Sigrid und
Günter Graumann

Lernsequenzen zur Grundschulmathematik II

Fortsetzung des Berichts über einen Unterrichtsversuch im 3. Schuljahr*

4. Stunde:
Additionsmaschinen

Aus einem großen Karton wurde zu Beginn der Stunde vom Lehrer eine „Maschine" gebaut[25]. Auf der Rückseite des Kartons befand sich eine Tür, auf der linken Seite ein Einwurfschlitz und auf der rechten ein Auswurfschlitz. Die Funktionszahl mit dem Operationszeichen „+" war auf der Vorderseite zu lesen. Zunächst wurde aber weder die Maschine noch deren Funktion erklärt.

Auf diese Weise sollen sich die Kinder zuerst mit der funktionellen Eigenschaft der Maschine, unabhängig von einer begrifflichen Festlegung, beschäftigen.

Die Kinder erfaßten den Charakter der Maschine jedoch überraschend schnell. „Da kann man links was reintun", „Rechts kommt was raus", „Wie bei einem Automaten", „Das ist zum Verkaufen." Solche Bemerkungen waren zu hören. Nach einer Pause meinte ein Schüler „Da sollen Zahlen rein" und ein anderer „Irgendwas wie ein Computer". In dies Gespräch wurde zunächst nicht eingegriffen, erst dann, als die Schüler allein nicht mehr weiter wußten, wurde vom Lehrer auf die Zahl mit dem „+"-Zeichen an der Vorderseite des Kartons hingewiesen. Daraufhin entwickelte sich wieder ein Gespräch. „Ja, plus vier ist das." „Da kann man vier reintun", meinte eines der Kinder nach einigem Überlegen. „Dann ist es keine Maschine", gab ein

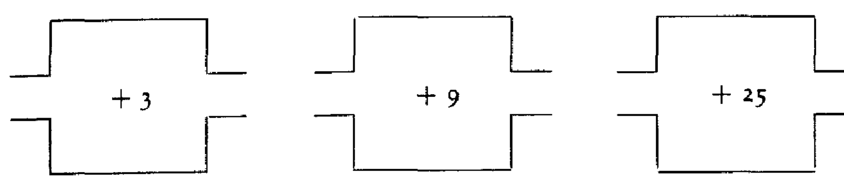
* Vgl. den gleichlautenden Beitrag der Verfasser in Heft 7, S. 362.

25 Diese Idee stammt von Dr. *Bolduc* (University of Florida, Gainesville/USA).

anderer Schüler zur Antwort. Nach kurzer Zeit fanden sie jedoch die richtige Funktionsweise. „Da kommen vier mehr raus", „Da kann man alle Zahlen reintun", „Da kommen immer genau vier mehr raus als man reingetan hat." Diese Feststellung machte den Kindern großen Spaß und sie suchten sofort nach Beispielen. „Wenn man vielleicht zehn reintut, kommen vierzehn raus." Es verging einige Zeit mit dem Suchen von Beispielen. Die Kinder konnten Aufgaben auf Zettel schreiben und diese durch den Einwurfschlitz stecken. Das Kind in der Maschine schrieb das Ergebnis auf einen anderen Zettel und warf diesen durch den Auswurfschlitz hinaus. Ein Nachteil dieses Vorgehens lag darin, daß die Kinder in der Maschine nicht schnell genug schreiben konnten. Vorbereitete Zettel hätten hier auch wenig geholfen, da die Schüler viele ausgefallene Zahlenbeispiele brachten. Wahrscheinlich ist es am besten, ganz auf die Zettel zu verzichten. Die Aufgaben können dann mündlich auf der einen Seite in die Maschine „gegeben" und auf der anderen Seite herausgerufen werden.

Es ist ein wesentlicher Vorteil, wenn sich die Kinder ihre Aufgaben selbst bilden, da sie dann einer Lösung bereits wesentlich näher kommen, als bei einer von einer anderen Person gestellten Aufgabe. Findet ein Kind überhaupt kein Beispiel zu einer bestimmten Problemstellung, auch nicht mit einiger Hilfestellung durch Mitschüler oder durch den Lehrer, so ist ihm die Problemstellung unserer Ansicht nach noch fremd. Der Weg einer erzwungenen Lösung wäre dann praktisch ohne Wert für das Kind.

Anschließend arbeiteten wir mit an der Tafel angezeichneten Maschinen:



A B C

Die Maschinen sollten benannt werden. Den Kindern wurde dabei völlige Freiheit gelassen. „Das ist ein Computer", meinte derselbe Junge, der in dem vorangehenden Gespräch auch schon immer auf die Computer hingewiesen hatte. „Ja, Computer sind das", meinte ein Mitschüler ebenfalls. Ein Junge schlug einen Namen vor „Pollux, oder so". Andere Schüler meinten schließlich aber, daß sie die Maschinen nur mit Buchstaben[26] bezeichnen wollten. So nannten wir sie A, B, C. Anschließend an dieses Gespräch sollten die Maschinen auch benutzt werden. Hier ergaben sich Probleme. Mündlich waren die Aufgaben den Kindern bekannt, aber wie sollten sie nun niedergeschrieben werden? „Nur mit Zahlen und plus und so, das ist ja nichts", sagte ein Kind. „Das muß man schon sehen, daß es eine Maschine ist", stimmten die anderen zu.

Hieran kann man erkennen, wie sinnvoll diese Maschinen von Z. P. Dienes sind. Die Kinder erkannten den operativen Charakter sofort und sahen auch den Unterschied zwischen den Grundzahlen und den Ergebniszahlen. Durch eine besondere Schreibweise soll das auch zum Ausdruck kommen.

Da die Kinder von sich aus keine Möglichkeit zur Kennzeichnung der „Maschine" fanden, wurde ihnen vom Lehrer das Symbol „o" vorgeschlagen. Der runde Kreis wurde als Öffnung der Maschine gedeutet. Dieser Vorschlag wurde von den Kinder sofort aufgegriffen und angewendet.
Jedes Kind konnte nun eine Aufgabe stellen, die an der Tafel vom Lehrer aufgeschrieben wurde. Die Kinder führten in diesem Stadium des Mathematikkurses noch kein Heft; sie schrieben auf losen Blättern, die in einem Ringbuch gesammelt wurden. Es entstand die folgende Aufgabenreihe:

26 Die Schüler der 2. Versuchsgruppe benötigten hier wesentlich mehr Zeit. Sie versteiften sich darauf, den Rechenvorgang zu beschreiben und lösten sich erst nach einem längeren Gespräch von dieser Auffassungsweise.

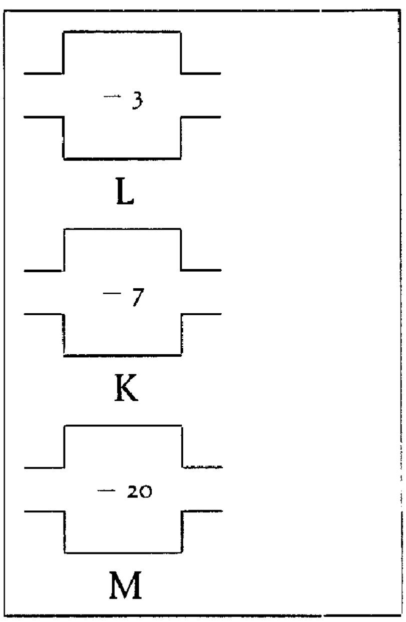
a)		b)	
21 o A =		o B = 10	
33 o A =		o B = 30	
50 o A =		o B = 39	
60 o A =		o B = 45	
100 o A =		o B = 23	
111 o A =		o B = 17	
126 o A =		o B = 19	
150 o A =		o B = 21	

5 o A = 8	1 o B = 10	2 o C = 27
11 o A = 14	7 o B = 16	3 o C = 28
4 o A = 7	9 o B = 18	5 o C = 30
10 o A = 13	20 o B = 29	10 o C = 35
14 o A = 17	21 o B = 30	15 o C = 40
15 o A = 18	33 o B = 42	18 o C = 43

◁ Anschließend auf die gemeinsam gerechneten Aufgaben sollten die Kinder sich selbst mindestens zehn Aufgaben ausdenken und still rechnen. Danach erhielt jedes Kind ein kleines Aufgabenblatt mit zwei Aufgabenarten. Die meisten Schüler lösten die Aufgaben recht schnell und es machte ihnen sichtlich Spaß. Lediglich zwei Kindern war der Aufgabentyp b) zu schwer.

