Zur Mengenbehandlung im 1. Schuljahr

Sigrid und Günter Graumann

Die Bestrebungen verschiedener Landesschulverwaltungen, die sogenannte „Mengenlehre" in der Grundschule zu etablieren, sind in jüngster Zeit in ein entscheidendes Stadium getreten[1]. *Wir wollen aus diesem Grunde — trotz mehrerer bislang bereits erschienenen kritischen Veröffentlichungen zu der von der KMK am 3. 10. 1968 verordneten Reform des Mathematik- beziehungsweise Rechenunterrichts*[2] *— hier dazu Stellung nehmen.*

Die in der Verordnung vom 3. 10. 1968 fixierten Ziele sind unserer Ansicht nach außerordentlich anspruchsvoll in Hinsicht auf die allgemeinen Erziehungsziele[3] und gleichzeitig sehr umfangreich und detailliert in Hinsicht auf die stofflichen Lernziele[4]. Das hat zur Folge, daß die nach den Richtlinien der KMK konzipierten Kurse[5] durch die Anforderungen der stofflichen Ziele bereits in vielen Punkten festgelegt sind[6]. Wir meinen nun, daß diese im Mathematik- beziehungsweise Rechenunterricht des ersten Schuljahres sich einbürgernde Priorität der mathematischen Inhalte gegenüber entwicklungspsychologischen Gesichtspunkten[7] die Gefahr eines Formalismus neuerer Prägung in sich birgt. Dieser Formalismus hat unserer Ansicht nach verschiedene Ursachen, die zum Teil im didaktischen Ansatz zum Teil im methodischen Vorgehen begründet sind. Auf eine dieser Ursachen wollen wir näher eingehen:

Für die Behandlung des Mengenkalküls im ersten Schuljahr stehen keine entsprechenden echten mathematischen Inhalte, an denen die Begriffe des Mengenkalküls in einem sinnvollen Zusammenhang einsichtig gemacht werden können, zur Verfügung. Zunächst wäre festzustellen, daß in der Öffentlichkeit häufig die Begriffe „Mengenlehre" und „Neue Mathematik" beziehungsweise „Moderne Mathematik" für annähernd denselben Sachverhalt verwendet werden[8]. Hier liegt eine falsche Akzentuierung vor, denn Mengenlehre ist keineswegs mit moderner Mathematik im mathematischen oder auch didaktischen Sinne gleichzusetzen. Erschwert wird die Verständigung noch zusätzlich durch die unterschiedliche Verwendung des Wortes „Mengenlehre" in der Mathematik und in der Didaktik. Für unsere späteren Ausführungen ist zunächst eine Darstellung der mathematischen Bereiche, die in den Mathematik- beziehungsweise Rechenunterricht des ersten Schul-

1 Wir verweisen hier etwa auf den Hamburger Lehrplanentwurf vom Herbst 1971, die Richtlinien von Nordrhein-Westfalen und Baden-Württemberg, sowie auf die gegenwärtig noch andauernden Richtlinienkonferenzen in Niedersachsen.

2 Vergleiche hierzu *H. Karaschewski,* Irrwege moderner Rechendidaktik. Bad Godesberg 1969; *Th. Ziegler,* Fakten und Interpretationen. Beiträge zum Mathematikunterricht 1969, Teil 1, S. 109 ff; *K. Odenbach,* Das Recht des Kindes. In: Die Ganzheitsschule, H. 6/1969, S. 172 ff.; Erlanger Stellungnahme. In: betrifft: erziehung, H. 11/1969, S. 34 ff.; *A. Fricke,* Neue Richtlinien und moderner Mathematikunterricht. In: Die Ganzheitsschule, H. 3/1970, S. 83 ff.; *K. Sielaff — W. Bödecker,* Analyse. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, H. 2/1970, S. 42 ff.; *W. Hinrichs,* Für und wider die Grundschulmathematik. In: WPB, H. 9/1970, S. 446; *E. Wittmann,* Die Mengenlehre und der Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Der Mathematikunterricht, H. 1/1971, S. 26 ff.; *W. Griesing,* Die Krise des Mathematikunterrichts. In: Hamburger Lehrerzeitung, H. 16/1971, S. 569 ff.; *G. Röpke — G.* und *S. Graumann,* Das verordnete neue Denken. In: Hamburger Lehrerzeitung, H. 2/1972, S. 68 f.

