollte deshalb das Kind diese Vielfältigkeit erleben. Es müssen also neben der Mengenlehre auch andere Gebiete behandelt werden. Bei der Entwicklung neuer Unterrichtsgegenstände ergeben sich jedoch vielfältige Probleme. Einem systematischen, ausschließlich vom mathematischen Sachverhalt her geprägten Unterricht soll keinesfalls das Wort geredet werden. Es muß demnach eine Auswahl unter den Unterrichtsstoffen getroffen werden. Allgemeingültige Kriterien für diese Auswahl können wir zwar nicht formulieren, einige Gesichtspunkte wollen wir aber andeuten.

- *Besuden* sieht im *allgemein mathematischen Bildungswert* eine entscheidende Voraussetzung für die Auswahl eines mathematischen Stoffgebietes für den Grundschulunterricht. „Moderne Inhalte gehören dazu, aber sie müssen unter dem Gesichtspunkt ihres Bildungswertes ausgewählt werden."[1] Die augenblickliche Bedeutung eines Stoffes allein rechtfertigt die Einführung als Unterrichtsgegenstand nicht. Eine gegenwärtig äußerst bedeutungsvolle Materie kann innerhalb von zehn Jahren völlig nebensächlich werden, da die Mathematik seit dem vorigen Jahrhundert einem permanenten Prozeß der Umstrukturierung unterworfen ist[2].
- Der Sachverhalt der Struktur sollte einen *operativen Charakter* haben, um ein tatsächliches Tätigsein der Kinder am konkreten Modell zu ermöglichen. Diese Selbsttätigkeit der Kinder ist die Grundlage der Begriffsbildung, und damit auch eine Voraussetzung für die Entwicklung mathematischer Begriffe[3].
- Die *mathematische Phantasie* des Kindes muß sich im Umgang mit dem Unterrichtsgegenstand entwickeln. Die Bedeutung der Phantasie für den Mathematikunterricht ist bislang häufig unterschätzt worden[4]. Dieser Punkt muß vor allem bei methodischen Fragen berücksichtigt werden.
- Die Unterrichtsgegenstände sollen *nicht verfrüht* angeboten werden, sondern dem Schüler der Grundschule strukturmäßig entsprechen und für ihn leicht zugänglich sein[5].
- Als günstig für einen späteren Mathematikunterricht erweist es sich, wenn dessen Begriffe im Grundschulmathematikunterricht vorbereitet worden sind. Meistens ergibt sich eine solche *Vorbereitungsarbeit* von selbst, da die Grundlage hier wie dort die mathematische Struktur ist. Es sollen jedoch keinesfalls Begriffe in „vereinfachter Form" behandelt werden.

Im folgenden wird nun über einen Versuch berichtet, bei dem einzelne Eigenschaften der Gruppenstruktur erarbeitet werden. Als Modelle werden die Schiebungen und Drehungen aus der Bewegungsgeometrie sowie die sogenannten „Dienesmaschinen"[6] benutzt.

Im Vorwege wird kurz der mathematische Sachverhalt dargestellt.

1 *H. Besuden*, Topologie statt geometrischer Propädeutik in der Grundschule. WPB, 21. Jg. 1969, S. 164.

2 *R. Quenau*, Mathematik von morgen. Nymphenburger Verlagsbuchhandlung 1967. S. 10.

3 *H. Aebli*, Über die geistige Entwicklung des Kindes. Klett 1963.

4 *Thomas von Randow*, Mathematik soll Freude bereiten. Die Zeit Nr. 24, Jg. 1966, S. 23.

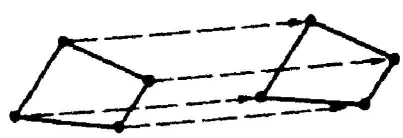
5 Leider ist für nur wenige mathematische Stoffe bereits eine entsprechende Analyse in entwicklungspsychologischer Hinsicht vorhanden.

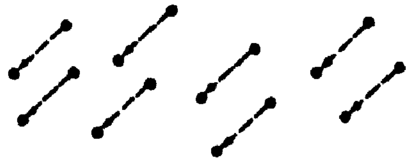
6 *Z. P. Dienes* stellte seine „Maschinen" auf einer Tagung im Herbst 1967 in Hamburg vor.

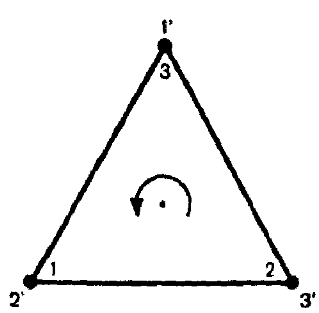
Der mathematische Sachverhalt

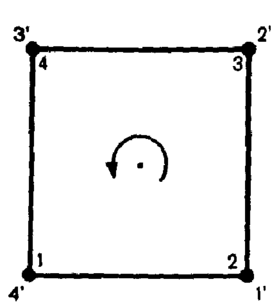
Unter einer *Gruppe* versteht man eine nicht leere Menge G, deren Elemente durch eine Operation verknüpft werden können, so daß die folgenden Voraussetzungen gelten. Die Operation bezeichnen wir hier mit „$\square$“.

1. *Abgeschlossenheit:* Verknüpft man zwei Elemente, so erhält man wieder ein Element der Menge ($a \square b \in G$).
2. *Neutrales Element:* Es existiert ein Nullelement[7] mit der folgenden Eigenschaft: Verknüpft man ein Element der Menge mit diesem Nullelement, so erhält man das Ausgangselement ($a \square 0 = 0 \square a = a$).
3. *Inverses Element:* Zu jedem Element a der Menge G existiert ein inverses Element $-a$ derart, daß es mit a verknüpft das Nullelement ergibt.
($a \square [-a] = [-a] \square a = 0$)
4. *Assoziativität:* Es gilt $(a \square b) \square c = a \square (b \square c)$ für drei beliebige Elemente der Menge G.









Bemerkenswert ist hierbei, daß über die Anzahl der Elemente der Menge nichts ausgesagt wird. Es gibt also Gruppen mit unendlich vielen Elementen und Gruppen mit einer beschränkten Anzahl von Elementen. Die kleinste Gruppe enthält nur ein Element, das Nullelement. Ein Beispiel einer Gruppe mit zwei Elementen ist die Menge mit den beiden Elementen „gerade Zahl“ und „ungerade Zahl“ sowie der Operation „+“. Eine Gruppe mit unendlich vielen Elementen ist die Menge der ganzen Zahlen mit der Operation „+“[8]. Eine Gruppe ist eine mathematische Grundstruktur, die nicht nur in einem Gebiet zu finden ist. Gruppen gibt es in der Algebra, in der Geometrie und in der Zahlentheorie.