5. Stunde:
Subtraktionsmaschinen

Bei der Beschäftigung mit Subtraktionsmaschinen tritt das Problem der Unlösbarkeit einer Reihe von Aufgaben auf. Diese Unlösbarkeit sollen die Kinder akzeptieren, da darin eine Grundlage für den Begriff der Abgeschlossenheit enthalten ist. Weiterhin liegt hierin eine Voraussetzung für die spätere Erarbeitung der negativen Zahlen.



Zu Beginn der Stunde erhielt jedes Kind ein Blatt Papier, auf dem drei Subtraktionsmaschinen aufgezeichnet waren. Die Kinder sollten sich zunächst für diese Maschinen einige Aufgaben ausdenken und aufschreiben.

Da die Kinder Maschinen von der vorangegangenen Stunde her in Erinnerung haben, kann man erwarten, daß sie sich selbständig mit ihnen beschäftigen können. Mit dem neu hinzugekommenen Problem der unlösbaren Aufgaben sollen sie zunächst ohne Anleitung konfrontiert werden. In einem gemeinsamen Gespräch würden die Kinder unter Umständen gleich auf die Lösung eines Mitschülers eingehen, ohne sich auf der Suche nach einer eigenen Lösung mit der Problematik näher zu befassen. Hier muß jedes Kind eine gewisse erfinderische Fähigkeit entwickeln, die wir als „mathematische Phantasie" bezeichnet haben. In einem sich anschließenden Gespräch können dann verschiedene Vorschläge durchdiskutiert werden.

Zunächst zeigten die Kinder keine besondere Reaktion, als sie die Blätter erhielten. Bemerkungen wie „Ach, das sind ja Maschinen", „Kennen wir schon", „Ist ja leicht" waren zu hören. Den Kindern wurde schnell noch einmal die Wirkungsweise der Maschinen ins Gedächtnis gerufen. Einige der schwächeren Schüler setzten sich zusammen mit dem Lehrer an einen Tisch und rechneten Aufgaben gemeinsam. Nach kurzer Zeit machte sich eine spürbare Unruhe breit. „Das geht ja gar nicht", „Das geht schon, aber nicht immer", „Manche Zahlen gehen nicht", „Was sollen wir da machen, zum Beispiel mit 10 in der Maschinen M?", „Ja, oder was macht man mit der 6 in der Maschine K?" Die Kinder wurden zunächst gebeten, noch eine Weile still weiterzuarbeiten und selbständig nach einer Lösung zu suchen. Daran schloß sich ein gemeinsames Gespräch an.

An der Tafel waren die Maschinen ebenfalls angezeichnet. Es entwickelte sich eine lebhafte Diskussion. „Wenn ich jetzt 2 in L tue, was ist dann?", „Dann ist gar nichts", „Genauso, wenn du 8 in M tust, dann ist auch nichts", „Irgendwas muß dann doch sein." Dieser Schüler suchte bereits nach einer Lösungsmöglichkeit[27]. „Vielleicht gibt es auch Zahlen, nur eben andere, so mit Stern oder so", „Ja, das ist dann immer 0." An dieser Stelle wurde vom Lehrer an die lösbaren Zahlen erinnert und das Beispiel 30 in K gegeben. „Nein, dann nicht, dann gibt es 10." Der Schüler meinte, in diesem Fall gibt es eine Lösung, das Problem existiert hier nicht. Ebenso reagierte ein anderer Schüler: „Wenn ich 10 in M reingebe, dann auch nicht", „Immer, wenn bei L eine Zahl kleiner ist". Dieser Schüler schnitt hier das Problem größer–kleiner an, das in die Lösbarkeit mit hineinwirkt. Er wurde aufgefordert, genauer zu erklären, was er damit meinte. „Bei L zum Beispiel, wenn ich dann 1 nehme,

[27] In der zweiten Versuchsgruppe wurden von den Schülern sofort Lösungen angeboten. Wir schildern hier kurz die interessantesten Fälle:

2 o L = 01 (Vom Kind vorgelesen als 1 unter 0).
1 o L = 02 Hier wird der Zahlbegriff souverän gehandhabt und eine einwandfreie Lösung angeboten.
2 o L = −1
1 o L = −2 Dieser Schüler hatte von seinen Eltern bereits die negativen Zahlen erlernt und wendet sie hier an. Die Ursprünglichkeit, die in den beiden anderen Vorschlägen zu spüren ist, hat er verloren.
3 o L = 0
2 o L = 00
1 o L = 000 Dieser Junge geht angesichts des schwierigen Problems vom Zahlbegriff auf die Mengendarstellung zurück und löst es hier in befriedigender, jedoch aufwendiger Form.

das geht nicht, wenn ich dann 2 nehme, das geht auch nicht, aber bei 4, da geht es." Die Zahl 3 wurde hier als besondere Schwierigkeit vom Schüler einfach ausgelassen. Daraufhin angesprochen meinte er: „Ja, die 3, die geht vielleicht auch nicht." Ein anderes Kind sagte hierzu: „Das gibt dann 0." Sicherlich hatte dieser Schüler zuvor an anderer Stelle schon einmal etwas über die 0 gehört[28]. „Die anderen Zahlen geben auch 0", meinte der Schüler wieder, der oben schon immer 0 als Lösungsmöglichkeit für alle nichtlösbaren Aufgaben vorgeschlagen hatte.

1 0 L =	1 0 K =	1 0 M =
2 0 L =	2 0 K =	2 0 M =
3 0 L =	3 0 K =	3 0 M =
4 0 L =	4 0 K =	4 0 M =
5 0 L =	5 0 K =	5 0 M =
6 0 L =	6 0 K =	6 0 M =
7 0 L =	7 0 K =	7 0 M =
8 0 L =	8 0 K =	8 0 M =
9 0 L =	9 0 K =	9 0 M =
10 0 L =	10 0 K =	10 0 M =

Diese Lösungsmöglichkeit ist durchaus durchdacht und ohne weiteres vom mathematischen Sachverhalt her akzeptabel. Methodisch bringt sie jedoch später bei der Einführung der negativen Zahlen Schwierigkeiten mit sich. Aus diesem Grunde wird diese Möglichkeit nicht weiter hervorgehoben. Es wird auch keine allgemeine Klassifizierung in lösbare und unlösbare Aufgaben vorgenommen. Es wäre an dieser Stelle verfrüht. Später, wenn die Kinder mit den Subtraktionsmaschinen vertraut geworden sind, erkennen sie von selbst die Gesetzmäßigkeiten.

◁ Das Gespräch wurde zunächst abgebrochen. Wir rechneten Aufgaben gemeinsam an der Tafel.

Eine Aufgabenreihe wird hier genommen, um eine spätere Übersicht über die Gesetzmäßigkeit zu erleichtern. Da die Kinder vorher schon selbst einige Aufgaben gesucht hatten, kann man das Rechnen in dieser Form hier verantworten.

