Inzidenzstrukturen mit Projektivitätsbereich

Helmut Karzel zum 50. Geburtstag gewidmet
von GÜNTER GRAUMANN in Bielefeld

Der Begriff der ebenen absoluten Geometrie hat in diesem Jahrhundert mehrere Verallgemeinerungen erfahren. Wir denken hier etwa an H. Hjelmslev [8], F. Schur [27], E. Podehl/K. Reidemeister [23], G. Thomsen [29], A. Schmidt [24], F. Bachmann [1] [2], E. Sperner [28], H. Karzel [9] [10], R. Lingenberg [22] und H. Karzel [17]. Für den Beweis des Satzes von Desargues in allen Spiegelungsgeometrien führte H. Karzel [13] [14] den Begriff des Gruppenraumes oder kinematischen Raumes ein. Jeder Spiegelungsgruppe ist dadurch auch eine dreidimensionale Geometrie zugeordnet. Das Verfahren geht auf Ideen von W. Blaschke [3] und J. Grünwald [7], bei denen die Drehungen und Verschiebungen der klassischen euklidischen Ebene als Punkte des dreidimensionalen projektiven Raumes[1] aufgefaßt werden, zurück. Über den Gedanken einer rein geometrischen Kennzeichnung aller Gruppen kam ich [6] zu der Begriffsbildung der Inzidenzstruktur mit Eigentlichkeitsbereich. H. Karzel verwendet diesen Begriff in [17] mit einer etwas geänderten Definitionsweise, die eine leichte Verschärfung darstellt[2]. Da diese Definition auch noch alle verallgemeinerten Gruppenräume[3] erfaßt, wollen wir sie hier zur Grundlage nehmen. Die Ersetzung des Wortes "Eigentlichkeitsbereich" durch "Projektivitätsbereich" scheint dabei im Sinne anderer Veröffentlichungen, die den Begriff der "projektiven Geraden" verwenden, angemessen.

Wir werden uns im folgenden zunächst mit den Inzidenzstrukturen mit Projektivitätsbereich allgemein befassen (§ 1). Das Problem der Einbettung in einen projektiven Raum, das unter gewissen zusätzlichen Bedingungen von mir [6] gelöst werden konnte, wird dann kurz beschrieben (§ 2). Um einen weiteren Einblick in die Struktur zu gewinnen, werden wir danach die Automorphismen einer Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich untersuchen (§ 3). Abschließend werden wir uns mit einer Reihe von Modellen beschäftigen (§ 4).

1) Dabei werden alle Punkte bis auf die Punkte einer Geraden erfaßt. Eine solche Geometrie ist nach H. Karzel [16] ein sogenannter geschlitzter Raum.

2) Der Begriff der Ebene wird dort anders definiert (vgl. Anmerkung 5). Dadurch ist das Axiom (IP 3) schärfer als das Axiom (I 3) aus [6].

3) Vgl. [17].

§ 1 Grundlegende Definitionen und Sätze

Wir gehen von einem Inzidenzraum $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$ aus; d.h. es seien eine Menge $\mathfrak{P}$ und eine Menge $\mathfrak{G}$, die Teilmenge der Potenzmenge von $\mathfrak{P}$ ist, gegeben und die folgende Axiome erfüllt:

(I 1) Zu $a, b, \in \mathfrak{P}$ mit $a \neq b$ gibt es genau ein $G \in \mathfrak{G}$ mit $a, b \in G$.

(I 2) Jedes $G \in \mathfrak{G}$ enthält mindestens zwei verschiedene Elemente.

Die Elemente von $\mathfrak{P}$ werden Punkte und die Mengen $G \in \mathfrak{G}$ werden Geraden genannt. Die Begriffe "Verbindungsgerade", "inzident", "kollinear", "Teilmenge", "Hülle" seien ebenfalls wie üblich festgelegt[4]. Weiterhin verstehen wir unter einer "Ebene" die Hüllen von drei nicht-kollinearen Punkten[5]. Schließlich sei noch der folgende Begriff entsprechend [17] eingeführt.

Definition 1: Eine Gerade $G \in \mathfrak{G}$ heißt eigentliche Gerade oder projektive Gerade, wenn erstens für jede Gerade $H \in \mathfrak{G}$, die mit G in einer Ebene liegt, $G \cap H \neq \emptyset$ gilt und zweitens G mindestens drei verschiedene Punkte enthält.

Wir wollen nun die für diese Arbeit grundlegende Struktur definieren.

Ein Tripel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ heißt Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(IP 1) Die Struktur $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$ ist ein Inzidenzraum.

(IP 2) $\mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_p$ enthält mindestens zwei verschiedene Geraden

(IP 3) Jede Gerade von $\mathfrak{G}_p$ ist eine projektive Gerade.

(IP 4) Zu jedem Punkt x und jeder Ebene $\mathcal{E}$ mit $x \in \mathcal{E}$ gibt es entwede k e i n e oder mindestens d r e i Geraden von $\mathfrak{G}_p$, die gleichzeitig x enthalten und in $\mathcal{E}$ liegen.

---

4) Vgl. etwa [20] oder auch [17].

5) Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß in [6] die Hülle von dre nicht-kollinearen Punkten als "Quasiebene" bezeichnet wird, während eine Ebene dort schon immer eine eigentliche Gerade enthält. Die hie verwendete Bezeichnungsweise ist jedoch in der Zwischenzeit üblich geworden.

Diese Definition ist - wie sofort erkennbar - mit derjenigen von H. Karzel in [17] gleichwertig, wenn dort die Geometrie nicht nur aus einer Geraden besteht. Die in (IP 2) geforderte Existenz von mindestens zwei Geraden aus $\mathfrak{G}_p$ läßt sich dabei leicht nachweisen.

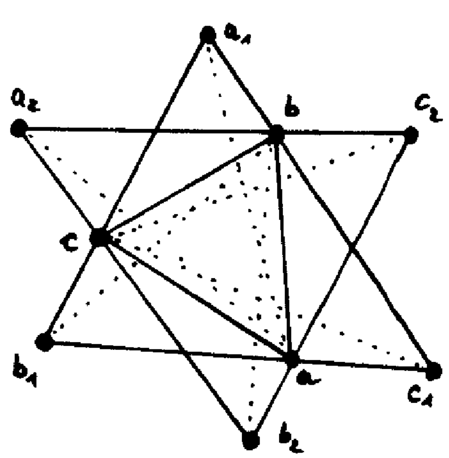
Vergleichen wir nun diese Definition mit den Axiomen meiner Dissertation [6], so läßt sich die Gültigkeit der dortigen Axiome leicht erkennen. (I 1) und (I 2) von [6] stimmen mit (IP 1) und (IP 2) bis auf die Formulierungen direkt überein, und ebenso ist (I 4) von [6] mit (IP 4) identisch. Das Axiom (I 3) von [6] dagegen stellt eine Verallgemeinerung von (IP 3) dar. Nach (IP 3) und Definition 1 hat jede Gerade von $\mathfrak{G}_p$ mit jeder Geraden H , die mit ihr in einer Ebene liegt, einen Punkt gemeinsam. Nach (I 3) von [6] ist für jede Gerade von $\mathfrak{G}_p$ dagegen nur mit jeder Geraden H , die mit ihr in einer eigentlichen Ebene[6] liegt, ein gemeinsamer Punkt gefordert. Es ist dabei allerdings bisher noch nicht geklärt, ob diese Verallgemeinerung wirklich eine echte Verallgemeinerung ist. Der wesentliche Punkt dabei ist die Frage, ob eine Ebene eine eigentliche Ebene[6] echt enthalten kann.