Schiebungen und Drehungen sind Bewegungen in der euklidischen Ebene. Dabei heißen die ursprünglichen Punkte der Figur Anfangspunkte, die bewegten Punkte heißen Endpunkte. Die Zuordnung, die jedem Anfangspunkt seinen Endpunkt zuweist, wird Bewegung genannt. Früher wurde der gesamte Vorgang als Bewegung bezeichnet, aber heutzutage nimmt man im Sinne der Mengentheorie nur die Zuordnung und unterscheidet Ausgangsmenge und Bildmenge. In vielen Beispielen ist die gesamte Ausgangsmenge identisch mit der gesamten Bildmenge.

Die Bewegungen in unserer euklidischen Ebene können in vier verschiedene Klassen aufgeteilt werden. Wir kennen Schiebungen, Drehungen, Spiegelungen und Schubspiegelungen. Spiegelungen und Schubspiegelungen werden hier nicht weiter behandelt.

Bewegen wir eine Figur mit konstanter Richtung, so entsteht eine *Schiebung.* Die Zuordnungswege sind dann parallele, gleichlange und gleichgerichtete Strecken.

Alle parallelen, gleichlangen, gleichgerichteten Zuordnungswege stellen *eine einzige Schiebung* dar[9]. Schiebungen kann man daran erkennen, daß sie keinen Punkt haben, der bei der Bewegung festbleibt, und daß eine Strecke und ihre Bildstrecke zueinander parallel sind.

Halten wir einen Punkt einer Figur fest und bewegen die Figur dann, so erhalten wir eine *Drehung.* Die Zuordnungswege sind Teile von konzentrischen Kreisen mit dem festgehaltenen Punkt als Mittelpunkt.

Nimmt man als Figur ein regelmäßiges n-Eck, zum Beispiel ein Quadrat oder ein gleichseitiges Dreieck, so sind diejenigen Drehungen ausgezeichnet, die das regelmäßige n-Eck wieder auf sich abbilden, so daß Ausgangsmenge und Bildmenge sich decken. Der Mittelpunkt ist hier Drehpunkt.

Die Menge aller Schiebungen bildet nun mit der Operation des „Hintereinanderführens“ eine Gruppe. Die Menge aller Drehungen und Schiebungen zusammen bildet auch eine Gruppe. Unter den Drehungen gibt es wieder spezielle Teilmengen, die ebenfalls Gruppen bilden.

Die Menge aller Drehungen um einen Punkt ist eine solche Teilmenge und unter diesen wiederum bilden diejenigen Drehungen, die ein n-Eck in sich überführen, eine Gruppe, die sogenannte Drehgruppe des n-Ecks. Die Dreh-

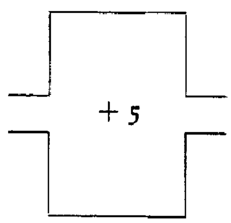
[7] Das Nullelement wird manchmal auch neutrales oder Einselement genannt.

[8] Da die Operation „−“ von der Operation „+“ abgeleitet werden kann, verwendet man im mathematischen Sprachgebrauch bei der Definition einer additiven Gruppe nur das „+“-Zeichen.

[9] Die Menge aller parallelen, gleichlangen und gleichgerichteten Strecken wird oft auch als Vektor bezeichnet.

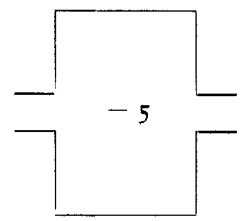
gruppen der verschiedenen n-Ecke sind die wichtigsten endlichen Gruppen. Sie heißen auch zyklische Gruppen der Ordnung n. Dazu isomorph sind die modulo-n-Gruppen der ganzen Zahlen.
Die Grundlage für die *Dienesmaschinen* ist die Addition und Subtraktion im Bereich der ganzen Zahlen. Die Operation zusammen mit einer fest bestimmten Zahl wird dabei als Ganzheit aufgefaßt, welche mathematisch als eine Abbildung der Menge oder einer Teilmenge der ganzen Zahlen in sich gedeutet wird. Durch den Begriff der „Maschine" (Rechencomputer) wird der Abbildungscharakter und damit gleichzeitig das Operative des mathematischen Sachverhalts deutlich gemacht.

Das Zeichen „o" bedeutet „Hineintun". Später wird es als Operationszeichen gedeutet.



A

1 o A =	6
2 o A =	7
3 o A =	8
4 o A =	9
5 o A =	10
6 o A =	11
9 o A =	14
10 o A =	15
21 o A =	26
50 o A =	55
99 o A =	104



B

1 o B =	− 4
2 o B =	− 3
3 o B =	− 2
4 o B =	− 1
5 o B =	0
6 o B =	1
9 o B =	4
10 o B =	5
21 o B =	16
50 o B =	45
99 o B =	94

Die Menge aller Dienesmaschinen mit dem *Hintereinanderausführen* als Gruppenoperation ist isomorph zu der additiven Gruppe der ganzen Zahlen. Zwei oder mehrere miteinander verknüpfte Maschinen sind identisch mit einer gewissen einzelnen Maschine. Die Anwendung der kombinierten Maschine A □ B auf eine ganze Zahl g geschieht auf folgende Weise: g wird zunächst durch die Maschine A geschickt. Das hierbei erhaltene Resultat wird dann in die Maschine B gegeben.