− 9 D	1 0 D =	19 0 D =
	5 0 D =	27 0 D =
	10 0 D =	91 0 D =
	13 0 D =	108 0 D =
− 17 E	10 0 E =	19 0 E =
	20 0 E =	18 0 E =
	30 0 E =	17 0 E =
	40 0 E =	16 0 E =
+ 17 F	1 0 F =	33 0 F =
	8 0 F =	46 0 F =
	16 0 F =	77 0 F =
	17 0 F =	91 0 F =
+ 29 G	5 0 G =	29 0 G =
	10 0 G =	30 0 G =
	11 0 G =	31 0 G =
	16 0 G =	32 0 G =
− 11 J	1 0 J =	99 0 J =
	5 0 J =	101 0 J =
	15 0 J =	144 0 J =
	20 0 J =	321 0 J =

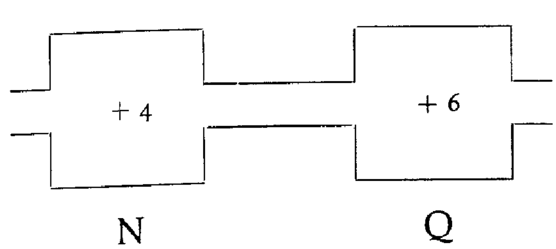
Jedes Kind konnte eine Aufgabe, die es lösen wollte, aus der Reihe aussuchen. Auf diese Art und Weise wurde den schwächeren Schülern die Möglichkeit geboten, auf einfachere Aufgaben auszuweichen. Die Kinder wählten zunächst fast durchweg lösbare Aufgaben. Als erster nahm der Schüler, der im vorangehenden Gespräch so dringlich die 0 als Lösungsmöglichkeit angegeben hatte, eine der anderen Aufgaben. Er nahm die Aufgabe 2 in L. „Wenn man 2 in L gibt, kriegt man 0." An dieser Stelle mußte vom Lehrer eingegriffen werden, wie wir oben schon erwähnt haben. Da eine Lösung bislang nicht bekannt war, wurde ein Strich als Kennzeichnung von unlösbaren Aufgaben vorgeschlagen. „Vielleicht gibt das ja auch 1", meinte einer der Mitschüler plötzlich. Dieser Vorschlag kommt der Definition der negativen Zahlen nahe, aber es würde zu weit führen, an dieser Stelle bereits auf die negativen Zahlen einzugehen. Aus diesem Grunde wurde dieser Schüler zunächst vertröstet.

◁ Die Aufgaben an der Tafel wurden zu Ende gerechnet und in der verbleibenden Zeit arbeiteten die Kinder an Aufgaben auf einem abgezogenen Blatt.

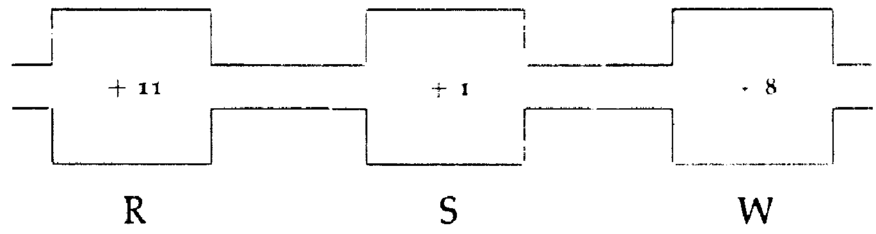
6. Stunde:
Hintereinanderausführen von Additionsmaschinen

Für die Kinder entstehen hier möglicherweise Schwierigkeiten, da sie auf die Niederschrift des Zwischenproduktes verzichten müssen. Auf eine Verknüpfung von Subtraktionsmaschinen mit Additionsmaschinen wird zunächst verzichtet, da dann zum Problem der Verknüpfung noch die zusätzliche Schwierigkeit der verschiedenen Operationen und das Problem der Unlösbarkeit in komplizierten rechnerischen Zusammenhängen hinzukommen.

Zu Beginn der Stunde wurden zwei miteinander verbundene Maschinen, sowie eine Kette aus drei Maschinen an die Tafel gezeichnet.



28 Neuerdings wird in manchen Grundschulklassen die 0 auch in den Rechenunterricht mit einbezogen.



Zunächst wurde ein Gespräch über das Tafelbild geführt. „Das sieht aus wie ein Rohr", „Da rutschen Zahlen", „Die rutschen von einer Maschine in die andere", „Die Maschinen sind verbunden", „Die Zahlen gehen durch beide Maschinen". Aus den Schüleräußerungen war zu erkennen, daß die Kinder den Sinn der Verknüpfung erfaßt hatten. Deshalb konnten wir dann anschließend gleich mit Beispielen arbeiten. „Ja, wenn man zum Beispiel 3 durch N gibt und dann durch Q, dann gibt es erst 7 und dann 13."

Die mündliche Bewältigung des Problems ist wesentlich einfacher als die schriftliche, da eine Pause im Sprechen gemacht und das Zwischenprodukt festgehalten werden kann. Beim schriftlichen Lösen ist das nicht mehr möglich, da das Endprodukt sofort hingeschrieben werden muß.

Alle Kinder suchten jetzt je ein Beispiel für die beiden Maschinenketten. Hier entstanden einige Male Rechenfehler, die aber unwesentlich für die Bewältigung der Sache waren. Als wir nach einer Form der schriftlichen Fixierung der Aufgaben suchten, entstanden zunächst gegenteilige Meinungen bei den Schülern. Ein Kind schlug vor, die Aufgaben wie folgt aufzuschreiben:

$$3 \circ N = 7$$
$$7 \circ Q = 13$$

Dagegen waren andere Schüler der Ansicht, daß dann die „Rutschbahn" nicht mehr zu erkennen sei. „Das können dann ebensogut zwei Maschinen ohne Rutschbahn sein", meinte eines der Kinder. So wurde zunächst der Vorschlag gemacht, die Aufgabe in der folgenden Weise aufzuzeichnen[29]:

$$3 \circ N \quad Q = 13$$

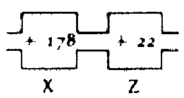
Dieser Vorschlag kam dem mathematischen Sachverhalt sehr nahe. Die Mitschüler waren von diesem Vorschlag begeistert und so wurden die Aufgaben zunächst in dieser Form angeschrieben. Da sich das Verfahren aber als umständlich erwies, einigten wir uns schnell darauf, das Maschinenzeichen in ein einfaches Kästchen zu verwandeln.

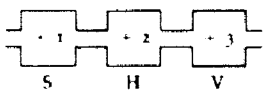
$3 \circ N \square Q = 13$	$3 \circ R \square S \square W = 23$
$7 \circ N \square Q = 17$	$11 \circ R \square S \square W = 31$
$10 \circ N \square Q = 20$	$1 \circ R \square S \square W = 21$
$144 \circ N \square Q = 154$	$20 \circ R \square S \square W = 40$
$99 \circ N \square Q = 109$	$99 \circ R \square S \square W = 119$
$101 \circ N \square Q = 111$	$101 \circ R \square S \square W = 121$
$17 \circ N \square Q = 27$	$17 \circ R \square S \square W = 37$
$1081 \circ N \square Q = 1091$	$1081 \circ R \square S \square W = 1101$

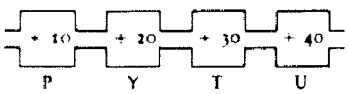
Hier ist zu bemerken, daß die Platzordnung eine wesentliche Rolle bei den Kindern spielt. Die Maschine N wird nicht gleichwertig zu der Maschine Q behandelt. Es würde eine weitere Stufe der Abstraktion bedeuten, wenn die Kinder erkennen könnten, daß man mit den gegebenen N und Q auch die Zusammensetzung Q $\square$ N bilden kann.

Die Schüler, denen es zunächst noch schwerfiel, die Zwischenergebnisse im Kopf zu behalten, konnten sich ein Blatt zu Hilfe nehmen und darauf die Zwischenzahlen notieren. Anschließend an die gemeinsame Rechnung an der

29 Die Identifikation der zusammengesetzten Maschine mit einer anderen einzelnen, die der Summenbildung entspricht, wird hier noch nicht durchgeführt. Das zunächst einfach erscheinende Problem ist vielschichtig. Wesentlich geht dabei das Prinzip der Lösbarkeit mit ein. Zu einem späteren Zeitpunkt, der außerhalb unseres hier beschriebenen Versuchs liegt, wird über den Begriff der *Verschmelzung* zweier Maschinen den Kindern Zugang zu diesem Problem ermöglicht.







Tafel erhielten die Kinder ein Arbeitsblatt mit Aufgaben. Fast alle Schüler lösten sie ohne Schwierigkeiten. Drei schwächere Schüler wurden zu einer Gruppe zusammengefaßt, mit der der Lehrer arbeitete.

Die Zahlen in den Beispielen werden mit Absicht so gewählt, daß sie, zusammengefaßt, eine einfachere Zahl als die Einzelzahlen ergeben. Damit soll die Grundlage für ein späteres Erkennen der Identität mehrerer verknüpfter Maschinen mit einer einzelnen gelegt werden.