In diesem Zusammenhang sei auch erwähnt, daß die Frage, ob eine Ebene eine andere Ebene echt enthalten kann, auch unter den hier festgelegten Bedingungen noch nicht geklärt ist. Ein negativer Beweis ist dabei schwerlich zu führen, da für Ebenen ohne projektive Geraden - und solche können in einer Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich offenbar existieren - im wesentlichen nur die Axiome (I 1), (I 2) eines Inzidenzraumes angewendet werden können. Für einen allgemeinen Inzidenzraum sind jedoch Beispiele mit Ebenen, die echte Teilebenen enthalten, bekannt[7].

---

6) Vgl. weiter unten sowie Fußnote 5.

7) Vgl. etwa [16] S. 74. Genannt sei außerdem das folgende Beispiel eines nicht-ebenen Inzidenzraumes, bei dem zwei verschiedene Ebenen - $\{a_1,b_1,c_1\}$ und $\{a_2,b_2,c_2\}$ - als Durchschnitt wieder eine Ebene - $\{a,b,c\}$ - haben. Die Punktmenge besteht dabei aus 9 Elementen $a,b,c,a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2$. Geraden werden aus den Mengen $\{a,b_1,c_1\}$, $\{a,b_2,c_2\}$, $\{b,a_1,c_1\}$, $\{b,a_2,c_2\}$, $\{c,a_1,b_1\}$, $\{c,a_2,b_2\}$ und den noch notwendigen zweielementrigen Mengen gebildet.



Es seien nun noch eine Reihe weiterer Begriffe eingeführt.

Definition 2: a) Eine Ebene von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ heißt *eigentliche Ebene*, wenn sie mindestens eine projektive Gerade von $\mathfrak{G}_p$ enthält.

b) Eine Ebene von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ heißt *projektive Ebene*, wenn jede Gerade der Ebene eine projektive Gerade ist .

c) Ein Punkt von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ heißt *eigentlicher Punkt*, wenn er mindestens einer projektiven Geraden von $\mathfrak{G}_p$ angehört. Die Menge aller eigentlichen Punkte wird mit $\mathfrak{P}_e$ bezeichnet.

d) Ein Punkt von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ heißt *projektiver Punkt*, wenn jede Gerade, die ihn enthält, eine projektive Gerade ist [8].

Es sei erwähnt, daß in [6] eine eigentliche Ebene als Hülle einer eigentlichen Geraden und eines außerhalb liegenden Punktes definiert wird. Diese Festlegung ist aber gleichwertig mit Definition 2 a), denn in [16] konnte - in Übertragung des Beweises von Satz 1.2 von [6] - nachgewiesen werden, daß eine Ebene, die eine projektive Gerade enthält, von je drei Punkten erzeugt werden kann.

Definition 3: a) Eine Abbildung φ von $\mathfrak{G}$ auf sich heißt *G-Kollineation*, wenn sie erstens bijektiv ist und zweitens gilt:

(K) Ist $p \in \mathfrak{P}$ und $\varphi(\hat{p}) \cap \mathfrak{G}_p \neq \emptyset$, so gibt es ein $q \in \mathfrak{P}$ mit $\varphi(\hat{p}) = \hat{q}$ [9].

b) Eine Abbildung φ von $\mathfrak{G}$ auf sich heißt *schwache G-Kollineation*, wenn sie erstens bijektiv ist und zweitens gilt:

(Ks) Ist $p \in \mathfrak{P}_e$ und $\varphi(\hat{p}) \cap \mathfrak{G}_p \neq \emptyset$, so gibt es ein $q \in \mathfrak{P}_e$ mit $\varphi(\hat{p}) = \hat{q}$.

---

8) Eine projektive Ebene erfüllt als Teilstruktur die Axiome der projektiven Geometrie. - Existiert mindestens ein projektiver Punkt p , so sind alle Ebenen durch p projektiv und die Inzidenzgeometrie stellt daher insgesamt eine projektive Geometrie dar.

9) Mit $\hat{p}$ wird das Geradenbüschel $\{X \in \mathfrak{G} / p \in X\}$ bezeichnet. $\varphi(\hat{p})$ ist dann die Menge aller Bildgeraden des Bündels $\hat{p}$.
Es sei erwähnt, daß bei einer G-Kollineation offensichtlich der Punkt q stets eigentlich ist.

c) Es seien $z \in \mathbb{P}_e$ und $F \in \mathfrak{G}_e$ vorgegeben. Eine Abbildung φ von $\mathfrak{G}$ auf sich heißt dann (z,F)-Kollineation bzw. schwache (z,F)-Kollineation von $(\mathbb{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_e)$, wenn sie erstens eine G-Kollineation bzw. schwache G-Kollineation ist und zweitens gilt:
(zF) $\varphi(G) = G$ für alle $G \ni z$ und $\varphi(\hat{p}) = \hat{p}$ für alle $p \in F$.

Da die hier definierte Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich insbesondere auch eine Inzidenzstruktur mit Eigentlichkeitsbereich nach [6] ist, können wir die dort bewiesenen Sätze übernehmen (wobei wir die hier eingeführte Terminologie verwenden).

Satz 1.1 In jeder eigentlichen Ebene gibt es drei projektive Geraden von $\mathfrak{G}_p$, die nicht-kopunktal sind.

Satz 1.2 Je drei nicht-kollineare Punkte einer eigentlichen Ebene erzeugen diese.

Satz 1.3 Der Durchschnitt von zwei verschiedenen eigentlichen Ebenen ist entweder leer oder ein Punkt oder eine Gerade.

Aufgrund der etwas schärferen Fassung unserer Axiome können wir die Aussage dieses Satzes noch verschärfen.

Satz 1.3* Der Durchschnitt einer eigentlichen Ebene mit einer von ihr verschiedenen beliebigen Ebene ist höchstens eine Gerade[10].

Beweis: Es seien eine eigentliche Ebene $\mathcal{E}$ und eine beliebige Ebene α mit $\alpha \neq \mathcal{E}$ gegeben.
Gibt es nun drei nicht-kollineare Punkte a,b,c in $\alpha \cap \mathcal{E}$, so folgt zunächst nach Satz 1.2 $\alpha \cap \mathcal{E} = \mathcal{E}$. Nach Definition 2 a) gibt es eine eigentliche Gerade $G \subset \mathcal{E} \subset \alpha$. Nach Definition 1 hat G mit jeder Geraden von α einen Schnittpunkt. Sei $x \in \alpha \setminus \{a\}$ und etwa $a \notin G$ und $d = \overline{ax} \cap G$ [11], dann folgt $x \in \overline{ad} \subset \mathcal{E}$. Also gilt auch $\alpha \subset \mathcal{E}$, d.h. $\alpha = \mathcal{E}$.