Didaktische Bemerkungen

Mit Hilfe von abstrakten Strukturen wie Gruppe, Körper, Vektorraum oder Klasse werden in der modernen Mathematik viele Gebiete erfaßt und charakterisiert. Es wurde mit ihnen zwar bereits im letzten Jahrhundert gearbeitet[10], aber erst in unserer Zeit werden sie als eigenständige Strukturen gewertet. Sie sind uns daher noch nicht so vertraut wie etwa die Arithmetik oder die euklidische Geometrie. Bei ihrer Bewältigung im Unterricht entstehen daher besondere Schwierigkeiten. Indessen, gerade aufgrund der wachsenden Entwicklung dieser Strukturen und der gleichzeitig wachsenden Schwierigkeiten, sie zu bewältigen, ist die Notwendigkeit einer Durchleuchtung in pädagogischer Hinsicht um so mehr gegeben.
Gelingt es nun, eine echte Begegnung des Kindes mit einer der oben charakterisierten Strukturen herbeizuführen, so erlebt es über das bloße Kennenlernen eines Begriffes hinaus wesentliche Denkschemata der modernen Mathematik, ohne die die technisierte Welt von heute nicht mehr denkbar ist.
Das Kind soll nun keineswegs alle diese Systeme „erlernen", sondern mit einer oder einigen wenigen sich über einen möglichst langen Zeitraum hinweg immer wieder beschäftigen, sozusagen damit „aufwachsen". Es soll also ein langsamer Entwicklungsprozeß vor sich gehen, an dessen Ende ein vollständiges Vertrautsein mit der abstrakten Struktur steht. Geeignete Modellstrukturen müssen demnach auf verschiedenen Altersstufen in immer wieder erweiterter Form behandelt werden. Der Beginn der Auseinandersetzung mit der Sache sollte so früh wie möglich gesetzt werden, um eine allmähliche Entwicklung ohne erzwungene Beschleunigung zu ermöglichen. Der Zeitpunkt des Beginns ist jedoch abhängig von der einzelnen Struktur. Die Gruppe eignet sich gut als Modellstruktur für einen abstrakten Sachverhalt, wie er oben beschrieben wurde. Sie ist übersichtlich, verhältnismäßig

10 Beispielsweise hat *Felix Klein* in seinem Erlanger Programm von 1872 auf die Bedeutung der Gruppen in der Mathematik hingewiesen.

einfach und abgeschlossen. Es lassen sich außerdem mehrere konkrete Modelle für sie finden, wie beispielsweise Schiebungen[11], Drehungen um einen Punkt, allgemein Bewegungen und Dienesmaschinen. Der Grundcharakter der Gruppe und damit auch aller ihrer Modelle ist operativ, da eine Verknüpfungsoperation die Voraussetzung für eine Gruppe ist. An den Modellen kann demnach hantiert werden.

Der Zeitpunkt für eine erste Begegnung des Kindes mit der Gruppenstruktur kann nicht eindeutig festgelegt werden, da die entsprechenden Untersuchungen fehlen. Die Eigenschaft „invers" könnte sicherlich im 1. Schuljahr erarbeitet werden. Die Grundlage für diese Struktur ist die Umkehrung von Vorgängen. Dem Schulanfänger sind Handlungskombinationen wie Hinzufügen-Wegnehmen, Aufstehen-Hinsetzen, Verstecken-Wiederfinden bekannt. Das Hinzufügen und das Wegnehmen wird beispielsweise als Grundlage für den Erstrechenunterricht beim 6- bis 7jährigen Kind als vorhanden vorausgesetzt. Man kann aus diesem Grunde annehmen, daß auf dieser Altersstufe erste Grundlagen für den Begriff „invers" gelegt werden können[12].

Im 2. und 3. Schuljahr kann zum Inversen das Nullelement hinzukommen. In der Gruppentheorie wird die Existenz eines Nullelements axiomatisch vorausgesetzt. Charakterisiert wird es durch die Verknüpfung mit anderen Elementen. (Es entsteht dabei wieder das Ausgangselement.) Das Wesen der Verknüpfung ist den Kindern auf dieser Altersstufe noch nicht vollkommen bewußt[13]. Der Zugang zum Nullelement kann daher nicht über die Verknüpfung gewonnen werden. Es muß im Unterricht praktisch als besonderer Fall gefunden werden. Nun ist „die Null" ohne Zweifel ein Bestandteil von Rechenvorgängen im täglichen Leben, etwa der Zeitrechnung, des Rechnens mit Geldbeträgen oder Temperaturen. Kinder des 3. Schuljahres kennen diese Bereiche in den meisten Fällen. Eine gewisse Voraussetzung ist also vorhanden. Man kann natürlich nicht erwarten, daß das Nullelement in seiner Komplexität vollständig erfaßt wird, eine Einführung ist jedoch möglich.

Die Begriffe „Assoziativität" und „Abgeschlossenheit" sind unserer Ansicht nach mathematisch komplizierter als das „Inverse" oder das „Nullelement"[14]. Die Eigenschaft „assoziativ" ist bereits eine mathematische Konstruktion, es gibt kein einfaches konkretes Modell für Nicht-Assoziativität. Das einfachste Modell ist wohl das der Vektormultiplikation zwischen den Einheitsvektoren des Raumes. Die Struktur der Assoziativität kann daher unserer Ansicht nach erst sehr viel später erarbeitet werden.

Ebenfalls komplizierter als das „Inverse" und das „Nullelement" ist die „Abgeschlossenheit". Es gibt jedoch wesentlich mehr Beispiele im konkreten Bereich für Nicht-Abgeschlossenheit (gleichzusetzen mit Nicht-Lösbarkeit) als für Nicht-Assoziativität. Eine gründliche Vorbereitung des Begriffes kann im 1. Schuljahr beginnen, indem die Kinder sehr viel mehr nicht lösbare Aufgaben erhalten als bisher üblich. Zu welchem Zeitpunkt der Begriff der Abgeschlossenheit abstrakt gebildet werden kann, können wir hier nicht sagen. Es gibt keine Untersuchungen auf diesem Gebiet, die Anhaltspunkte bieten.

Die Modelle der Gruppe sind für die Kinder in konkreter Form leicht zugänglich. Die Grundkonzeption der Schiebungen und Drehungen ist zunächst äußerst einfach. Bewegungen sind den Kindern bekannt. Man kann auch annehmen, daß eine Beschränkung der Bewegungen auf die Ebene keine allzu große Schwierigkeit darstellt.

Die Dienesmaschinen sind grundsätzlich für die Kinder leicht erfaßbar, da sie einen spielerischen Charakter haben. Wir müssen uns jedoch im Unterricht zunächst darauf beschränken, die Dienesmaschinen lediglich auf die natürlichen Zahlen anzuwenden, da die ganzen Zahlen den Kindern noch nicht bekannt sind. An der Einführung der Strukturen „invers" und „Nullelement" ändert diese Einschränkung nichts, im Gegenteil, bei einer bereits vorhandenen Kenntnis der negativen Zahlen würde eine Identifikation der Minusmaschinen mit den negativen Zahlen erfolgen und das Erfassen der

11 Die Schiebungen und Drehungen erweisen sich als vorbereitend, da hier eine Grundlage für die Erarbeitung des Vektor- und Abbildungsbegriffes gelegt wird. Ebenso kann an die endlichen Drehgruppen später das Arbeiten mit Restklassen angeschlossen werden.