Anschließend an das Rechnen der Aufgaben wurde noch ein Gespräch geführt. Die Kinder wurden vom Lehrer aufgefordert, zu beschreiben, wie sie die Aufgaben gerechnet hätten. „Ja, bei der ersten Aufgabe, da habe ich immer erst 178 zugezählt und dann nochmal 22." „Das geht aber anders viel schneller", „Ich habe einfach immer nur 200 zugezählt", „Und bei den zweiten Maschinen immer nur 6, das ging viel schneller", „Und bei der dritten Maschine immer nur 100". Ein Großteil der Kinder hatte diesen vereinfachten Rechenweg, der gleichzeitig auch ein erstes Erkennen der Identität bedeutet, gefunden.
Da im Anschluß an das Gespräch noch etwas Zeit übrig war, spielten wir mit Kartonmaschinen. Mehrere Kartons, von denen die Rückseite offengelassen worden war, wurden nebeneinander auf einen Tisch gestellt. In jedem Karton war eine Eingangs- und eine Ausgangsöffnung eingeschnitten, in die eine Pappröhre eingesetzt worden war. Hinter jeden Karton setzte sich ein Kind. Die Mitschüler konnten nun auf einer Seite der Reihe ihre Aufgaben „einsagen" und erhielten am anderen Ende das Ergebnis. Die Kinder, die die Maschinen darstellten, gaben sich die Zahlen mündlich weiter[30].

7. Stunde: Schiebungen als Abbildungsmenge von Punkten

In dieser Stunde werden die Kinder mit Bewegungen von einzelnen Punkten vertraut gemacht. Der Begriff der Schiebung, aufgefaßt als Abbildung der Punktmenge der Ebene auf sich, soll hier vorbereitet werden. Die Vorstellung, daß bei einer Verschiebung alle Punkte der Ebene bewegt werden, ist für die Begriffswelt der Kinder noch zu schwierig.

Jedes Kind erhielt einen Magnet mit einer Nummer. Die Kinder plazierten ihre Magnete nach eigener Wahl auf dem Magnettisch. Ein Kind fing nun an, seinen Magnet von seinem Punkt aus in alle möglichen Richtungen zu verschieben. Nach der ersten Schiebung „1 nach 12" sollte erst wieder der Ausgangspunkt eingenommen werden. Befragt nach dieser „Rück-Schiebung", sagte der Schüler von selbst: „Ja, das ist die 12 nach 1." Von nun an nannte das Kind die Rück-Schiebungen von selbst mit. „1 nach 14, 14 nach 1"; „1 nach 16, 16 nach 1"; „1 nach 5, 5 nach 1" und so fort. Die zuschauenden

30 In der zweiten Versuchsgruppe führten wir an dieser Stelle zusätzlich das folgende Spiel durch: Die Schüler werden in zwei gleich starke Gruppen eingeteilt, die gegeneinander spielen. Jeder Schüler verkörpert nun eine Maschine. In beiden Gruppen treten genau dieselben Maschinen auf. Eine Zahl wird nun beiden „Maschinenreihen" gegeben. Die Zwischenergebnisse werden flüsternd weitergegeben. Die Gruppe, die zuerst das richtige Ergebnis hat, erhält einen Punkt.

Schüler konnten helfend eingreifen, wenn sie Verschiebungen wußten, die dem aktierenden Kind nicht einfielen. Daran anschließend konnte der Nachbar des ersten Schülers von seinem Punkt aus alle möglichen Verbindungen herstellen. Allerdings war es nicht erlaubt, bereits genannte Schiebungen zu wiederholen. Beim letzten Schüler blieb demnach keine Möglichkeit mehr übrig. Die Folgerichtigkeit dieser Tatsache sahen die Kinder aber nicht sofort ein. Der Junge schlug vor „Ich gehe nach 4", „Nein, das kannst du nicht, das hab' ich schon", „Dann eben nach 13", „Nein, das ist eines von meinen". Nach einigen weiteren Versuchen sagte der Schüler resigniert: „Dann bleibt eben gar keiner für mich über." Ein Mitschüler half ihm aus: „Ich weiß was, dann gehst du eben von 14 nach 14." Interessanterweise fanden die Kinder diesen Vorschlag „Klasse" und jeder probierte bei sich selbst die Nullverschiebung[31], die der Junge ja vorgeschlagen hatte, aus. Allerdings mußte auch diese Nullverschiebung mit einer Handlung verbunden werden. Die Kinder hoben den Magnet hoch und setzten ihn auf dieselbe Stelle wieder ab. Uns schien darin eine Bestätigung der Meinung Piagets zu liegen, daß die Wurzel aller Begriffe im Handeln liegt. Im folgenden bildeten wir drei Gruppen zu je sechs Kindern, die mit 50 cm $\times$ 50 cm großen Pappen auf einem größeren Tisch arbeiteten. Die vorangehende Übung wurde mit den Magneten im Prinzip wiederholt. Die Kinder sollten jedoch möglichst selbständig alle Verschiebungsmöglichkeiten herausfinden.

Wir haben verschiedene Gründe für die Durchführung der Gruppenarbeit an dieser Stelle. Die Anzahl der Möglichkeiten der Verbindungen soll einmal durch die geringere Anzahl von Punkten reduziert und damit für die Kinder übersichtlicher gemacht werden. Eine sich anschließende Aufzeichnung der Verschiebung soll vollständig durchgeführt werden, jedoch nicht zu lange dauern. Außerdem spielen die Kinder hier alle Möglichkeiten noch einmal durch.

Daran anschließend setzte sich jedes Kind an seinen Platz zurück. Die Verschiebungen wurden an der Tafel aufgeschrieben und von den Schülern anschließend abgeschrieben. Gleichzeitig hatten wir als Hilfe die Magnettafel mit sechs Punkten darauf an der Wand aufgehängt. Jedes Kind nannte nun zwei ihm bekannte Verschiebungen und wir schrieben sie in der folgenden Ordnung auf. Wir fingen mit dem Punkt 1 an, um die Übersicht besser zu wahren.

31 Zur Verdeutlichung für den Leser sprechen wir hier schon von Nullverschiebung und inversen Verschiebungen. Im Unterricht tauchten diese Begriffe in dieser Stunde noch nicht auf.

1→2 2→1 2→3 3→2 3→4 4→3 4→5 5→4 5→6 6→5

1→3 3→1 2→4 4→2 3→5 5→3 4→6 6→4

1→4 4→1 2→5 5→2 3→6 6→3

1→5 5→1 2→6 6→2

1→6 6→1

Die Schiebungen wurden paarweise aufgeschrieben, um die Zusammengehörigkeit inverser Schiebungen hervorzuheben. Am Ende der Aufstellung fiel einem Schüler plötzlich ein, daß wir die Nullschiebungen ja alle vergessen hätten. Er merkte es, als die Schiebung 6 → 6 aufgeschrieben werden sollte. Wir schrieben alle Nullschiebungen in einer Reihe unter unserer Tabelle auf.

1→1 2→2 3→3 4→4 5→5 6→6

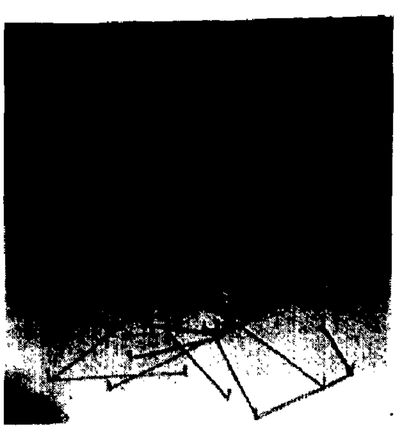
Anschließend an diese Aufzeichnung erhielten die Kinder zwei vorgedruckte Blätter, auf denen einmal 5 und einmal 8 Punkte eingezeichnet waren. Die Kinder sollten nun zunächst mit feinen Bleistiftstrichen die Verbindungen einzeichnen und daran anschließend eine Tabelle aufstellen. Wir gaben mit dieser Aufgabenstellung den Schülern Gelegenheit, sich selbständig mit dem Problem der Punktverschiebung auseinanderzusetzen. In den vorangegangenen Übungen löste jeder Schüler einen Teil der Problematik, mußte sie aber nicht in ihrer Gesamtheit handhaben. Schwächere Schüler konnten sich darauf beschränken, die Aufgabe zeichnerisch zu lösen. Ungefähr die Hälfte der Schüler schaffte die Tabellen ohne Hilfe des Lehrers, ein weiteres Viertel mit Hilfestellung und etwa vier Schülern war diese Aufgabe zu schwer.