---

10) Für zwei beliebige Ebenen können wir gemäß unserer obigen Bemerkungen keine besondere Aussage erwarten. Es gilt lediglich der in beliebigen Inzidenzräumen gültige Satz, daß der Durchschnitt zweier Teilräume wieder ein Teilraum ist.

11) Sind a,b zwei verschiedene Punkte, so bezeichnen wir die Verbindungsgerade mit $\overline{ab}$.

Satz 1.4 Jede Gerade einer eigentlichen Ebene enthält mindestens drei verschiedene eigentliche Punkte.

Wir werden nun zwischen der ebenen und der räumlichen Struktur unterscheiden. Dabei heißt eine Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich *eben*, wenn alle Punkte einer Ebene angehören[12]. Andernfalls heißt sie *räumlich*. Nach [6] können wir die ebenen und räumlichen Inzidenzstrukturen mit Projektivitätsbereich auch noch anders charakterisieren.

Satz 1.5 Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent

(E a) Alle Punkte gehören einer eigentlichen Ebene an.

(E b) Jede projektive Gerade von $\mathfrak{G}_p$ schneidet alle anderen Geraden.

(E c) Es gibt eine Gerade, die alle anderen Geraden schneidet.

Satz 1.8 Die folgenden Aussagen sind äquivalent

(R a) Nicht alle Punkte gehören einer eigentlichen Ebene an.

(R b) Zu jeder projektiven Geraden $G \in \mathfrak{G}_p$ gibt es zwei verschiedene eigentliche Ebenen ε, δ mit $G = \varepsilon \cap \delta$.

(R c) Zu jeder projektiven Geraden $G \in \mathfrak{G}_p$ gibt es eine projektive Gerade $H \in \mathfrak{G}_p$ mit $G \cap H = \emptyset$ [13].

Wir erwähnen noch zwei Minimalaussagen über ebene Inzidenzstrukturen mit Projektivitätsbereich, deren Beweise in [6] zu finden sind.

Satz 1.6 Gehen durch jeden eigentlichen Punkt einer ebenen Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich nur drei Geraden, so ist die Geometrie isomorph zur projektiven Ebene über dem Primkörper der Charakteristik 2.

Satz 1.7 Ist eine ebene Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich nicht isomorph zur projektiven Ebene über $\mathbb{Z}_2$, so gibt es zu jedem $p \in \mathfrak{P}_e$ höchstens eine Gerade $G \in \hat{p}$, die nur drei verschiedene eigentliche Punkte enthält.

---

12) In [6] wird die Geometrie als eben bezeichnet, wenn alle Punkte einer eigentlichen Ebene angehören. Wegen (IP 2) ist die Definition mit derjenigen hier identisch. Unter den schwächeren Voraussetzungen von [6] ist allerdings noch offen, ob es möglich ist, daß alle Punkte eine Ebene, die nicht eigentlich ist, bilden können. Eine solche Geometrie ist wegen Satz 1.8 als räumlich zu bezeichnen.

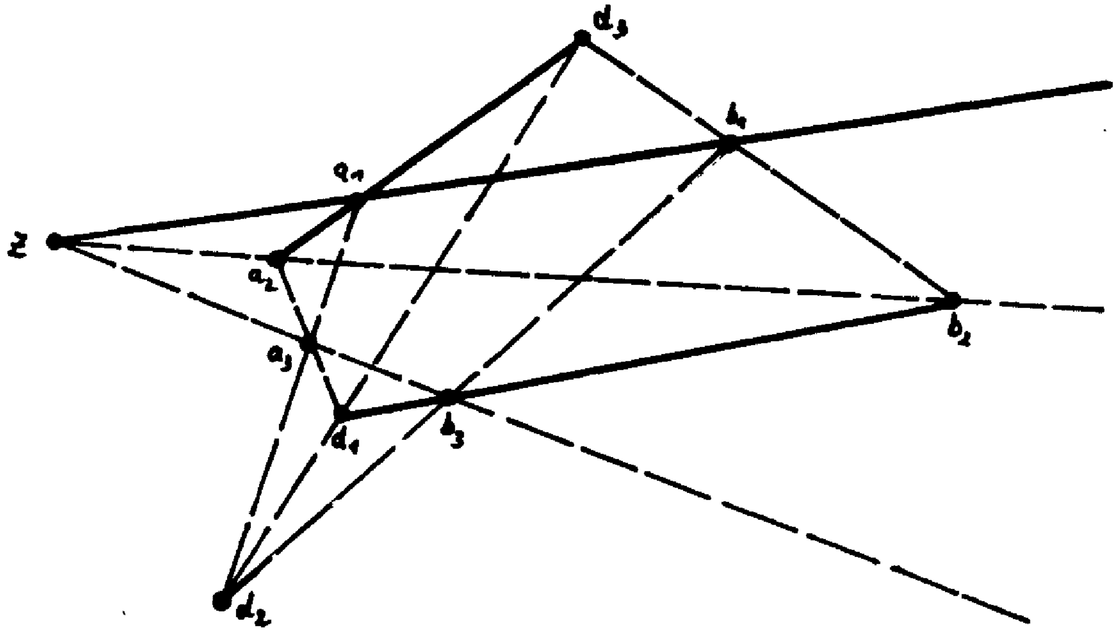
13) Wir werden zwei eigentliche Geraden G, H mit $G \cap H = \emptyset$ als windschief bezeichnen.

Wir wollen uns zum Abschluß dieses Kapitels noch mit den Problemen, die im Zusammenhang mit dem Satz von Desargues stehen, beschäftigen. In der ebenen Geometrie kann der Satz von Desargues erwartungsgemäß nicht bewiesen werden. Wir werden ihn als Axiom fordern müssen. In der räumlichen Geometrie dagegen kann der Satz bei gewissen Eigentlichkeitsvoraussetzungen bewiesen werden. Wir formulieren zunächst drei verschiedene Fassungen der Aussage von Desargues.

(D) Es sei $z\,;\, a_1, a_2, a_3;\, b_1, b_2, b_3;\, d_1, d_2, d_3$ eine geschlossene Desargueskonfiguration[14] mit

(i) $\overline{a_1b_1}, \overline{a_1a_2}, \overline{b_2b_3}$ sind projektive Geraden von $\mathfrak{g}_p$.

Dann folgt $z \in \overline{a_3b_3}$.



(Ds) Es sei $z;\, a_1, a_2, a_3;\, b_1, b_2, b_3;\, d_1, d_2, d_3$ eine geschlossene Desargueskonfiguration mit

(i) $\overline{a_1b_1}\,,\ \overline{a_1a_2}\,,\ \overline{b_2b_3}$ sind projektive Geraden von $\mathfrak{g}_p$.