12 *Jean Piaget*, The childs conception of number. Norton & Co, New York 1965. S. 37.

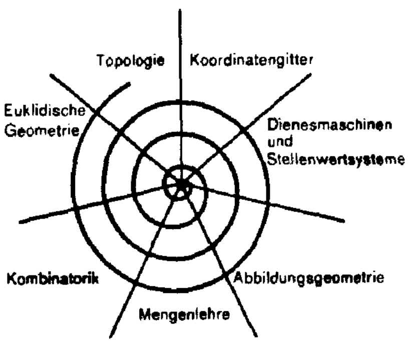
13 Diese Feststellung machten wir in unseren Versuchen.

14 Die Begriffe „Abgeschlossenheit" und „Assoziativität" sind auch historisch gesehen später entwickelt worden als die Begriffe „invers" und „Nullelement".

Invershandlung erschwert[15]. Die Eigenschaft der Abgeschlossenheit kann nur im Bereich der ganzen Zahlen erarbeitet werden. Durch das Auftreten von im Bereich der natürlichen Zahlen nicht lösbaren Aufgaben, die zunächst durch einen Querstrich gekennzeichnet werden, wird eine Grundvoraussetzung für die Einführung der negativen Zahlen und gleichzeitig auch für die Behandlung der Abgeschlossenheit gewonnen.
Im Gegensatz zu den Schiebungen und Drehungen werden die Operationen bei den Dienesmaschinen auf einer weiter abstrahierten Ebene durchgeführt, so daß die Allgemeinheit der Gruppenstruktur angedeutet wird. Der ihnen zugrunde gelegte Abbildungsbegriff ist gegenwärtig für die moderne Mathematik außerordentlich bedeutsam. Z. P. Dienes nennt sogar eine Serie von Büchern danach[16]. Für eine spätere Erarbeitung des Abbildungsbegriffes ist der Umgang mit Dienesmaschinen eine ausgezeichnete Vorbereitung.

Methodische Bemerkungen

Der zu behandelnde Stoff wird nicht in einer zusammenhängenden Unterrichtseinheit behandelt, sondern in Abschnitten in einen *Gesamtunterrichtsplan*, der verschiedenartige mathematische Unterrichtsgegenstände enthält, eingebettet. Wir gehen dabei in folgender Weise vor: Eine normale Unterrichtseinheit umfaßt etwa zwei bis drei Stunden, im Höchstfall fünf bis sechs Stunden. Zu einem späteren Zeitpunkt, etwa nach einem Monat, wird das Thema wieder aufgegriffen und erweitert behandelt. Schematisch läßt sich dieses Prinzip vielleicht durch eine Spirale mit Sektoren darstellen.



Begründet ist unser Vorgehen einmal in dem Bestreben, das Festsetzen einer eingleisigen Vorstellung oder eines eingleisigen Bezuges zu vermeiden. Weiterhin nehmen wir an, daß kurze Zwischenräume der Nichtbeschäftigung mit einer mathematischen Sache sich als günstig für ein echtes Vertrautwerden damit erweisen. Außerdem wird ein rein formales „Erlernen" der mathematischen Probleme in den meisten Fällen durch die Kürze der Unterrichtseinheiten verhindert.
Viele Bereiche der modernen Mathematik gründen nicht auf Realitäten, sondern sind aus rein mathematischen Problemstellungen erwachsen. Daher sollte die *Motivation* für die einzelnen Probleme des Unterrichts möglichst von der mathematischen Struktur ausgehen und nicht von einer „einkleidenden Aufgabenstellung"[17]. Eine solche Einkleidung würde oft mit einer Verfremdung des Sachverhalts einhergehen. Außerdem bringen verkleidete Aufgabenstellungen als zusätzliche Schwierigkeit das Herauslösen des mathematischen Sachverhalts aus einem vielschichtigen Zusammenhang mit sich. Es ist fraglich, ob die Kinder hier diesen Schritt bewältigen können. Diese Problematik ist von der des Sachrechenunterrichts, in dem rechnerische Probleme aus einem Sachzusammenhang herausgelöst werden müssen, zu unterscheiden. Die Rechenprinzipien, die dabei gebraucht werden, sind den Kindern bekannt. Außerdem haben wir oben gesagt, daß ein wesentliches Ziel unseres Unterrichtsvorhabens darin liegt, die Kinder mit zweckfreien, abstrakten Strukturen vertraut zu machen. Da die vorgesehenen Unterrichtsgegenstände dem Entwicklungsstand der Kinder entsprechen, wie wir oben untersucht haben, können wir erwarten, daß die Kinder an den Problemstellungen interessiert sind.
Das oben geforderte *tatsächliche Tätigsein* der Kinder[18] läßt sich in zwei verschiedenen Formen verwirklichen: Die Teilnahme aller Kinder an großräumigen Bewegungsspielen und das Hantieren jedes einzelnen Kindes auf einem Tisch oder einer tischähnlichen Fläche mit Material. Z. P. Dienes schlägt in seinen neuesten Büchern vielfach großräumige Bewegungsspiele vor, besonders im Bereich der Geometrie; er weist aber auch auf die Wichtigkeit des Hantierens hin[19]. Wir entscheiden uns nicht direkt für eine Form, ziehen aber in den meisten Fällen die zweite vor. Dieser Art der Tätigkeit gibt auch Besuden den Vorrang. „Das Spiel des Kindes in der Gruppe, das man auch im ganzheitlichen Rechnen als Einstieg wieder aufgegeben hat, ist

15 Wir konnten diese Feststellung in einem früheren Versuch machen.

16 *Z. P. Dienes / E. W. Golding*, Topologie und Schattengeometrie-Abbildungsgeometrie I; Euklidische Geometrie-Abbildungsgeometrie II; Gruppen und Koordinaten-Abbildungsgeometrie III. Herder, Freiburg 1969.

17 Beispielsweise stellen die logischen Blöcke von *Z. P. Dienes* nicht eingekleidete, sondern rein von der mathematischen Struktur ausgehende Aufgabenstellungen dar.