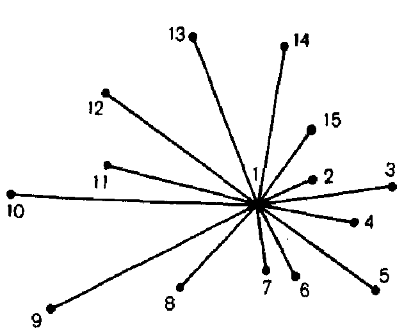
8. Stunde:
Nullschiebung und inverse Schiebungen

In dieser Stunde sollen den Kindern die inversen Schiebungen und die Nullschiebung bewußt gemacht werden. In den vorangehenden Stunden wurde bereits damit gearbeitet, eine Bezeichnung wurde damals jedoch noch nicht eingeführt.

Grundlage war auch hier wieder die Gruppenarbeit in der Mitte des Klassenraumes. Wir setzten uns um einen Hocker herum, auf dem diesmal eine etwa 90 cm × 90 cm große Holzplatte gelegt worden war. In die Platte hatten wir etwa 18 Nägel eingeschlagen. Die Kinder bekamen Gummibänder, mit denen sie zunächst beliebige Verbindungen zwischen den einzelnen Nägeln herstellen konnten. Dann erhielt ein Schüler den Auftrag, von seinem Nagel aus alle Verbindungen, die möglich waren, herzustellen. Die anderen Kinder halfen dabei.

Hier wird von der Verschiebbarkeit der Punkte abgegangen und anderes Material gewählt: spannbare Gummibänder. Wir sind der Ansicht, daß der Wechsel hier gerechtfertigt ist, da die Kinder die Bewegung des Verschiebens häufig genug ausgeübt haben, um eine Vorstellungsgrundlage zu haben. Hier wird nun weiterhin abstrahiert, indem die Verschiebung nicht mehr konkret, sondern nur noch gedanklich durchgeführt wird.
Durch die doppelte Führung der Gummibänder ergibt sich ein deutliches Bild für die Verbindungsmöglichkeiten „vorwärts" und „zurück".



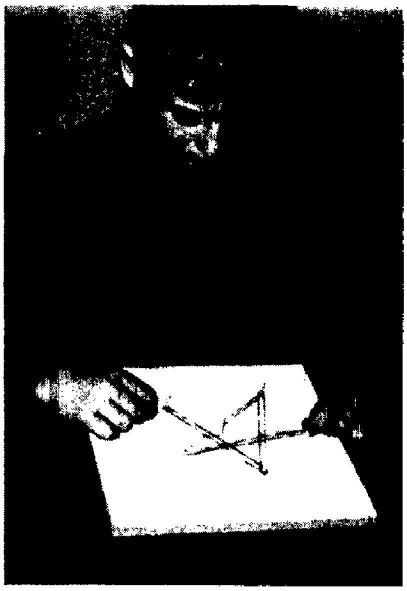


Anschließend sprachen wir über die Anzahl der Möglichkeiten. „Das sind genau 14", „Und zurück geht es auch noch", „Dann sind es also, wart mal, dann sind es 28." Die Schüler wurden gefragt, ob damit alle Verbindungen erfaßt seien. „Ja", „Nein gar nicht, die Schiebung von 1 nach 1 kommt auch noch dazu", „Dann sind es also insgesamt 29". Der Schüler, der die Schiebung 1 nach 1 zusätzlich gefunden hatte, ging an die Tafel und schrieb eine Tabelle auf.
Jedes Kind diktierte zwei Schiebungen. An der Tafel entstand etwa folgendes Bild[32]:

32 Verknüpfungen von Schiebungen werden hier, ähnlich wie bei den Drehungen, noch nicht schriftlich fixiert, lediglich die einzelnen Schiebungen.

$1 \to 6 \quad 1 \to 4 \quad 1 \to 12 \quad 1 \to 8 \quad 1 \to 7 \ldots\ldots \quad 1 \to 15 \quad 1 \to 1$

$6 \to 1 \quad 4 \to 1 \quad 12 \to 1 \quad 8 \to 1 \quad 7 \to 1 \ldots\ldots 15 \to 1$



Ganz selbstverständlich hatten die Schüler die Schiebungen geordnet nach zueinander inversen Paaren genannt. Die Kinder wurden daraufhin auf die Ordnung im Tafelbild aufmerksam gemacht. „Ja, er hat immer die zwei zusammengeschrieben", „Ja, die die einmal vor und einmal zurück gehen", „Die gehören zusammen", „Das sind immer zwei", „Die sind ja auch von denselben Punkten". Nach einer besonderen Bezeichnung für diese Paare befragt, machten die Kinder einige Vorschläge. „Vielleicht können wir sie ja Paare nennen", „Oder Zusammenschiebungen", „Nein, das hört sich komisch an", „Oder Doppelschiebungen", „Oder Zweierschiebungen".

Die Vorschläge der Schüler sind grundsätzlich brauchbar. Für die Bildung eines abstrakten Begriffes für das Inverse sind sie jedoch nicht geeignet, da sie noch zu sehr mit der konkreten Vorstellung der Schiebung verhaftet sind. Deshalb wird es hier notwendig, eine Bezeichnung zu nennen, die eine Abstraktion ermöglicht.

Wir nannten den Begriff „inverse Schiebung". „Das ist ein komisches Wort", „Hab' ich noch nie gehört", „Invers, schreiben Sie das doch mal an die Tafel". Das Wort wurde an die Tafel geschrieben und die Schüler freundeten sich wesentlich schneller damit an, als zunächst zu erwarten war. Jedes Kind sollte sich nun ein Paar zueinander inverser Schiebungen aussuchen. In schneller Folge nannten die Kinder nun solche Paare. Genannte Schiebungen wurden an der Tafel ausgestrichen.

Auf diese Art und Weise soll eine schnelle Übung eingeschaltet werden, bei der inverse Paare gefunden werden müssen. Andererseits soll auf die Stellung des Nullelements hingewiesen werden. Die Nullschiebung bleibt nämlich am Ende an der Tafel stehen. Vom mathematischen Standpunkt aus ist das Nullelement zu sich selbst invers. Die Kinder können das jedoch zu diesem Zeitpunkt noch nicht auffassen.

„Da bleibt ja eins über, das geht nicht, und ich habe keines mehr", „Ja, das ist nur eins, das ist kein inverses Paar", „Das ist allein", „Das ist gar nichts", „Das ist wie Null", „Ja, Nullschiebung, das paßt doch gut"[33]. Dieser Vorschlag wurde von den Mitschülern gut aufgenommen.
Anschließend an das Gespräch arbeiteten die Kinder an ihrem Arbeitsplatz. Jeder Schüler erhielt eine Lochplatte[34], in die er nach Belieben Stäbchen einstecken und dann Verbindungen mit Gummibändern herstellen konnte. In diesem mehr spielerischen Tun sollten die Kinder wiederholen, was wir vorher an der Platte erarbeitet hatten. Gleichzeitig erhielten die Schüler den Auftrag, wenn möglich die Verbindungen aufzuschreiben. Ungefähr zwölf Schülern gelang das ohne Hilfestellung (Abb. links oben).