(ii) a_3, d_2 sind eigentliche Punkte .

Dann folgt $z \in \overline{a_3b_3}$.

---

14) Nach [6] ist damit $z = \overline{a_1b_1} \cap \overline{a_2b_2}$, $d_i = \overline{a_ja_k} \cap \overline{b_jb_k}$ für $i \neq j \neq k \neq i$, $d_1 \in \overline{d_2d_3}$ und $z \neq a_i \neq b_i \neq z$, $a_1 \notin \overline{a_2a_3}$, $b_1 \notin \overline{b_2b_3}$ gemeint.

(Dsr) Es sei $z; a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; d_1, d_2, d_3$ eine geschlossene Desargueskonfiguration mit

(i) $\overline{a_1b_1}$, $\overline{a_1a_2}$, $\overline{b_2b_3}$ sind projektive Geraden von $\mathcal{G}_p$

(iii) Es gibt zwei verschiedene Geraden $A_3, D_2 \in \mathcal{G}_p$ mit

$$a_3 \in A_3,\ d_2 \in D_2;\ A_3, D_2 \not\subset \{a_1, a_2, a_3\} \quad \text{und} \quad A_3 \cap D_2 \neq \emptyset .$$

Dann folgt $z \in \overline{a_3b_3}$.

Die Gültigkeit von (Dsr) setzt nun offensichtlich voraus, daß die Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich räumlich ist. Außerdem gilt offensichtlich (D)$\Longrightarrow$(Ds) und im räumlichen Fall (D)$\Longrightarrow$(Ds)$\Longrightarrow$(Dsr). In [6] konnte nun gezeigt werden, daß (Dsr) in jeder räumlichen Inzidenzstruktur mit Eigentlichkeitsbereich[15] gilt, während (Ds) und (D) jeweils nur bei gewissen Zusatzaxiomen nachgewiesen werden konnten. Aufgrund der Gültigkeit von Satz 1.3*, der im räumlichen Fall mit dem in [6] formulierten Axiom (Q) gleichwertig ist, kommen wir in Inzidenzstrukturen mit Projektivitätsbereich hier zum Ergebnis:

Hauptsatz 1 In einer räumlichen Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich gilt der Satz von Desargues in der Form (D) .[16]

§ 2 Die Einbettung in einen projektiven Raum

Für die Einbettung der Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich ist die Gültigkeit des Satzes von Desargues von wesentlicher Bedeutung. Für die ebene Geometrie unterscheiden wir dabei zwei Fälle, je nachdem ob (D) oder (Ds) vorausgesetzt wird. Im räumlichen Fall ist nach Hauptsatz 1 der Satz (D) gültig. Für die Einbettung der ebenen Geometrie reichen diese Voraussetzungen aus. Im räumlichen Fall aber konnten wir die Einbettung nur unter Voraussetzung von zwei weiteren Axiomen beweisen.

15) D.h. bei Voraussetzung der Axiome (I 1), (I 2), (I 3), (I 4) aus [6].

16) Zum Beweis dieses Satzes vergleiche Hauptsatz 1 c aus [6].

2.1 Die Einbettung einer ebenen Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich in eine projektive Ebene

In [6] haben wir das Verfahren der Einbettung eines desarguesschen Ebenenkeimes von E. Ellers/E. Sperner [5] auf die ebene Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich, in der das Axiom (D) bzw. (Ds) vorausgesetzt wird, übertragen. Als Hilfsmittel werden dabei (z,F)-Kollineationen bzw. schwache (z,F)-Kollineationen verwendet.

Es wird zunächst eine Gerade $F_o \in \mathcal{G}_p$ ausgewählt und für das Folgende festgehalten. Wir bezeichnen dann die Menge aller (z,F_o)-Kollineationen bzw. aller schwachen (z,F_o)-Kollineationen, wobei z alle eigentlichen Punkte durchläuft, mit Γ_{F_o}.
Wir konstruieren nun einen neuen Inzidenzraum $\mathcal{T}$, der die projektive Hülle unserer Inzidenzstruktur darstellen wird. Als Punktmenge setzen wir $\{\varphi(\hat{p}) \,/\, \varphi \in \Gamma_{F_o}$ und $p \in \mathcal{P}$ [bzw. $p \in \mathcal{P}_e$ bei (Ds)]$\}$. Als Geraden von $\mathcal{T}$ wählen wir die Geraden von $\mathcal{G}$, wobei jedoch noch jeweils einige Elemente von der obigen Punktmenge zu einer Geraden hinzukommen können. Die Inzidenzrelation ist dann durch $\ni$ bestimmt.

Es seien im folgenden nun einige Sätze aus [6] übertragen, deren Beweise dort zu finden sind.

Satz 2.4 Eine ebene Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich, in der das Axiom (D) bzw. (Ds) gilt, ist (z,F)-transitiv bezüglich irgendeines $z \in \mathcal{P}_e$ und $F \in \mathcal{G}_e$; d.h. sind $z \in \mathcal{P}_e$ und $F \in \mathcal{G}_p$ vorgegeben, so gibt es zu jedem Paar $R, R' \in \mathcal{G}$ mit $z \notin R, R'$ und $F \neq R, R'$ und $R \cap F = R' \cap F$ eine (z,F)-Kollineation bzw. eine schwache (z,F)-Kollineation, die R auf R' abbildet.

Satz 2.5 Es sei φ eine schwache (z,F)-Kollineation mit $\varphi(G) = G$ für eine Gerade G mit $z \notin G$ und $F \neq G$. Dann ist φ die identische Abbildung.

Satz 2.6 Die Menge $\Gamma_{F,z}$ aller (z,F)-Kollineationen bzw. schwachen (z,F)-Kollineationen mit festem $z \in \mathcal{P}_e$ und $F \in \mathcal{G}_p$ bildet eine Gruppe.

<u>Satz 2.7</u> Die Menge $\Gamma_{F,B} = \bigcup_{z \in B} \Gamma_{F,z}$ mit festem $F,B \in \mathcal{G}_p$ bildet eine Gruppe.

<u>Satz 2.8</u> a) Zu zwei verschiedenen Geraden G_1, G_2 gibt es stets ein $\varphi \in \Gamma_{F_o}$ mit $\varphi(G_1)$, $\varphi(G_2) \in \mathcal{G}_p$.

b) Zu drei nicht-kopunktualen Geraden G_1, G_2, G_3 gibt es stets ein $\psi \in \Gamma_{F_o}$ mit $\psi(G_1) = G_1$, $\psi(G_2) = G_2$ und $\psi(G_3) \in \mathcal{G}_p$.

<u>Satz 2.11</u> Jede (y,F_o)-Kollineation bzw. schwache (y,F_o)-Kollineation induziert in der neuen Geometrie $\widetilde{\Pi}$ eine inzidenzerhaltende Abbildung.

<u>Satz 2.12</u> Die Geometrie $\widetilde{\Pi}$ ist eine projektive Ebene.

<u>Satz 2.13</u> In der Geometrie $\widetilde{\Pi}$ gilt der allgemeine Satz von Desargues.