3 Vgl. „Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen". Beschluß der KMK vom 3. 10. 1968, Seite 2: „Der moderne mathematische Unterricht wird in neue Betrachtungs- und Denkformen sowie deren Schreib- und Sprechweisen — möglichst auch an traditionellen Stoffgebieten — einführen. An dem zu lehrenden Stoff muß stärker als bisher die Fähigkeit entwickelt werden, mathematisch zu denken und mathematische Wege selbständig zu beschreiten."

4 Vgl. „Empfehlungen und Richtlinien" der KMK a. a. O. Seite 4: Themenkreis 1 und 2.

5 Vgl. hierzu: *Neunzig-Sorger,* Wir lernen Mathematik, Freiburg 1968; *Arendt-Usbeck,* Mathematik im 1. Schuljahr, Hamburg 1969; *Winter-Ziegler,* Neue Mathematik, Hannover 1970; *W. Sprockhoff,* Welt der Mathematik, Hannover 1970; *H. Bauersfeld,* „alef", Wege zur Mathematik, Hannover 1970; CVK-Arbeitsblätter für neue Mathematik, Berlin 1971; *W. Breidenbach,* Die Welt der Zahl neu, Hannover 1971; *Oehl-Palzkill,* Die Welt der Zahl neu, Hannover 1971; *Niehaus-Viet,* Menge, Zahl, Figuren, Bochum 1971; *Kuntze,* Aufbau der Mathematik, München 1971; *Bigalke-Laux,* Einführung in die Mathematik, Frankfurt 1971; *Resag-Bärmann,* Westermann Mathematik in der Grundschule 1 (Zauberfibel), Braunschweig 1971.

6 Vgl. *K. Odenbach* in „Irrwege moderner Rechendidaktik" von *H. Karaschewski,* a. a. O., Vorwort S. VI und *W. Griesing,* Die Krise des Mathematikunterrichts, a. a. O., S. 571.

7 Entwicklungspsychologische Untersuchungen über die Prozesse, die sich bei der Bildung der Begriffe des Mengenkalküls vollziehen, stehen noch aus.

8 Vgl. etwa *W. R. Fuchs,* Eltern entdecken die Neue Mathematik, München 1970 und *W. R. Fuchs,* Eltern entdecken die Neue Logik, München 1971.

jahres eingehen, erforderlich. Wir wollen sie deshalb kurz skizzieren.

1. *Die mathematische Disziplin Mengenlehre*
In ihr geht es um die Definition der Kardinalzahlen beliebiger Mengen (wobei vornehmlich Kardinalzahlen unendlicher Mengen von Interesse sind), deren Addition, Multiplikation und Potenz sowie deren Anordnung. Außerdem werden geordnete Mengen und Ordnungszahlen sowie einige Grundlagenprobleme untersucht[9].

2. *Der Mengenformalismus oder der Mengenkalkül*
Hier liegt eine mathematische Sprech- beziehungsweise Schreibweise vor, die heutzutage in vielen (jedoch keineswegs in allen) mathematischen Disziplinen verwendet wird[10]. Die Entwicklung und die universelle Verwendung dieses Kalküls wurde vornehmlich von einer französischen Mathematikergruppe, bekannt unter dem Pseudonym *Bourbaki* vorangetrieben. Im Wesentlichen wird hier mit den Termini „Menge", „Element", „Teilmenge", „Durchschnitt", „Vereinigung" und „Restmenge" gearbeitet. Dieser Formalismus steht meistens in keinem direkten inhaltlichen Zusammenhang zu den Strukturen der modernen Mathematik, sondern ist vornehmlich ein Mittel zur verständlicheren und übergreifenderen Darstellung[11].

3. *Die Mengenalgebra*
Sie ist die Strukturlehre der Operationen „Durchschnitt", „Vereinigung", „Restmenge", „Teilmenge" im Verband einer Mengenmenge. Die wichtigsten Gesetze sind die Kommutativ- und Assoziativgesetze für die Operationen „Durchschnitt" und „Vereinigung" sowie die Distributiv-, Idempotenz- und Absorptionsgesetze[12].