9. Stunde: Nulldrehung und inverse Drehungen

In dieser Stunde arbeiteten die Kinder vorwiegend am eigenen Tisch. Jeder Schüler erhielt eine Holzplatte sowie ein Pappquadrat, das auf der Platte mit einem Nagel drehbar befestigt war. Die Ecken des Quadrats wurden mit Buchstaben bezeichnet. Die Kinder beschäftigten sich kurze Zeit frei damit (Abb. links unten). Anschließend wurde gemeinsam gearbeitet. Jeweils ein Kind nannte eine Drehung und die Mitschüler führten sie dann aus. Beispielsweise sagten sie „A nach C", „B nach D", „A nach D". Der nächste Schüler nannte die Drehung „D nach A" und sagte gleich dazu: „Das ist die inverse Drehung zu der von Michael." Wir suchten nun verschiedene zueinander inverse Drehungen auf und schrieben sie an der Tafel auf:

$A \to C \quad A \to B \quad A \to D$

$C \to A \quad B \to A \quad D \to A$

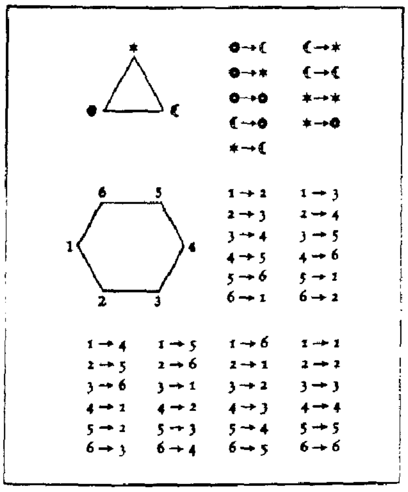
[33] Die Bezeichnung „Nullschiebung" wurde hier von dem Kind genannt, das auch in den vorangehenden Stunden bereits auf die Null hingewiesen hatte. Man kann jedoch diesen Vorschlag allgemein von den Kindern nicht erwarten. Eine Hilfestellung durch den Lehrer wird in vielen Fällen erforderlich sein. Grundsätzlich wird die Sonderstellung des Nullelements hier jedoch deutlich und eine Namensfindung notwendig.

[34] Die Lochplatten wurden aus großen Platten, die zur Schalldämpfung in Zimmerdecken verwendet werden, zurechtgeschnitten.

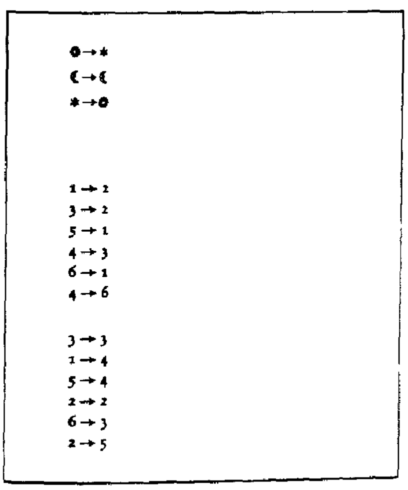
B→C B→D C→D

C→B D→B D→C

Ein Kind nannte zwischendurch A → A und sagte: „Das ist die Nulldrehung." Hier stellten wir im Vergleich mit der Nullschiebung einen Unterschied fest: Man kann beliebig viele Volldrehungen durchführen und erhält immer die Drehung A → A. Dieses Phänomen beschäftigte die Kinder noch lange. Es fiel ihnen sehr schwer, mit dieser Tatsache vertraut zu werden. Wesentlich schneller sahen sie ein, daß die Nulldrehung eine Sonderstellung hat, da kein von ihr unterschiedenes Inverses vorhanden ist. Mit der Nulldrehung gingen die Kinder sofort völlig unbekümmert um, sie bereitete ihnen sogar sichtlich Spaß und sie nannten sie bei Übungen bevorzugt.



Für uns ergibt sich zunächst die Frage, ob der Schüler zufälligerweise sofort eine inverse Drehung erkannt und sie auch als solche bezeichnet hat. Unserer Ansicht nach war es kein Zufall. Der Begriffsinhalt des Inversen ist den Kindern dieser Altersstufe zugänglich und so können sie ihn bei entsprechender Vorbereitung auch erkennen.



< Anschließend an die Arbeit mit dem Quadrat führten wir Drehungen mit einem regelmäßigen Dreieck und mit einem regelmäßigen Sechseck durch. Die Schüler erhielten hier ein Blatt, auf dem alle möglichen Drehungen aufgezeichnet waren, und auf dem sie die jeweils durchgeführte Drehung durchstreichen konnten. Einige der guten Schüler, die schnell mit dieser Aufgabe fertig waren, erhielten ein weiteres Blatt mit unvollständig angeführten Drehungen, die ergänzt werden mußten. ←

Die Stillarbeit wurde nach einiger Zeit abgebrochen und zum Abschluß der Stunde noch ein gemeinsames Spiel durchgeführt. Auf dem Fußboden wurden zwei 1,50 m × 1,50 m große Quadrate mit Tesakrepp aufgeklebt und die Ecken mit A, B, C, D bezeichnet[35]. An jede Ecke stellte sich ein Schüler. Jeweils ein Zuschauer konnte einen Drehbefehl ausrufen, etwa „A nach D". Alle acht Kinder mußten dann ihren Platz wechseln. Daran anschließend nannte ein anderer Schüler schnell die dazu inverse Drehung, so daß der Ausgangsstand wiederhergestellt war. Wir stellten dabei fest, daß diese Aufgabe nicht immer leicht zu lösen war. Durch die großräumige Anlage des Spiels verloren einige Kinder schnell die Übersicht. Nachdem jedoch die Spielkinder einige Male ausgewechselt worden waren, war festzustellen, daß die Drehungen zunehmend reibungsloser durchgeführt werden konnten.

35 In der zweiten Versuchsgruppe wählten wir Symbole an Stelle der Buchstaben, um die Kinder nicht auf den Buchstabenschematismus festzulegen.

Diese Übung wird hier durchgeführt, um die Kinder die Eigenschaft „invers" noch einmal bewußt erleben zu lassen. Ebenso wird hier deutlich, daß sich mit einem Punkt die anderen drei mitdrehen.

10. Stunde:
Hintereinanderausführung von Additions- und Subtraktionsmaschinen

Die Verknüpfung von Additionsmaschinen wurde in der 6. Stunde bereits behandelt. Hier kommt nun eine wesentliche Schwierigkeit hinzu: Das Verknüpfen mit Subtraktionsmaschinen. Dabei entstehen fünf Kategorien von Zusammensetzungen:

1. Verknüpfung von zwei Additionsmaschinen.
2. Verknüpfung einer Additionsmaschine mit einer Subtraktionsmaschine, wobei der Zahlwert der Additionsmaschine größer oder gleich dem Zahlwert der Subtraktionsmaschine ist.
3. Verknüpfung einer Additionsmaschine mit einer Subtraktionsmaschine, wobei der Zahlwert der Additionsmaschine kleiner als der Zahlwert der Subtraktionsmaschine ist.
4. Verknüpfung einer Subtraktionsmaschine mit einer nachfolgenden Additionsmaschine.
5. Verknüpfung zweier Subtraktionsmaschinen.

Nimmt man mehr als zwei Maschinen für eine Verknüpfung, so entstehen natürlich noch mehr Fälle. Die grundsätzlichen Probleme verändern sich jedoch nicht.

Bei Fall 1 entstehen kaum Schwierigkeiten, wie wir schon festgestellt haben.

Bei Fall 2 tritt nur die Schwierigkeit auf, daß sich der Betrag der Zwischenzahl wieder vermindert. Es gibt trotz des Vorhandenseins der Subtraktionsmaschine keine unlösbaren Aufgaben.

Bei Fall 3 treten unlösbare Aufgaben auf, wie es bei einfachen Subtraktionsmaschinen der Fall war.

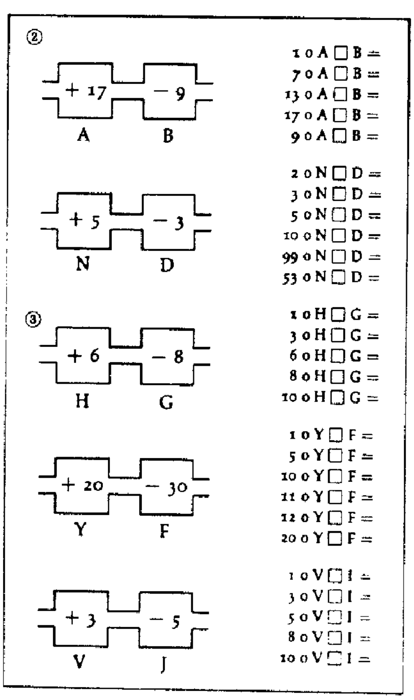
Bei Fall 4 ergeben sich Schwierigkeiten besonderer Art, da für eine Lösung hier die Kenntnis der negativen Zahlen erforderlich wäre.