Weiterhin läßt sich offensichtlich die ebene Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_p)$ in die desarguessche projektive Ebene $\widetilde{\Pi}$ vermittels der Vorschrift $p \longrightarrow \hat{p}$ und $G \longrightarrow G$ voll-einbetten bzw. einbetten[17]. Wir erhalten also insgesamt:

<u>Hauptsatz 2:</u> Eine ebene Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich, in der das Axiom (D) bzw. (Ds) gilt, ist in eine desarguessche projektive Ebene voll-einbettbar bzw. einbettbar. Dabei ist die Geradenmenge der projektiven Ebene mit $\mathcal{G}$ identisch[18].

---

17) Werden alle Punkte und Geraden in $\widetilde{\Pi}$ inzidenztreu abgebildet, so sprechen wir von der "Volleinbettbarkeit". Werden nur die eigentlichen Punkte und alle Geraden in $\widetilde{\Pi}$ inzidenztreu abgebildet, so sprechen wir von der "Einbettbarkeit".
Wird nur (Ds) vorausgesetzt, so gibt es ebene Geometrien $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_p)$, die aus einer projektiven Ebene und einzelnen weiteren Punkten des zugehörigen projektiven Raumes bestehen. Die Volleinbettbarkeit kann dann offenbar nicht bewiesen werden.

18) Wird umgekehrt vorausgesetzt, daß $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_p)$ in eine desarguessche Ebene volleinbettbar bzw. einbettbar ist, so folgt offensichtlich auch die Gültigkeit von (D) bzw. (Ds).

2.2 Die Einbettung einer räumlichen Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich in einen projektiven Raum

Wie wir schon erwähnten, benötigen wir für das bislang gefundene Verfahren der Einbettung einer räumlichen Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich zwei weitere Axiome.[19]

(II P) Zu je zwei Punkten $a, b \in \mathfrak{P}$ gibt es projektive Geraden $A, B \in \mathfrak{G}_p$ mit $a \in A$, $b \in B$ und $A \cap B = \emptyset$ [20].

(III P) Die Dualgeometrie $(\mathfrak{E}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$[21] ist auch eine Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich, d.h. sie erfüllt die Axiome (I P 1) bis (I P 4).

Wir können nun zunächst einige einfache Folgerungen aus den Axiomen ziehen. Die Beweise können in [6] nachgelesen werden.[22]

Satz 3.1 a) Zwei verschiedene, eigentliche Ebenen haben stets genau eine Gerade gemeinsam.

b) Eine eigentliche Ebene und eine projektive Gerade haben stets einen Punkt gemeinsam.

c) Jede Gerade gehört stets mindestens zwei eigentlichen Ebenen an.

d) Jede Gerade enthält stets mindestens drei eigentliche Punkte.

Satz 3.2 a) Es gibt drei projektive Geraden X, Y, Z, die einen Punkt gemeinsam haben und nicht in einer Ebene liegen, mit $\overline{X \cup Y \cup Z} = \mathfrak{P}$.

b) Für je drei projektive Geraden X, Y, Z, die einen Punkt gemeinsam haben und nicht in einer Ebene liegen, gilt $\overline{X \cup Y \cup Z} = \mathfrak{P}$.

19) In [6] wurde noch ein weiteres Axiom (II 1) gefordert. Dieses wird dort lediglich für den Nachweis von (D) in $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ benötigt. Nach Hauptsatz 1 haben wir das Axiom hier jedoch nicht nötig.

20) Als Folgerung aus diesem Axiom ergibt sich $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_e$.

21) Mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen wir die Menge der eigentlichen Ebenen von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$. In der Dualgeometrie übernehmen die eigentlichen Ebenen die Rolle der Punkte. Dabei ist $E \in G$ in der Dualgeometrie gleichwertig mit $G \subset E$ in der Geometrie $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$.

22) Wir übernehmen dabei die Satz-Numerierung aus [6].

Es wird nun ein Punkt e_o von $\mathcal{P}$ ausgewählt und zunächst festgehalten. Wir betrachten dann das Bündel aller eigentlichen Ebenen und aller Geraden, die mit e_o inzidieren. Dieses Bündel stellt in der Dualgeometrie eine ebene Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich dar. Wir können also die obigen Ergebnisse hierauf anwenden. Es sei dafür eine projektive Gerade F_o dieses Bündels festgehalten. Mit $\Gamma^{\kappa}_{F_o}$ sei die Menge der (ζ, F_o)-Kollineationen unserer ebenen Dualgeometrie bezeichnet.

Wir können nun diese ebene Dualgeometrie projektiv abschließen wie oben geschildert. Als "neue Punkte" erhalten wir Geradenmengen $\varphi(\hat{\alpha})$, wobei $\varphi \in \Gamma^{\kappa}_{F_o}$ und α eine Ebene von $\mathcal{E}$ durch e_O ist. Betrachten wir alle Punkte von $\mathcal{P}$, die mit mindestens einer Geraden einer solchen Geradenmenge $\varphi(\hat{\alpha})$ inzidieren, so erhalten wir eine Teilmenge von $\mathcal{P}$, die wir mit $\lceil\varphi\alpha\rceil$ bezeichnen wollen.

Wir führen nun eine entsprechende Konstruktion für jeden Punkt e von $\mathcal{P}$ durch. Die Gesamtheit aller dabei zu bildenden Mengen $\lceil\varphi\alpha\rceil$ bezeichnen wir mit $\mathcal{F}$.

Wie in [6] gezeigt werden konnte, stellen die Mengen von $\mathcal{F}$ eine Verallgemeinerung der Ebenen von $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_p)$ dar; es gelten nämlich folgende Sätze:

<u>Satz 3.4</u> Die Mengen $\lceil\varphi\alpha\rceil$ sind Teilräume von $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_p)$.

<u>Satz 3.7</u> Zu je drei nicht-kollinearen Punkten gibt es genau eine Menge $\lceil\varphi\alpha\rceil$ von $\mathcal{F}$, die die drei Punkte enthält.

<u>Satz 3.8</u> a) Der Durchschnitt von zwei verschiedenen Mengen $\lceil\varphi\alpha\rceil, \lceil\psi\beta\rceil$ von $\mathcal{F}$ ist entweder leer oder ein Punkt oder eine Gerade.

b) Wenn eine Menge $\lceil\varphi\alpha\rceil$ von $\mathcal{F}$ eine projektive Gerade enthält, so ist sie gleich einer eigentlichen Ebene von $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_p)$.

c) Der Durchschnitt einer eigentlichen Ebene mit einer von dieser verschiedenen Menge $\lceil\varphi\alpha\rceil$ von $\mathcal{F}$ ist stets eine Gerade.

d) Eine projektive Gerade hat mit jeder Menge $\lceil\varphi\alpha\rceil$ von $\mathcal{F}$ einen Punkt gemeinsam.