18 Vgl. *Z. P. Dienes / E. W. Golding*, Euklidische Geometrie. Herder, Freiburg 1969. S. 9.

19 Vgl. *Z. P. Dienes / E. W. Golding*, Topologie und Schattengeometrie. Herder, Freiburg 1969. S. 9.

auch hier von der Sicht des einzelnen her ungeeignet."[20] An den Dienesmaschinen hantieren die Kinder in einer bereits teilweise abstrahierten Art und Weise, das heißt, die Handlungen werden gedanklich ausgeführt, haben aber eine konkrete Tätigkeit, das „Hineintun" als Grundlage. Die vollständige Abstraktion ist jedoch erst in dem Augenblick gewonnen, in dem die Maschinen als Abbildungen aufgefaßt werden.

Eine kindgemäße Darstellung abstrakter Strukturen finden wir mehrfach in *Spielen* oder spielähnlichen Aufgaben. Hierzu ist festzustellen, daß dabei die entsprechenden mathematischen Strukturen nicht in Spiele verkleidet, sondern daß sie tatsächlich mit gewissen Spielstrukturen isomorph sind, die Spiele also als Modelle aufgefaßt werden können[21]. So entsprechen zum Beispiel die Spiele mit den logischen Blöcken Äquivalenzrelationen beziehungsweise Klasseneinteilungen von Mengen. Dem Kind ist ein, wenn zunächst oft nur unbewußter Zugang zu in Spielen personifizierten mathematischen Strukturen ohne erhebliche Schwierigkeiten möglich. Die Bewußtmachung kann und muß danach stufenweise erfolgen. Die Grundlage für eine echte Bewußtwerdung ist jedoch ein frühzeitiges, wenn auch spielerisches Umgehen mit der Struktur.

Die Durchführung eines Unterrichts, der auf dem konkreten Tätigsein jedes einzelnen Schülers basiert, bedingt eine *Begrenzung der Schülerzahl* auf höchstens zwanzig. Die erforderliche Bewegungsfreiheit für den einzelnen Schüler ist in einem voll besetzten Klassenraum nicht gegeben. Außerdem soll jedes Kind das ihm gemäße Arbeitstempo selbst bestimmen, da ein erzwungenes Fortschreiten im Stoff oft zu einem formalen Bewältigen der Sache führt. Ein weiterer Gesichtspunkt, der für die Durchführung des Unterrichts in einer kleineren Gruppe spricht, ergibt sich aus unserer Forderung, die Entwicklung der mathematischen Phantasie bei jedem Kind zu unterstützen. Die Individualität der Einfälle und deren weitere Durchführung soll möglichst gewahrt bleiben. Das bedeutet in der Praxis, daß ständige Einzelberatungen stattfinden müssen, die bei einer stärkeren Gruppe nicht mehr durchgeführt werden können.

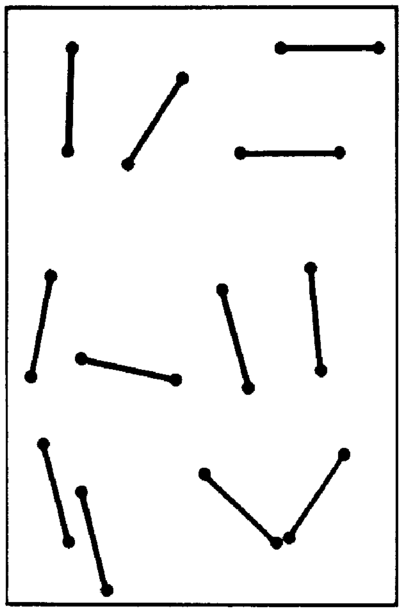
Die Unterrichtsziele

Was soll nun im einzelnen erarbeitet werden? Die Unterscheidung von Schiebungen und Drehungen bietet sich als erstes Unterrichtsziel an. Die Begriffe „gerade" und „parallel" setzen wir hierbei als bekannt voraus. Eine gedankliche Zusammenfassung aller parallelen Strecken mit gleicher Richtung und gleicher Länge zu einer einzigen Schiebung kann dabei wohl noch nicht erwartet werden. Der Sachverhalt ist zu schwierig. Ebenfalls verzichten wir zunächst noch auf die Hintereinanderausführung von Drehungen mit verschiedenen Drehpunkten. Verknüpfung von Drehungen mit demselben Drehpunkt sind jedoch für die Kinder überschaubar; die Drehungen der regelmäßigen n-Ecke eignen sich dabei besonders gut. Der Begriff des Inversen kann bei den Schiebungen und Drehungen wohl ohne größere Schwierigkeiten erarbeitet werden. Beim Nullelement, hier Nullschiebung beziehungsweise Nulldrehung genannt, ergibt sich dasselbe Problem wie beim Erfassen der Schiebung allgemein. Die Kinder sind wohl noch nicht alle dazu in der Lage, sämtliche Nullelemente zu einem einzigen zusammenzufassen.

Unmittelbar nach dem Beginn der Arbeit mit Bewegungen werden auch die Dienesmaschinen eingeführt. Zunächst sollen die Kinder mit der Arbeitsweise der Maschinen vertraut werden. Daran schließt sich die Behandlung der Hintereinanderausführung von Maschinen an. An dieser Stelle ist zu beachten, daß Minus-Maschinen nicht auf alle natürlichen Zahlen anwendbar sind, das heißt, wir erhalten auch unlösbare Aufgaben. Hierin liegt eine Voraussetzung für eine spätere Behandlung der Abgeschlossenheit. Als nächster Schritt sollen zueinander inverse Maschinenpaare aufgesucht werden. Im Verlauf der Arbeit mit den Inversmaschinen wird dann festgestellt, daß die Verknüpfung zweier zueinander inverser Maschinen zunächst keine uns be-

20 *H. Besuden*, a. a. O., S. 165.

21 In den beiden Büchern *Z. P. Dienes*, Moderne Mathematik in der Grundschule (Herder, 1968) und *Z. P. Dienes / E. W. Golding*, Die Entdeckung des Raumes (Herder, 1967) bilden Spiele eine wesentliche Grundlage des Unterrichtsprogramms.



kannte Maschine ergibt und daß jede Maschine dieser Art als Ergebnis die hineingegebene Zahl hervorbringt. Die Nullmaschine wird an dieser Stelle „erfunden". Das Erkennen der Identität aller Nullmaschinen birgt die gleiche Schwierigkeit in sich wie die Zusammenfassung aller Nulldrehungen oder Nullschiebungen zu einer einzelnen.