Bei Fall 5 ergibt sich das Problem, daß die Menge der Lösungen zweifach eingeschränkt wird.

Aufgaben von Typ 1 werden hier nur kurzfristig besprochen, da sie schon in der 6. Stunde Unterrichtsgegenstand waren. Aufgaben vom Typ 4 stellen wir zunächst zurück, da bei ihrer Behandlung Kenntnisse der negativen Zahlen erforderlich wären, wie wir oben schon sagten. Diskutiert werden in dieser Stunde die Fälle 2, 3 und 5. Bei den Subtraktionsmaschinen verwenden wir nur kleine Funktionszahlen, um den Bereich der nicht lösbaren Aufgaben klein zu halten, da das Problem der Verknüpfung hier ja im Vordergrund steht.

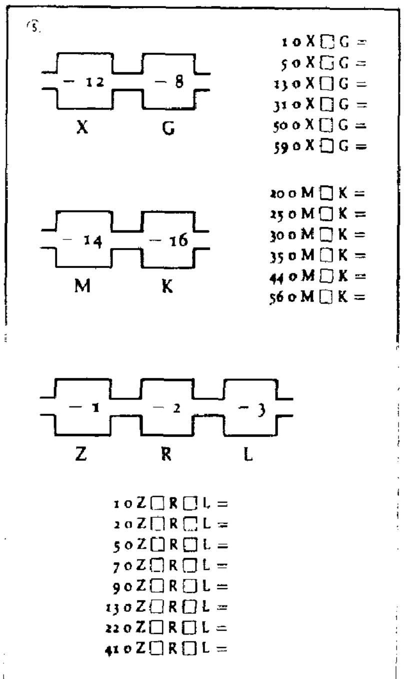
Zu Beginn der Stunde wurde als Wiederholung ein mündliches Kopfrechnen in Form eines Wettspiels durchgeführt. Vier einfache Additionsmaschinen waren an der Tafel angezeichnet. Beim mündlichen Rechnen wurden nun Zahlen durch eine Kombination von jeweils zwei dieser Maschinen geschickt.

Am schnellsten sind die Aufgaben zu lösen, wenn die Kombination als eine Maschine aufgefaßt und angewendet wird. Für die Arbeit mit Maschinenverknüpfungen ist diese Einsicht eine wichtige Voraussetzung.



◁ Anschließend folgte eine Stillarbeit. Die Schüler erhielten Arbeitsblätter, auf denen Aufgaben vom Typ 2, 3 und 5 angeführt waren. Zunächst sollten sie sich selbständig mit den Problemen beschäftigen, konnten aber leise Fragen stellen.

Die Kinder stellten schnell fest, daß bei dem Typ 3 nicht alle Aufgaben lösbar waren. Sie fanden, daß sie ähnlich wie die Aufgaben einfacher Subtrak-



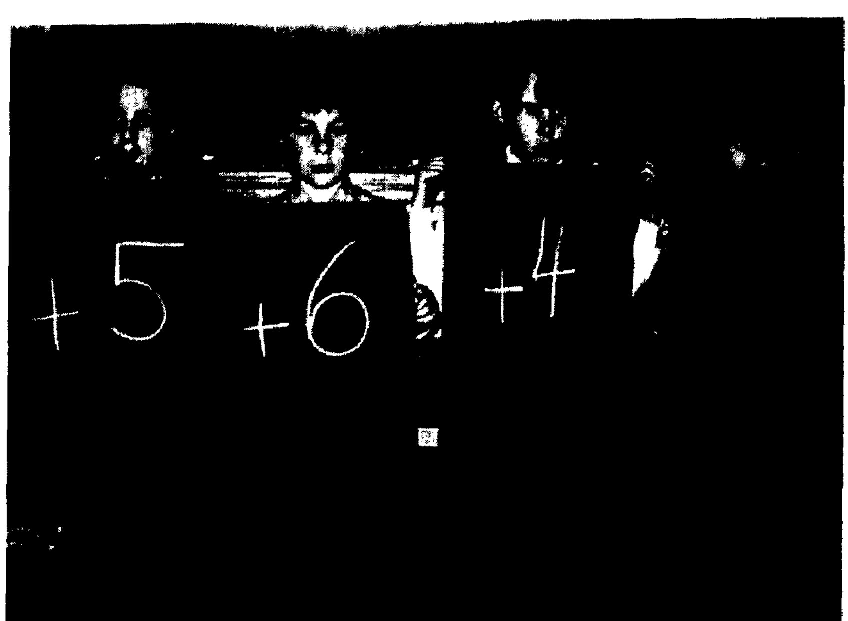
tionsmaschinen zu behandeln seien. Zu der Aufgabengruppe 5 kam bald eine Frage: „Wenn ich nun 13 in X gebe und dann in G, was ist dann?" Das Kind wurde aufgefordert, die Grundzahl zunächst in X zu geben. „Ach ja, das ist dann 1 und dann in G geht es eben nicht." „Welche Zahl geht denn überhaupt?" meinte ein Mädchen. „Ja, zum Beispiel 20, ach nee, das geht auch nicht." „25 geht, das ist nämlich 13 und dann in G gibt es 5", fand eines der Kinder heraus. Fast alle konnten jetzt die Aufgaben ohne größere Schwierigkeiten lösen.

Nachdem der größte Teil der Kinder die Aufgaben gerechnet hatte, wurde ein kurzes Gespräch über die verschiedenen Maschinen geführt. Den vereinfachten Rechenweg fanden nur wenige Kinder beim Aufgabentyp 2 und kein Kind beim Aufgabentyp 3.

Hieran kann man erkennen, daß, je komplizierter der rechnerische Sachverhalt ist, desto weniger die Kinder zu Abstraktionen greifen. Sie gliedern den Weg wieder in Schritte auf, obwohl sie prinzipiell in vorangegangenen Stunden den Schritt schon bewältigt haben.

Die Verschiedenheit der Aufgaben erkannten sie jedoch. „Die sind verschieden", „2. und 3. sind eigentlich gar nicht verschieden", „Das ist schon verschieden", „Nö, eigentlich nicht, aber irgendwie doch", „Die Aufgaben von 3 sind schwerer". Das Kind wurde aufgefordert, diese Äußerung näher zu erklären. „Hier bei X, wenn man da 13 nimmt, dann geht es nicht", „14 auch nicht", „20 ging auch nicht", „Aber 25 ging", „Bei 2., da gingen, da gingen alle Zahlen".

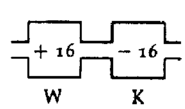
Im letzten Teil der Stunde veranstalteten wir ein „Maschinen-Ratespiel". Zunächst mußte eine einzelne Maschine erraten werden. Ein Kind dachte sich eine Maschine aus, aber verriet sie nicht. Die Mitschüler konnten nun Zahlen nennen und erhielten von der „Maschine" das Ergebnis. Der Schüler, der die Funktionszahl zuerst erriet, durfte sich selbst eine Maschine ausdenken. Der Wechsel ergab sich hier sehr schnell. Nach etwa viermaliger Durchführung wurde das Spiel schwieriger gemacht. Zwei Schüler stellten sich vor der Klasse auf. Ein Kind hielt ein Pappschild hoch, auf dem eine Zahl angegeben war. Der zweite Schüler hielt die leere Rückseite seines Schildes hoch. Wie vorher mußte die unbekannte Maschine erraten werden. Zunächst wurden nur zwei positive, anschließend eine positive und eine negative zu erratende Maschine gewählt. Die zweite Kombination erwies sich bereits als recht schwierig und mußte längere Zeit geübt werden. Zum Abschluß wurde noch mit einer Viererkombination, bei der die zu erratende Maschine an letzter Stelle stand, gespielt. Solche Aufgaben waren auch für die guten Schüler



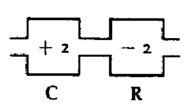
schwierig, es machte den Kindern aber Spaß, und sie waren begeistert, w
sie die Funktionszahl gefunden hatten.