Auf der Grundlage dieser Ergebnisse lassen sich nun jedem Punkt p von $\mathcal{P}$ bezüglich eines geeigneten Basissystems $O, \mathcal{U}_x, \mathcal{U}_y, \mathcal{U}_z$ homogene Koordinaten über einem Körper zuordnen. Die Punkte einer Geraden genügen dabei linearen Gleichungen.[23] Als Ergebnis erhalten wir damit

<u>Hauptsatz 3</u> Eine räumliche Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich, die zusätzlich die Axiome (II P) und (III P) erfüllt, ist volleinbettbar in einen dreidimensionalen projektiven Raum.

---

23) **Das Verfahren der Zuordnung von Koordinaten sowie die Herleitung der linearen Gleichungen für kollineare Punkte ist relativ umständlich und kann deshalb hier nicht näher geschildert werden.**

§ 3 Automorphismen von Inzidenzstrukturen mit Projektivitätsbereich

Unter einem Automorphismus einer Struktur versteht man üblicherweise eine bijektive Abbildung der Grundmenge auf sich, bei der alle Struktureigenschaften erhalten bleiben. Ein Automorphismus von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ kann zunächst nur als geradentreue Abbildung definiert werden. Wir werden dann zeigen, daß die anderen Struktureigenschaften unserer Geometrie auch erhalten bleiben, unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{G}_p$ alle projektiven Geraden enthält.

Definition Eine bijektive Abbildung σ von $\mathfrak{P}$ auf sich, die als Bildmenge einer Geraden von $\mathfrak{G}$ wieder eine Gerade von $\mathfrak{G}$ liefert, heißt Automorphismus von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$.

Es ist zunächst klar, daß ein Automorphismus von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ Teilräume auf Teilräume abbildet, insbesondere werden auch Ebenen auf Ebenen abgebildet. Daß ein Automorphismus von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ nicht nur ein Automorphismus des Inzidenzraumes $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$ ist, sondern die Eigentlichkeitscharakteristika erhält, zeigt der folgende Satz.[24)]

Satz 5.1 Es sei ein Automorphismus σ von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ gegeben.

a) Der Automorphismus bildet projektive Geraden wieder auf projektive Geraden ab.

b) Besteht $\mathfrak{G}_p$ aus allen projektiven Geraden oder gilt $\sigma(\mathfrak{G}_p)=\mathfrak{G}_p$, so werden auch eigentliche Ebenen wieder auf eigentliche Ebenen und eigentliche Punkte wieder auf eigentliche Punkte abgebildet.

BEWEIS: a) Es sei σ ein Automorphismus von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ und A eine beliebige projektive Gerade. Sei weiterhin Y eine beliebige Gerade, die mit $\sigma(A)$ eine Ebene α gemeinsam hat. Es ist nun bekanntlich[25)] auch σ^{-1} ein Automorphismus von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$. Es ist deshalb $\sigma^{-1}(\alpha)$ eine Ebene, die A enthält. $\sigma^{-1}(Y)$ ist dann eine Gerade, die zur Ebene $\sigma^{-1}(\alpha)$ gehört. Nach (IP 3) haben $\sigma^{-1}(Y)$ und A einen gemeinsamen Punkt x. Dann ist aber $\sigma(x)$ ein gemeinsamer Punkt von Y und $\sigma(A)$. Also ist $\sigma(A)$ eine projektive Gerade. Die Behauptung b) ist eine triviale Folgerung aus a).

---

24) Da wir in § 2 schon die Satz-Numerierung mit 3 verwendet haben und da wir in § 4 einige Sätze aus [6] mit der Numerierung 4 übernehmen werden, verwenden wir hier die Numerierung mit 5.

25) Vgl. etwa [20] Aufgabe (1.5).

Es sei weiterhin erwähnt, daß offensichtlich ein Automorphismus σ von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ auch eine Bijektion von $\mathfrak{G}$ auf sich induziert, die jedes Büschel $\hat{p}$ wieder auf ein Büschel $\hat{q}$ (wobei $q = \sigma(p)$) abbildet. Jeder Automorphismus ist deshalb auch eine G-Kollineation. Umgekehrt sind die G-Kollineationen aber im allgemeinen keine Automorphismen, denn die (z, F)-Kollineationen wurden ja gerade benutzt um "neue" Punkte zu erhalten.

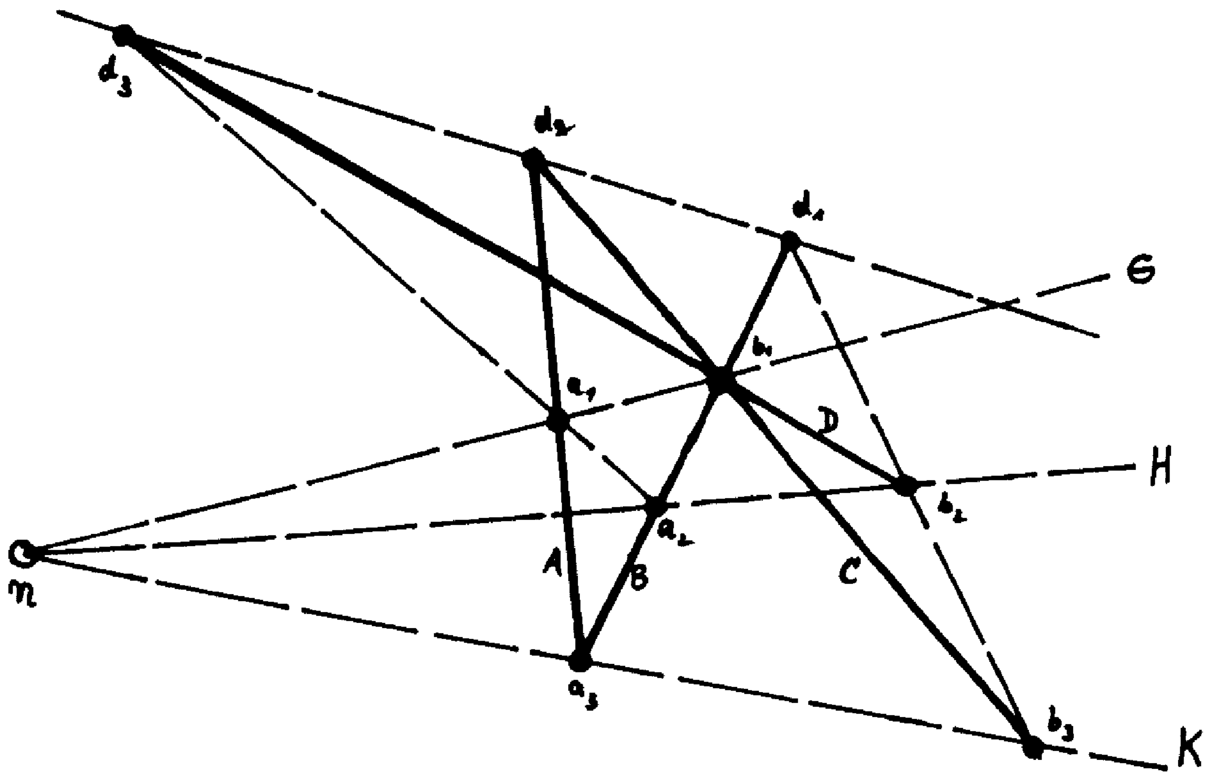
Wir setzen im Folgenden voraus, daß die Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ in eine desarguessche, projektive Geometrie $\widetilde{\Pi}$ eingebettet ist. Diese soll die kleinste projektive Geometrie sein, in die $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ einbettbar ist, d.h. $\widetilde{\Pi}$ ist der projektive Abschluß.