4. *Die Logik*
In der mathematischen Logik geht es zunächst um eine Präzisierung und Formalisierung gewisser Teile der Sprache und der mathematischen Schlußweisen. Zu den Anfangsgründen der mathematischen Logik gehören die Begriffe „Aussage" und „Aussageform", die Verknüpfungspartikel (Junktoren) „und", „oder", „wenn ... dann" sowie das „nicht". Die Struktur dieses Aussagenkalküls ist isomorph zu der des Mengenkalküls[13].

5. *Die Relationen*
Unter einer Relation verstehen wir eine Zuordnung zwischen den Elementen von zwei oder mehr Mengen (etwa A, B, ...). Einen Sonderfall stellt die „Relation in einer Menge" dar, bei der die in Beziehung stehenden Mengen identisch sind (A = B = ...). Die Relationsvorschrift wird häufig durch ein Pfeildiagramm oder einen Graphen veranschaulicht. Besondere Bedeutung haben Relationen mit zusätzlichen Eigenschaften, wie etwa Äquivalenzrelationen, Ordnungsrelationen, Abbildungen[14].

6. *Die Topologie*
Sie beinhaltet die Lehre von den Strukturen, die bei gewissen Transformationen (topologischen Abbildungen) unverändert bleiben. Zur Veranschaulichung von topologischen Abbildungen werden häufig Dehnungen oder Verzerrungen eines Gummibandes oder Gummituches herangezogen. Topologische Begriffe sind zum Beispiel „Umgebung", „geschlossene Linie", „Knoten", „Loch", „Inneres", „Zusammenhang". Berühmte topologische Probleme sind das Königsberger Brückenproblem und das Vierfarbenproblem[15].

Die genannten mathematischen Gebiete werden natürlich keineswegs im Unterricht des ersten Schuljahres im oben dargestellten Umfang behandelt, sie treten manchmal sogar nur ganz geringfügig in Erscheinung. Nichtsdestoweniger ist der sachliche Hintergrund von außerordentlich großer Bedeutung. Darum wollen wir im Folgenden ansprechen, inwieweit diese mathematischen Disziplinen als Unterrichtsgegenstand des Mathematik- beziehungsweise Rechenunterrichts des ersten Schuljahres auftreten.

1. Die Kardinalzahllehre bildet eine wesentliche Grundlage der ganzheitlichen[16] und auch der neueren Mathematikkurse[17] des ersten Schuljahres, da die natürlichen Zahlen hier wie dort als Kardinalzahlen endlicher Mengen gebildet werden. Die Addition und Subtraktion der natürlichen Zahlen werden in den ganzheitlichen und den neueren Kursen über die Vereinigung disjunkter Mengen beziehungsweise über die Restmengenbildung eingeführt[18]. Die Multiplikation wird ebenfalls in beiden Kursarten über die Vereinigung gleichmächtiger Mengen erarbeitet[19]. Die Diskussion der Ordinalzahlen tritt in den neueren Kursen in den Hintergrund.

2. Die Arbeit mit den Begriffsinhalten des Mengenkalküls und deren Verbalisierung ist ein Charakte-

9 Vgl. auch *E. Kampke*, Mengenlehre. Berlin 1962.

10 Vgl. *H. Lenné*, Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Stuttgart 1969, S. 79/80.

11 Vgl. auch *H. Lenné* a. a. O., Seite 77 und Seite 80, sowie *E. Schuberth*, Die Modernisierung des Mathematischen Unterrichts. Stuttgart 1971, S. 33–38.

12 Vgl. auch *H. Lindner*, Mengenalgebra. Stuttgart 1967.

13 Vgl. *G. Harbeck*, Einführung in die formale Logik. Braunschweig 1963.

14 Vgl. *L. Görke*, Mengen, Relationen, Funktionen. Berlin 1967.

15 Vgl. auch *B. Arnold*, Elementare Topologie. Göttingen 1964.

16 Vgl. etwa *J. Wittmann*, Ganzheitliches Rechnen, Dortmund 1959; *J. Wittmann*, Theorie und Praxis eines ganzheitlichen Unterrichts, Dortmund 1967, S. 77 ff.; *Resag-Bärmann-Möbius-Reinlein*, Die Zauberfibel, Braunschweig 1964; *W. Oehl*, Die Welt der Zahl, Operativ-ganzheitliche Ausgabe, Hannover o. J.; *H. Karaschewski* / *H. Odenbach*, Neues Rechnen, Stuttgart 1966.