Entsprechend den einzelnen Zielen ergibt sich der folgende Plan:

1. Stunde Drehschiebungen in der Ebene
2. Stunde Unterscheiden von Schiebung und Drehung
3. Stunde Drehungen des Quadrats

4. Stunde Additionsmaschinen
5. Stunde Subtraktionsmaschinen
6. Stunde Hintereinanderausführen von Additionsmaschinen

7. Stunde Schiebungen als Abbildungsmenge von Punkten
8. Stunde Nullschiebung und inverse Schiebungen
9. Stunde Nulldrehung und inverse Drehungen

10. Stunde Hintereinanderausführen von Subtraktions- und Additionsmaschinen
11. Stunde Inverse Maschinen und die Nullmaschine

Der im folgenden beschriebene Versuch wurde in zwei aufeinanderfolgenden Jahren jeweils mit einem beginnenden *3. Schuljahr* durchgeführt. Wir beziehen uns hier nun prinzipiell auf den Verlauf des ersten Versuchs und weisen in Fußnoten auf grundsätzlich anders verlaufene Unterrichtsphasen des zweiten Versuchs hin.

II. Bericht über den Unterricht (1. bis 3. Stunde)

1. Stunde:
Drehschiebungen in der Ebene

Wir arbeiteten auf der Magnettafel, die wir auf vier Hocker gelegt hatten. Die Schüler setzten sich um die Tafel herum. Jedes Kind erhielt ein 10 cm langes, numeriertes Stöckchen, für das es auf der Tafel einen Platz wählen konnte.

Wir beginnen hier mit Stöckchen als Material, da wir der Ansicht sind, daß das Bewegen von ganzen Strecken zunächst einfacher ist, als das von Punkten. Außerdem ist das Bewegen von Strecken eine Grundlage für das Unterscheiden von Drehungen und Schiebungen. Das Bewegen von komplizierten Figuren hingegen ist für die Kinder nicht überschaubar.

Jedes Kind sollte sich nun einen Partner wählen, zu dem es sein Stöckchen hinbewegen mußte. Das Paar, das den kürzesten Weg finden konnte, hatte gewonnen. (In den Fällen zueinander paralleler Stöckchen ergab sich dann eine Schiebung.) Hölzchen, die störten, bezeichneten wir mit einem Kreidestrich und entfernten sie so lange. Den Weg, den die Kinder mit den Stöckchen auf der Tafel gegangen waren, markierten wir mit Kreide. Es zeigte sich, daß es mehrere Möglichkeiten gab, zum Partner hin zu kommen.

Die Mitschüler sparten nicht mit guten Ratschlägen. „Warum gehst du nicht hier rum?" „Ach, das ist ja viel zu lang." „So rum mußt du gehen, dann ist es kürzer." „Mann, dein Weg ist aber kurz." Das sagte ein Mitschüler zu dem Sieger. „Du mußt nicht so drehen." „Macht der einen Umweg." Die Kreidestriche, die den Weg beschrieben, zeichneten die Kinder selbst. Aus diesem Grund wurde es manchmal auf dem Tisch etwas turbulent. Da aber die Anzahl der Schüler klein war, ließ sich diese freizügige Arbeitsweise ohne ernsthafte Störung durchführen. Nachdem die Paare alle ihre Hölzchen auf den Platz des Partners gebracht hatten, wurde ein Name für die Bewegungen gesucht. Die Kinder schlugen zunächst die Namen „Hingehen", „Suchspiel" und „Hölzchenspiel" vor. An dieser Stelle wies der Lehrer darauf hin, daß der Name zeigen sollte, wie auf der Tafel vorgegangen worden sei. Nach längerem Suchen sagte ein Kind „Wir haben die Hölzchen geschoben" und ein anderer Schüler meinte „bewegt". Schließlich brachte ein Kind den Begriff „Drehschieben". Dieses Wort traf den Sachverhalt am besten.

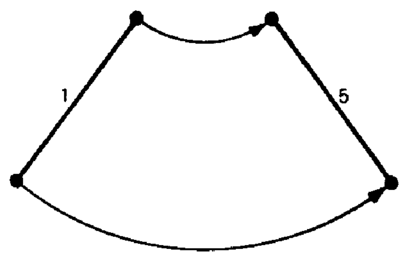
Am Schluß des Gesprächs setzten sich die Kinder auf ihre Plätze zurück. Sie erhielten Arbeitsblätter, auf denen Strecken-Paare eingezeichnet waren. Sie sollten nun die Wege, die sich bei der Überführung der Strecken ineinander ergaben, einzeichnen und die Bahnen mit Farben ausfüllen (Abb. Seite 368).

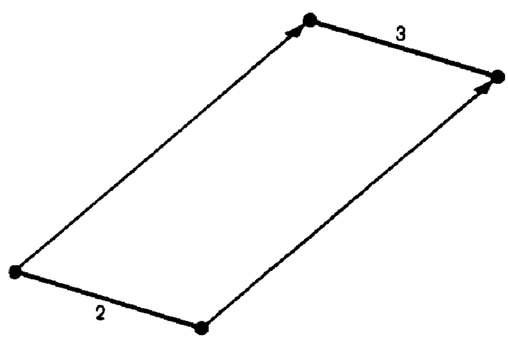
Anschließend an die Stillarbeit wurde dieselbe Übung nochmals in einem großräumigen Spiel durchgeführt, diesmal jedoch unter Benutzung des vorher erarbeiteten Begriffes „Drehschieben". Als Arbeitsebene wurde der Fußboden, als Material wurden Besenstiele gewählt. Dazu mußten einige Tische und Stühle beiseite geräumt werden. Im Wesentlichen wurde dieselbe Übung wie auf der Magnettafel durchgeführt. Allerdings stand in diesem Fall nur eine Anzahl von sechs Stöcken zur Verfügung. Die Schüler wurden in drei Gruppen aufgeteilt, von denen jeweils zwei Gruppen nur Beobachter waren. Jedes Kind der aktiven Gruppe konnte sich mit seinem Besenstiel einen Platz suchen. Nacheinander bewegten die Kinder ihre Stöcke zu einem anderen Kind hin und wieder auf ihren Platz zurück. Die Zuschauer beschrieben hierbei die Bewegungen.

Ein Vorteil dieser Übung besteht darin, daß der Besenstiel jede noch so kleine Drehung deutlich anzeigt, und daß die Kinder den Weg selbst „durchlaufen". Nachteilig wirkt es sich jedoch aus, daß die Kinder den Weg, den sie zurücklegen, nicht ständig überblicken.