Es tritt nun die Frage auf, ob und wie sich die Automorphismen von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ zu Projektivitäten von $\widetilde{\Pi}$ erweitern lassen. Für den ebenen und den dreidimensionalen Fall werden wir im Folgenden diese Frage positiv beantworten. Darüberhinaus lassen sich die Beweise auch auf viele andere Fälle anwenden.

<u>Satz 5.2</u> Ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ in eine desarguessche projektive Ebene $\widetilde{\Pi}$ einbettbar, so wird durch einen Automorphismus σ von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ in $\widetilde{\Pi}$ in eindeutiger Weise eine Projektivität induziert.

BEWEIS: Nach Hauptsatz 2 besteht die Geradenmenge der projektiven Ebene $\widetilde{\Pi}$ aus den gleichen Geraden (möglicherweise mit einigen Punkten mehr) wie $\mathfrak{G}$. Da jeder Punkt von $\widetilde{\Pi}$ als Geradenbüschel definiert ist, wird durch σ schon eindeutig eine Abbildung der projektiven Ebene $\widetilde{\Pi}$ auf sich induziert. Es wird nun gezeigt, daß diese Abbildung in $\widetilde{\Pi}$ auch die Inzidenz erhält, d.h. etwa daß je drei in $\widetilde{\Pi}$ kopunktale Geraden wieder auf kopunktale Geraden abgebildet werden. Enthalten dabei die drei Geraden einen Punkt von $\mathfrak{P}$, so ist die Behauptung trivial.

Es seien also nun G, H, K drei Geraden von $\mathfrak{G}$, die einem Punkt $\eta = \varphi(\hat{p})$ von $\widetilde{\Pi}$ angehören und o.B.d.A. sei $G, H, K \notin \mathfrak{G}_p$. Wir wählen nun eine projektive Gerade $A \in \mathfrak{G}_p$ (vgl. (IP 2)) und setzen $a_1 = G \cap A$, $a_3 = K \cap A$. Es ist $A \neq G, K$ wegen $G, K \notin \mathfrak{G}_p$. Durch a_3 finden wir dann nach (IP 4) eine projektive Gerade $B \in \mathfrak{G}_p$ mit $B \neq A$ und es ist $B \neq G, H, K$ wegen $G, H, K \notin \mathfrak{G}_1$. Wir setzen $b_1 = G \cap B$, $a_2 = H \cap B$. Durch b_1 gibt es wiederum nach (IP 4) zwei projektive Geraden C, D mit $B \neq C \neq D \neq B$ und es ist $C, D \neq G, H, K$. Wir setzen $b_2 = H \cap D$, $b_3 = K \cap C$. Weiterhin existieren eindeutig die Punkte $d_1 = B \cap \overline{b_2 b_3}$, $d_2 = A \cap C$, $d_3 = D \cap \overline{a_1 a_2}$.



Da G, H, K in $\widetilde{\Pi}$ kopunktal sind und da in $\widetilde{\Pi}$ der allgemeine Satz von Desargues gilt, folgt $d_1 \in \overline{d_2 d_3} \in \mathcal{G}$. Wenden wir nun den Automorphismus σ auf die gesamte Konfiguration an, so stellen $\sigma(a_1)$, $\sigma(a_2)$, $\sigma(a_3)$, $\sigma(b_1)$, $\sigma(b_2)$, $\sigma(b_3)$, $\sigma(d_1)$, $\sigma(d_2)$, $\sigma(d_3)$ wieder eine Desarguenkonfiguration dar, denn alle Verbindungsgeraden stellten Geraden aus $\mathcal{G}$ dar. Insbesondere gilt auch $\sigma(d_1) \in \overline{\sigma(d_2)\,\sigma(d_3)}$. Nach dem allgemeinen Satz von Desargues in $\widetilde{\Pi}$ ergibt sich dann, daß $\sigma(G)$, $\sigma(H)$, $\sigma(K)$ in $\widetilde{\Pi}$ kopunktal sind.

Es ist nun noch zu zeigen, daß die von σ induzierte Abbildung in $\widetilde{\Pi}$ bijektiv ist. Ist $\varphi(\hat{p})$ ein gegebener Punkt von $\widetilde{\Pi}$, so gibt es wegen der eben bewiesenen Inzidenztreue einen Punkt $\varphi(\hat{q})$ von $\widetilde{\Pi}$ mit $\varphi(\hat{q}) \subseteq \sigma^{-1}(\varphi(\hat{p}))$. Die Abbildung ist daher surjektiv.

Nehmen wir nun an, es gäbe zwei verschiedene Punkte m_1, m_2 von $\widetilde{\Pi}$, deren Bilder ein Punkt m' ist. Wir wählen dann eine projektive Gerade A, die m_1 und m_2 nicht enthält. Sei h ein Punkt von $\widetilde{P}$, der nicht zu A und nicht zur Verbindungsgeraden von m_1, m_2 gehört. Sei weiterhin a_i $(i=1,2)$ der Schnittpunkt von A mit der Verbindungsgeraden von h und m_i. Es sind dann a_1, a_2 zwei verschiedene Punkte von $\widetilde{P}$, deren Bilder identisch sein müssen. Wir erhalten damit einen Widerspruch zur Bijektivität von σ. Also ist die von σ induzierte Abbildung in $\widetilde{\Pi}$ auch injektiv.

<u>Satz 5.3</u> Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_P)$ in einen dreidimensionalen projektiven Raum $\widetilde{P}$ einbettbar. Dann gilt:
Zu jedem Punkt n von $\widetilde{\Pi}$ gibt eine eigentliche Ebene $\mathcal{E}$ von $\mathfrak{E}$ und mindestens drei Geraden L,M,N von $\mathcal{G}$ mit $L,M,N \subset \mathcal{E}$, so daß in der Erweiterung n den Geraden und der Ebene angehört.