17 Siehe Anm. 5.

18 Zu beachten ist hierbei, daß in den ganzheitlichen Kursen die Bezeichnungen „Vereinigung", „Durchschnitt" „Restmenge" nicht verwendet werden.

19 Einige neuere Kurse behandeln die Multiplikation erst im 2. Schuljahr. Neben der Einführung der Multiplikation über die Vereinigung gleichmächtiger Mengen steht heute die Behandlung der Multiplikation über das Kreuzprodukt zur Diskussion.

ristikum der neueren Kurse, die nach den Richtlinien der KMK vom 3. 10. 1968 konzipiert sind. Die Begriffe des Mengenformalismus werden in mehreren neueren Kursen bei der Erarbeitung der natürlichen Zahlen und deren Operationen verwendet. Die einzelnen Begriffe des Mengenformalismus werden zum Teil als geschlossene Unterrichtseinheit[20], zum Teil auf mehrere Unterrichtseinheiten verteilt[21] vor der Behandlung der entsprechenden Sachverhalte der Kardinalzahllehre erlernt. Die Grundlage dafür bilden einzelne ausgewählte Mengen aus der kindlichen Vorstellungswelt[22], an denen die Begriffe demonstriert werden können, oder strukturiertes Material.

3. Die Mengenalgebra spielt im Mathematikunterricht des ersten Schuljahres eine untergeordnete Rolle. Die Gesetze der Kommutativität von Durchschnitt und Vereinigung kommen manchmal zum Tragen[23], weiterführende Gesetzmäßigkeiten bilden jedoch erst ab dem vierten Schuljahr wieder Bestandteile des Unterrichts[24].

4. Die mathematische Logik als Unterrichtsgegenstand ist neben dem Mengenformalismus ein weiteres Merkmal der neueren Kurse[25]. Im Zusammenhang mit der oben erwähnten Erarbeitung der Begriffe „Durchschnitt" und „Vereinigung" werden die logischen Begriffe „und" sowie „oder" behandelt. Dabei ist das Vorhandensein einer festen Grundmenge mit leicht unterscheidbaren Elementen Voraussetzung[26]. Weitere Begriffe der Logik treten im allgemeinen in den neueren Kursen nicht auf[27].

5. In der Grundschule werden meist nur Relationen in einer Menge behandelt. In der Kardinalzahllehre hat die Gleichmächtigkeitsrelation eine zentrale Stellung. Diese Relation in einer Mengenmenge wird dabei auf Bijektionen (paarweisen Zuordnungen) zwischen den einzelnen Mengen zurückgeführt. Diese Gleichmächtigkeitsrelation sowie die Größer- und Kleinerrelation in der Menge der natürlichen Zahlen spielen sowohl im ganzheitlichen Rechenunterricht als auch in neueren Kursen eine wichtige Rolle. Darüber hinaus werden in mehreren neueren Kursen[28] auch andere Relationen, wie etwa „. . . hat mehr Elemente als . . .", „. . . ist Teilmenge von . . ." oder „. . . hat die gleiche Farbe wie . . .", „. . . hat mehr Ecken als . . .", im Zusammenhang mit Pfeildiagrammen behandelt.

6. Topologische Begriffe wie „geschlossene Linie", „Inneres", „Äußeres" und „Rand" treten in letzter Zeit als Unterrichtsgegenstand in einigen Schulbüchern für das erste Schuljahr auf[29]. Ein sachlicher Zusammenhang zu den anderen angeführten Gebieten besteht nur insofern, als das Umgehen mit Venndiagrammen die Vorstellung vom Inneren und Äußeren eines Gebietes voraussetzt. Andeutungsweise findet sich eine propädeutische Arbeit in dieser Hinsicht bereits bei *J. Wittmann*[30].

Außerdem muß noch erwähnt werden, daß *H. Bauersfeld* auch propädeutische Übungen zur Flächenlehre und zu den ebenen Abbildungen durchführt[31].