2. Stunde:
Unterscheiden von
Schiebungen und Drehungen

Wir setzen in dieser Stunde voraus, daß den Kindern die Begriffe „gerade" und „parallel" geläufig sind. In einer früheren Unterrichtseinheit wurde mit diesen Begriffen schon gearbeitet. Wir benutzen hier bewußt dasselbe Material wie in der 1. Stunde, da ein Wechsel die Kinder an dieser Stelle verwirren würde.

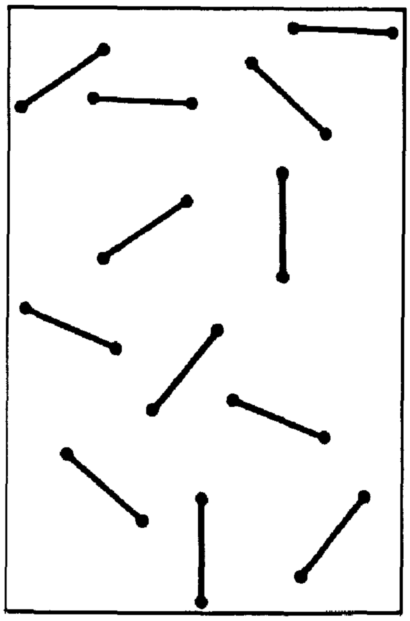




Die Kinder setzten sich wieder um die Magnettafel herum und legten ihre mit Nummern bezeichneten Stöckchen auf die Platte. Jedes Kind wählte sich einen Partner. Zwei Kinderpaare wurden aufgefordert, ihr Stöckchen auf dem kürzesten Weg auf den Platz des Gegenspielers zu bewegen. Die Verschiebespuren wurden mit Kreide nachgezeichnet.
Vom Lehrer wurden hier absichtlich ein Paar mit nicht-parallelen Stäben und eines mit parallelen ausgewählt.
Die Verschiedenheit der Figuren fiel den Kindern früher als erwartet ohne Hinweis auf. „Bei 1 nach 5 muß gedreht werden, bei 2 nach 3 nicht." „2 nach 3, das sieht so parallel aus", „1 nach 5 ist krumm". (Die Kinder hatten hier auch ohne Spielaufgabenstellung Interesse am Sachverhalt.) Jedes Paar konnte nun feststellen, ob es ohne Drehung zum Partner kam. In den meisten Fällen war das natürlich nicht der Fall. Anschließend sollten sich die Kinder Partner aussuchen, zu denen sie mit den Stöcken auf der Tafel ohne Drehungen hinkommen konnten. Hier gab es einiges Durcheinander auf der Magnettafel, aber nach einigen Minuten hatte jedes Kind ein anderes gefunden, zu dem es sein Stöckchen annähernd ohne Drehungen hinbewegen konnte. Dabei wurde aber nicht mehr darauf geachtet, daß jedes Kind genau einen Partner hatte.

Anschließend wurde in einem Gespräch über die beiden verschiedenen Bewegungen diskutiert. Wir blieben dabei um die Tafel herum sitzen, um ohne größere Schwierigkeiten bei Zweifelsfällen ein Beispiel durchführen zu können. Die ersten beiden Paare wurden aufgefordert, ihre Stöckchen 1, 5, 2, 3 noch einmal auf den Tisch zu legen, die anderen Hölzchen wurden entfernt und der Tisch abgewischt. Die Kinder sagten von selbst: „Ja, von 1 nach 5 muß man drehen, bei 2 nach 3 nicht." Auf die Frage des Lehrers, ob sie sich darin sicher seien, führte ein Kind die Bewegung nochmals durch. „Es gibt solche mit Drehen und solche ohne Drehen" meinte eines der zuschauenden Kinder. Alle Mitschüler wollten diese Feststellung nicht ohne weiteres annehmen. „Das stimmt nicht, von 1 nach 5 kann man auch ohne Drehen kommen, überallhin kann man ohne Drehen kommen" meinte eines der Kinder und fand eine ganze Reihe von Mitschülern, die ihm zustimmten. „Das zeig mal", „Das will ich sehen" war von der anderen Seite zu hören. Der Schüler der der Meinung war, man könnte jede Lage ohne eine Drehung erreichen fing auch sofort an, das Hölzchen von 1 nach 5 zu verschieben. Die andere Schülergruppe wies ihn bei der leisesten Drehung lautstark darauf hin, daß die Regel verletzt worden sei. „Ohne Drehung", „Du drehst ja", „Komm, komm nicht drehen". Der Schüler mußte nach einiger Zeit aufgeben. Interessant war an dieser Stelle die Beobachtung, daß die Kinder, die vorher seiner Meinung waren, auch jetzt noch darauf beharrten. Erst nachdem jedes Kind es selbst versucht hatte, sah es die Undurchführbarkeit dieses Vorhabens ein. In ähnlicher Form führten wir anschließend eine Diskussion darüber, ob man durch reine Drehungen jede Lage erreichen könne. Wiederum war festzustellen, daß die Kinder hier durch den Augenschein nicht zu überzeugen waren, sie sahen die Unmöglichkeit erst ein, nachdem sie konkret versucht hatten die Aufgaben durchzuführen und gescheitert waren. Wir bezeichneten nach Vorschlägen der Kinder die beiden neuen Bewegungstypen als „Schiebungen" und „Drehungen", die Mischform nannten wir nach wie vor Drehschiebung.

Festzustellen ist hierbei, daß das Wort „Schiebung" den Kindern wesentlich fremder ist, als das Wort „Drehung". Allerdings ist kein Wort zu finden, das den Sachverhalt richtig beschreibt und das den Kindern besser vertrau



ist. Verzichten können wir in diesem Fall auf eine Benennung nicht, da später die Schiebungen eine wesentliche Grundlage des Mathematikunterrichts bilden. Nach der Einführung gewöhnen sich die Kinder auch verhältnismäßig schnell daran und gebrauchen das Wort bald als ihr Eigentum.