Stehen die zu erratenden Maschinen am Anfang oder in der Mitte, so ist Aufgabe für die meisten Schüler völlig unübersichtlich. Diese Aufgabenty sind nur zu lösen, wenn man die Kombination gedanklich zu einer Masc zusammenfaßt. Von der Ergebniszahl muß zunächst der Ausgangsbet dann die Summe der bekannten Maschinen abgezogen werden. Ist mehr eine Maschine unbekannt, so gibt es keine eindeutige Lösung.

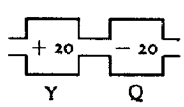
11. Stunde:
Inverse Maschinen
und die Nullmaschine



1 o W □ K =
2 o W □ K =
3 o W □ K =
9 o W □ K =
99 o W □ K =
512 o W □ K =
1095 o W □ K =



1 o C □ R =
7 o C □ R =
8 o C □ R =
11 o C □ R =
20 o C □ R =
111 o C □ R =
1001 o C □ R =

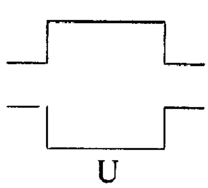


10 o Y □ Q =
20 o Y □ Q =
50 o Y □ Q =
100 o Y □ Q =
71 o Y □ Q =
66 o Y □ Q =
23 o Y □ Q =

Zu Beginn der Stunde erhielten die Kinder ein Arbeitsblatt, auf dem selbständig Aufgaben rechnen sollten. ←

Während des Rechnens äußerten die Kinder: „Das ist ja genau dasselbe, herauskommt, wie das, was man reintut." „Das ist ja auch ganz klar. Maschine ist ja auch ganz genau entgegengesetzt." „Die eine ist eine Mi maschine und die andere ist dieselbe, nur in Plus." „Die Maschinen, passen auch so zusammen." „Ja, das ist genauso, wie bei den Schiebur oder den Drehungen, einmal vor, einmal zurück." „Das sind wohl auch verse Maschinen."[36] Auf diese Art und Weise hatten die Kinder selbstäı zum Begriff des Inversen gefunden. Allerdings hatten wir ihnen die einander passenden Maschinen vorgegeben. Nun sollte jedes Kind selbst Paar zueinander inverser Maschinen suchen. Die Stillarbeit wurde abge chen und jedes Kind nannte zwei zueinander inverse Maschinen. In meisten Fällen wählten die Kinder ausgefallene Zahlen, wie „− 1 + 1001", „− 1, + 1", „− 999, + 999".

Ebensogut kann an dieser Stelle mit Kartonmaschinen gearbeitet wer Die Kinder unserer Gruppen legten zu diesem Zeitpunkt auf die konkr Maschinen keinen besonderen Wert mehr. Wir hatten den Eindruck, daf im Augenblick von den abstrakteren Maschinen mehr fasziniert waren, von den konkreten, die vor allem am Anfang eine große Attraktion stellten. Die Einführung des Inversen geschieht hier recht organisch, wäh bei der Einführung der Nullmaschine ein Anstoß gegeben werden muß.[37]



1 o U = 1
9 o U = 9
31 o U = 31
17 o U = 17
13 o U = 13

An der Tafel war eine Maschine angezeichnet, deren Funktion von den l dern erkannt werden sollte. Abzuleiten war diese Funktion von bereits gerechneten Aufgaben, die ebenfalls an der Tafel standen.

Zunächst sagten die Kinder gar nichts, sie waren über die Maschinen staunt. „Das ist ja, wie wenn zwei inverse Maschinen zusammen si sagte nach kurzer Pause ein Schüler. „Ja, aber es ist ja nur eine Maschi meinte ein anderer. „Ist ja komisch", fanden die meisten. Nach einiger wollten die Schüler die Lösung vom Lehrer haben. „Sagen Sie uns doch was da rein kommt." Das wurde abgelehnt. Schließlich fiel einem Schüler Lösung ein. Er sagte seine Antwort leise: „Das kann ja nur ne Null se Von da an fanden mehr und mehr Schüler die Lösung. Sie sagten sie Aufforderung hin dem Lehrer ins Ohr. Bevor die Lösung durch Her sprechen allgemein bekannt war, hatten ungefähr zwölf Kinder selbstäı die Antwort gefunden. In die Maschine schrieben wir das Wort „N maschine", um die Sonderstellung noch zu betonen.

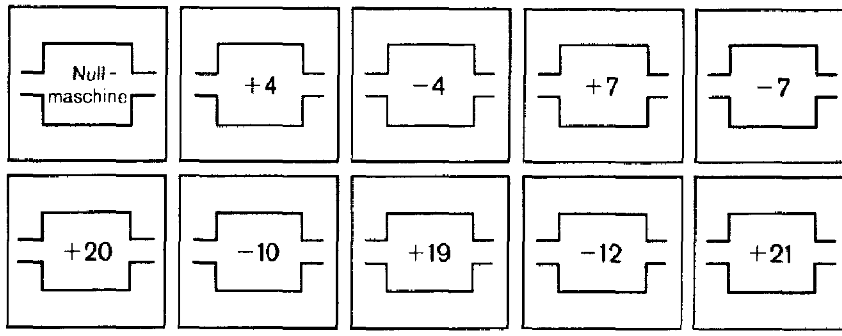
Der erste Schüler, der „die Null" nennt, kennt das Zahlzeichen o wohl sc Das ist sicherlich auch bei anderen Schülern der Fall, ihm ist aber die F tionsweise der Null bewußter als den anderen Kindern. Man muß d jedoch bedenken, daß eine klare und komplexe Vorstellung vom Wesen Nullelements erst zu einem späteren Zeitpunkt zu erwarten ist.
Den Kindern, die die „Null" als Lösungsmöglichkeit hier selbständig fin wird wohl ein Charakteristikum dieser Struktur bewußt. Die Schüler,

36 Bei der 2. Versuchsgruppe kam der Begriff nicht sofort, sondern wurde erst im Verlauf eines Gesprächs entwickelt.

37 Bei der 2. Versuchsgruppe war der Sachverhalt hier genau umgekehrt, da die Schüler bereits mit der „Null" vertraut waren.

keinen eigenständigen Beitrag bringen können, sind unter Umständen noch nicht dazu in der Lage, sich mit dem Nullelement auseinanderzusetzen.

Zum Abschluß der Stunde erhielten die Kinder je einen Stoß von 10 farbigen 5 cm × 5 cm großen Kärtchen, auf denen je eine der folgenden Maschinen aufgezeichnet war.



In einem kurzen Gespräch wurde die Aufgabe erläutert und die Möglichkeit arbeitssparender Kombinationen angedeutet. Die Kinder sollten zunächst fünf vorgegebene Zahlen einzeln durch alle Maschinen schicken und die Ergebniszahlen auf einem Blatt notieren. Daran anschließend sollten sie eine Kombination von zwei beliebig ausgewählten Maschinen bilden, durch die wieder die fünf Zahlen gegeben werden sollten. Ebensolche Kombinationen aus drei, vier, fünf, sechs und mehr Maschinen sollten folgen.

Zweck dieser Übung ist es, zu prüfen, inwieweit die Kinder mit den Inversmaschinen sowie mit den Nullmaschinen umgehen können. Bis zur Kombination von fünf Maschinen hin kann man nämlich bei geschickter Auswahl mit einem äußerst geringen Arbeitsaufwand auskommen, vorausgesetzt, daß die zueinander inversen Maschinen und die Nullmaschine geeignet eingesetzt werden.

Einzelne Kinder mußten während der Stillarbeit noch einmal beraten werden. Es zeigte sich jedoch, daß ein Großteil der Kinder mit den inversen Maschinen und auch der Nullmaschine gut umgehen konnte.

Eine Zusammenfassung der Begriffe des Inversen und des Nullelements wird hier absichtlich vermieden, da diese Strukturen noch längst nicht vollständig im Besitz der Kinder sind. Eine verfrühte Verallgemeinerung wäre nur mit Hilfe eines unserer Ansicht nach aufwendigen, schädlichen und auch unnötigen Formalismus möglich.