Nach unseren obigen Ausführungen ist die Erarbeitung der natürlichen Zahlen und deren Operationen nach wie vor Gegenstand des Mathematik- beziehungsweise Rechenunterrichts des ersten Schuljahres. Während jedoch dieses Gebiet früher fast ausschließlich[32] die Lernziele des Rechenunterrichts des ersten Schuljahres bestimmte, treten heutzutage noch andere Stoffgebiete hinzu, auf die wir oben schon eingegangen sind. Wir wollen im Folgenden aber nur den Mengenkalkül diskutieren, da dessen Hinzunahme unserer Ansicht nach am gravierendsten zur Formalisierung des Mathematik- beziehungsweise Rechenunterrichts des ersten Schuljahres beiträgt.

Die Einführung des Mengenkalküls erfolgt aus der Absicht heraus, den Mathematikunterricht des ersten Schuljahres von vorneherein in einen umfassenden mathematischen Zusammenhang zu stellen[33] und

20 Vgl. zum Beispiel *Neunzig-Sorger*, a. a. O., S. 2 bis 43.

21 Vgl. zum Beispiel *Arendt-Usbeck*, a. a. O. Thema „Vereinigung und Addition", S. 54 bis 59.

22 Vgl. zum Beispiel Darstellung des Durchschnitts in *Neunzig-Sorger*, a. a. O., S. 26 an Schreibzeugmengen und Mützenmengen.

23 Diese Gesetzmäßigkeiten werden zwar benutzt, stellen aber keinen Unterrichtsgegenstand dar.

24 Vgl. *Sprockhoff*, Welt der Mathematik. Hannover 1970. S. 43/44.

25 Die logischen Blöcke wurden von Z. P. *Dienes* speziell für die Behandlung der Logik in der Grundschule entwickelt. Ähnliches strukturiertes Material wird in fast allen neueren Kursen verwendet.

26 Meistens besteht diese Grundmenge in den Kursen aus einer Plättchenmenge des strukturierten Materials. Bei *Arendt-Usbeck* stellt die Fibelfamilie die Grundmenge dar. Jedem Familienmitglied ist dabei ein bestimmtes Plättchen zugeordnet.

27 Lediglich *Dienes* nennt ein Spiel zur Übung der „Wenn . . . dann"-Beziehung. Hinweise auf die Notwendigkeit solcher Übungen finden sich auch schon bei *J. Wittmann*, Ganzheitliches Rechnen, a. a. O., S. 122.

28 Vgl. etwa *H. Bauersfeld*, a. a. O., S. 031 ff.; *Winter-Ziegler*, a. a. O., S. 16 ff.; CVK-Arbeitsblätter, a. a. O., S. 1. 1. ff.; W.

29 Vgl. etwa *H. Bauersfeld*, a. a. O., S. 021 ff.; *Winter-Ziegler*, a. a. O., S. 16 ff; CVK-Arbeitsblätter, a. a. O., S. 1. 1. ff.; W. *Sprockhoff*, a. a. O., S. 50 ff.

30 *J. Wittmann*, Ganzheitliches Rechnen, a. a. O., S. 73, 82.

31 *H. Bauersfeld*, a. a. O., S. 1 ff.

32 Nicht berücksichtigt ist bei unseren Überlegungen der Sachrechenunterricht.

33 Vgl. hierzu „Empfehlungen und Richtlinien" der KMK, a. a. O., Seite 2: „Die Modernisierung des Mathematikunterrichts verlangt eine Zusammenschau der verschiedenen Teilgebiete unter übergreifenden Gesichtspunkten, . . ." und Seite 4: „Der 1. Themenkreis (Anm. der Verf. „Mengen und ihre Verknüpfungen") ist insoweit allen anderen übergeordnet, als er die gemeinsamen Grundlagen zum Inhalt hat." Auf die Empfehlungen und Richtlinien beziehen sich die Autoren der neueren Kurse fast ausnahmslos.

den Erstrechenunterricht vom Zahlenrechnen weg zum Umgehen mit spezifisch mathematischen Inhalten zu bringen. Insbesondere sollen die natürlichen Zahlen und deren Operationen mathematisch einsichtiger gemacht werden. Das bedeutet aber, daß der Mengenkalkül zu Beginn der Arbeit an den natürlichen Zahlen und deren Operationen bekannt sein muß, was wiederum zur Folge hat, daß im Vorwege die Begriffe des Mengenkalküls erworben werden müssen. Die Begriffe des Mengenkalküls sind in der Mathematik jedoch kein Gegenstand an sich[34], sondern Mittel für eine bessere, klarere Darstellung von mathematischen Gegenständen.