Anschließend schrieben wir noch alle Lageveränderungen auf. An der Tafel entstand dann das folgende Bild:

$$\left\{\begin{matrix}1_1 \longrightarrow 5_1 \\ 1_2 \longrightarrow 5_2\end{matrix}\right\}\text{[22]} \quad \left\{\begin{matrix}2_1 \longrightarrow 3_1 \\ 2_2 \longrightarrow 3_2\end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix}4_1 \longrightarrow 8_2 \\ 4_2 \longrightarrow 8_1\end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix}6_1 \longrightarrow 9_1 \\ 6_2 \longrightarrow 9_2\end{matrix}\right\} \ldots$$

$$\left\{\begin{matrix}5_1 \longrightarrow 1_1 \\ 5_2 \longrightarrow 1_2\end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix}3_1 \longrightarrow 2_1 \\ 3_2 \longrightarrow 2_2\end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix}8_2 \longrightarrow 4_1 \\ 8_1 \longrightarrow 4_2\end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix}9_1 \longrightarrow 6_1 \\ 9_2 \longrightarrow 6_2\end{matrix}\right\} \ldots$$

Den Kindern fiel die ungewohnte Schreibweise wesentlich leichter, als zunächst von uns erwartet wurde. Im Gegenteil, sie freuten sich über die abstrakten Symbole. Lediglich das Schreiben der Klammer bereitete zunächst einige Schwierigkeiten.

Wir führen diese abstrakte Schreibweise hier in der Absicht ein, ein vertrautes Umgehen mit Symbolen auf einer möglichst frühen Stufe zu erreichen, um dieses Problem zu einem späteren Zeitpunkt, zu dem erhebliche Schwierigkeiten stofflicher Art hinzukommen, auszuschalten.

Zum Schluß der Stunde erhielten die Kinder ein Arbeitsblatt, auf dem eine Anzahl von Strecken eingezeichnet war. Auf diesem Blatt sollten je zwei durch eine Schiebung ineinander überführbare Strecken in gleicher Farbe gekennzeichnet werden. Zusätzlich wurde der Ratschlag gegeben, der Sicherheit halber die Schiebungen mit einem Stöckchen durchzuführen (siehe oben).

3. Stunde:
Drehungen des Quadrats

Eine ungefähr 90 cm × 90 cm große Platte wurde im Mittelpunkt eines alten Hockers festgenagelt, so daß die Platte drehbar war, der Mittelpunkt aber festblieb. Die Ecken des Quadrates wurden nach Vorschlägen der Kinder mit

22 Die Indizes bezeichnen die Anfangs- und die Endpunkte der Stöckchen. Diese genauere Bezeichnungsweise wurde nötig, als wir merkten, daß es zwei verschiedene Möglichkeiten gibt, die Stöckchen ineinander zu überführen.

den Buchstaben A, B, C, D bezeichnet. Je eine Ecke der Platte wurde dann von einem Kind festgehalten. Die übrigen Schüler setzten sich rundherum auf Tische, um das Geschehen besser beobachten zu können. Je ein Kind aus der Zuschauergruppe durfte nun eine Aufgabe nennen, die anschließend von den Kindern an der Platte ausgeführt wurde. Die Aufgaben lauteten beispielsweise „D soll nach B gehen"[23], „C soll nach A gehen", „B soll nach A gehen" und so fort. Bei der Ausführung der Aufgabe stellten die Kinder fest, daß alle vier sich bewegen mußten, da kein Kind seine Ecke loslassen durfte. Nach einiger Zeit kam eine andere Gruppe von vier Kindern dran und nach und nach hatten alle Kinder mindestens eine Drehung selbst mit ausgeführt.

Vorausgesetzt wird hier, daß die Kinder dazu in der Lage sind, während der Ausführung einer Aufgabe den Platz, an dem sie vorher standen, und den, zu dem sie hingehen sollten, im Auge zu behalten. Auf eine festbleibende Bezeichnung, etwa auf dem Hocker oder dem darunterliegenden Fußboden, zur Unterstützung des Orientierungsvermögens verzichten wir, um deutlich werden zu lassen, daß das Wesen der Drehung in der relativen Bewegung der Ecken gegeneinander liegt, unabhängig von der Umgebung.

Anschließend wurde dieselbe Übung vom einzelnen Schüler auf seinem Tisch wiederholt. Jedes Kind erhielt ein schwarzes, quadratisches Pappstück, das entsprechend der vorangehenden Übung mit A, B, C, D bezeichnet worden war und führte für sich allein Drehungen aus. Zwei Kinder stellten hier fest, daß einige der Drehungen miteinander identisch seien, wie „A nach B ist genau das gleiche wie B nach C" und „Ja, wenn man A nach B dreht, dreht sich B nach C mit". Daraufhin schrieben wir die Drehungen an der Tafel in der folgenden Ordnung auf:[24]

$$\left\{\begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ B \longrightarrow C \\ C \longrightarrow D \\ D \longrightarrow A \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} A \longrightarrow C \\ B \longrightarrow D \\ C \longrightarrow A \\ D \longrightarrow B \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} A \longrightarrow D \\ B \longrightarrow A \\ C \longrightarrow B \\ D \longrightarrow C \end{array}\right\}$$

Grundsätzlich ist hier die Stufe der Abstraktion, auf der die Identität vo mehreren Drehungen erkannt wird, noch nicht erreicht. Zu einem spätere Zeitpunkt könnte hier weitergearbeitet werden. Bei der Erarbeitung de Inversen und des Nullelements ist diese Tatsache nicht weiter von Bedeutung

Die Drehungen wurden von einem Schüler vorgelesen und von den Mit schülern mit ihren Pappfiguren durchgeführt. Sofort stellten die Kinder fes „Hier fehlen noch welche", „Ich habe noch welche gefunden", „Es gibt noc ganz gute". Die Drehungen $A \rightarrow A$, $B \rightarrow B$, $C \rightarrow C$, $D \rightarrow D$ wurden hinzu gefügt. Sämtliche Drehungen wurden nun abgeschrieben.
Kinder, die früher fertig waren als die anderen, erhielten ein gleichseitige Dreieck und Sechseck zum Drehen. Sie konnten sich die Ecken selbst bezeich nen und schrieben die Drehungen auf ein Blatt.

[23] Ein besser verständlicher Ausdruck wäre hier vielleicht „D soll auf B's Platz gehen." Wir gebrauchten hier den von den Kindern gewählten Ausdruck.

[24] Hintereinander ausgeführte Drehungen werden nicht schriftlich festgehalten, weil das Verständnis der Verknüpfung noch nicht für eine Fixierung ausreicht.

(Der Bericht über die weiteren Stunden des Unterrichtsversuchs wird ir nächsten Heft veröffentlicht.)