Der Mengenkalkül ist deshalb immer nur im Zusammenhang mit einer mathematischen Sache von Interesse und auch nur so einsichtig zu machen!
Für die von uns diskutierte Einführung des Mengenkalküls zu Beginn des ersten Schuljahres ergibt sich nun die Frage nach dem mathematischen Gegenstand, an dem die Begriffe des Mengenkalküls verdeutlicht werden können.
Die mathematische Mengenlehre, das heißt die Arbeit mit den Kardinal- und Ordinalzahlen sowie deren Operationen und deren Anordnung kann, wie wir schon sagten, zur Einführung des Mengenkalküls nicht verwendet werden, da ja gerade umgekehrt der Mengenkalkül auf die Kardinalzahllehre angewendet werden soll. Dasselbe gilt für die Mengenalgebra, da in ihr die Begriffe des Mengenkalküls die Voraussetzung bilden. Ebenso kann die mathematische Logik nicht als Grundlage für die Einführung des Mengenkalküls dienen, da deren Begriffsinhalte zu dem fraglichen Zeitpunkt nicht als vorhanden vorausgesetzt werden können. Zudem stellt die Aussagenlogik eine zum Mengenkalkül isomorphe Struktur dar und kann demnach ebenso wie dieser erst im Zusammenhang mit sachlichen Strukturen erfaßt werden. Die Gebiete der Relationen und der Topologie, wie sie im ersten Schuljahr auftreten, haben keinen direkten Bezug zum Mengenformalismus und können deshalb auch nicht für dessen Einführung verwendet werden. Wir stellen also fest:
Zum Zeitpunkt der Einführung des Mengenkalküls im ersten Schuljahr stehen keine mathematischen Sachverhalte zur Verfügung.
Deshalb werden in neueren Mathematikkursen des ersten Schuljahrs die Begriffe des Mengenkalküls an künstlich geschaffenen Sachverhalten[35] erläutert, die der kindlichen Welt entnommen sind und somit den Anschein eines kindgemäßen Vorgehens erwecken.

Da aber die Begriffe des Mengenkalküls hier nicht in einem sinnvollen Zusammenhang zu einer mathematischen Struktur gebracht werden, wird deren Sinn und Zweckmäßigkeit nicht deutlich. Ihre Definitionen sind an dieser Stelle willkürlich. Sie müssen rein formal erfaßt und eingeübt werden[36]. Ein Formalismus neuerer Prägung im Mathematik- bzw. Rechenunterricht des ersten Schuljahrs ergibt sich also zwangsläufig aus den Tatsachen, daß einerseits der Mengenkalkül eine mathematische Sprech- bzw. Schreibweise ist, die nur im Zusammenhang mit echten mathematischen Inhalten sinnvoll wird, und andererseits zum Zeitpunkt der Einführung des Mengenkalküls im ersten Schuljahr keine derartigen Inhalte als Grundlage dienen können[37].

*

Aus den oben genannten Gründen ergeben sich nun unserer Ansicht nach Zweifel daran, ob eine Einführung des Mengenkalküls zu dem in den zukünftigen Richtlinien der Landesschulverwaltungen vorgeschriebenen Zeitpunkt vertretbar ist.

34 Eine Ausnahme bildet die Mengenalgebra.

35 Siehe Anm. 22.

36 Vgl. beispielsweise die Einübung des Begriffs der Teilmenge bei *W. Breidenbach*, a. a. O., S. 14 bis 17.

37 Diese Tatsache steht in krassem Widerspruch zu den in den „Empfehlungen und Richtlinien" der KMK erhobenen Forderungen Seite 3: „Es muß unter allen Umständen vermieden werden, allzufrüh in einen mathematischen Formalismus zu verfallen, vielmehr sind tragende Grundbegriffe und die damit verbundenen Schreib- und Denkweisen anschaulich an den Inhalten zu entwickeln." Hier wird die Widersprüchlichkeit, die unserer Ansicht nach den Empfehlungen und Richtlinien der KMK innewohnt, deutlich.