BEWEIS: Es sei $\mathfrak{m}$ ein Punkt von $\widetilde{\Pi}$ und o.B.d.A gehöre $\mathfrak{m}$ keiner projektiven Geraden an. Weiterhin sei $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ o.B.d.A. nicht schon in eine Ebene einbettbar. Dann gibt es zwei windschiefe projektive Geraden A,B . Diese enthalten beide nicht den Punkt $\mathfrak{m}$. Wir bilden nun in $\widetilde{\Pi}$ die durch $\mathfrak{m}$ und A bestimmte erweiterte Ebene[26]. Diese hat mit B einen Punkt p gemeinsam, der wegen $B \in \mathfrak{G}_p$ auch zu $\mathfrak{P}$ gehört. Außerdem gilt $p \notin A$ und $p \neq \mathfrak{m}$. In $\widetilde{\Pi}$ existiert dann die Verbindungsgerade von p und $\mathfrak{m}$. Da sie mit A einen Punkt gemeinsam hat, enthält sie also zwei Punkte von $\mathfrak{P}$ und gehört damit zu $\mathfrak{G}$. Außerdem gehört $\mathfrak{m}$ damit zu der Erweiterung der eigentlichen Ebene $\overline{A \cup \{p\}}$. Wir finden dann nach Satz 1.4 zwei weitere Punkte $b, c \in A$, die wir in der Erweiterung von $\overline{A \cup \{p\}}$ mit $\mathfrak{m}$ verbinden können. Da nach Satz 1.1 in $\overline{A \cup \{p\}}$ weitere projektive Geraden existieren, können wir wie oben folgern, daß die Verbindungsgeraden von $\mathfrak{m}$ mit b und c auch Geraden von $\mathfrak{G}$ sind.

<u>Satz 5.4</u> **Ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ in einen dreidimensionalen projektiven Raum $\widetilde{\Pi}$ einbettbar, so wird durch einen Automorphismus σ von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ in $\widetilde{\Pi}$ in eindeutiger Weise eine Projektivität induziert.**

BEWEIS: **Es sei $\mathfrak{m}$ ein Punkt von $\widetilde{\Pi}$, der o.B.d.A nicht schon zu $\mathfrak{P}$ gehört. Dann gibt es nach Satz 5.3 zwei verschiedene Geraden $L, M \in \mathfrak{G}$ und eine eigentliche Ebene $\mathcal{E}$ mit $L, M \subset \mathcal{E}$, so daß in der Erweiterung von $\mathcal{E}$ die Geraden L, M den Punkt $\mathfrak{m}$ enthalten. Wenden wir nun den Automorphismus σ von $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_p)$ auf diese Konfiguration an, so geht $\mathcal{E}$ in eine eigentliche Ebene $\mathcal{E}'$ über, die die Bildgeraden $\sigma(L)$, $\sigma(M)$ enthält. Der Bildpunkt von $\mathfrak{m}$ ist dann eindeutig als derjenige Punkt der erweiterten Ebene festgelegt, der in $\widetilde{\Pi}$ der Schnittpunkt von $\sigma(L)$ und $\sigma(M)$ ist.**

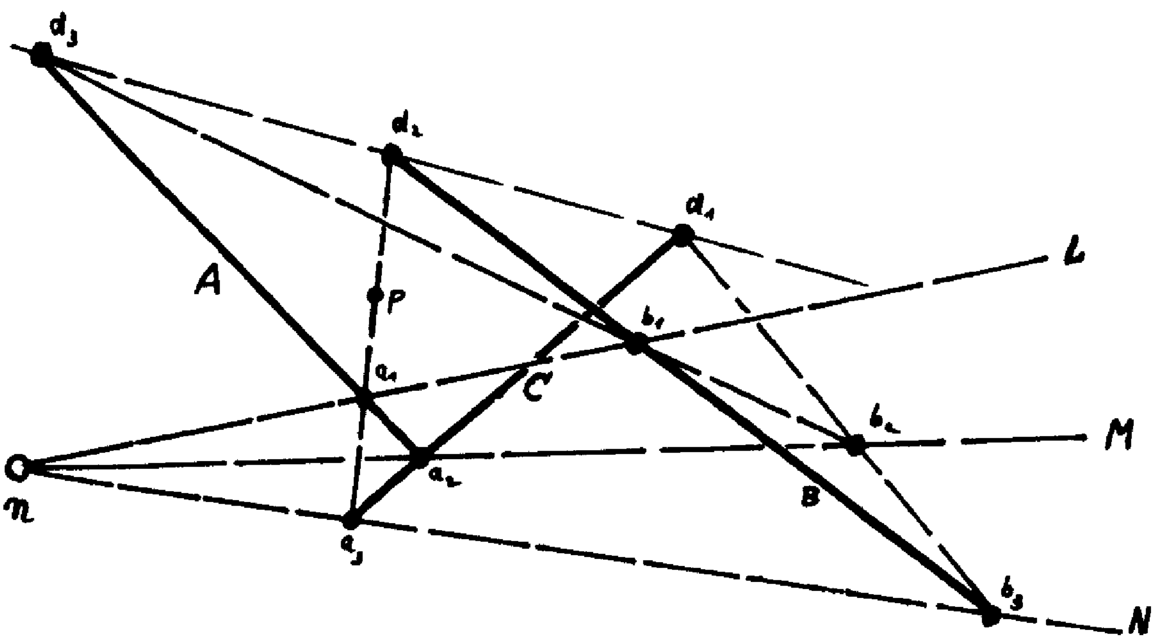
Es ist zunächst zu zeigen, daß diese Festlegung wohl-definiert ist, d.h. daß sie unabhängig von der Wahl der eigentlichen Ebene $\mathcal{E}$ ist. Es seien also $\mathcal{E}, \Gamma$ zwei eigentliche Ebenen, die $\mathfrak{m}$ enthalten. Da $\widetilde{\Pi}$ dreidimensional ist, existier die Schnittgerade der beiden Ebenen, welche auch zu $\mathfrak{G}$ gehört.[27] Wir bezeichnen sie mit L .

---

26) Um mit den Begriffen nicht zu Verwechslungen zu kommen, nennen wir die Eben des projektiven Raumes $\widetilde{\Pi}$ erweiterte Ebenen. Im Sonderfall brauchen sie natürlich keine echten Erweiterungen darstellen.

27) Der Beweis, und damit die Aussage des Satzes, läßt sich auch auf höher-dimensionale Räume verallgemeinern, wenn sich zwischen je zwei eigentlichen Ebenen $\mathcal{E}$ und Γ, die $\mathfrak{m}$ enthalten, stets eine Kette eigentlicher Ebenen $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n = \Gamma$ finden läßt, die alle $\mathfrak{m}$ enthalten und von denen je zwei aufeinanderfolgende eine Gerade von $\mathfrak{G}$ gemeinsam haben. Beispiel 7 aus §4 zeigt, daß diese Bedingung nicht immer erfüllt ist.

Es gibt dann nach Satz 1.1 jeweils in $\mathcal{E}$ und δ eine projektive Gerade A bzw. B mit $A \cap L \neq B \cap L$. Wir setzen $a_1 = A \cap L$, $b_1 = B \cap L$. Sei weiterhin $p \in \mathcal{P}$ ein Punkt von δ mit $p \notin L$. In der Ebene $\overline{A \cup \{p\}}$ wählen wir eine projektive Gerade C mit $C \neq A$, $C \not\ni a_1$ und setzen $a_2 = A \cap C$, $a_3 = C \cap \overline{a_1 p}$. Wegen $A \neq C$ und $n \notin \mathcal{P}$ sind a_1, a_2, a_3 verschieden. In der Erweiterung von $\mathcal{E}$ bzw. δ existiert dann die Verbindungsgerade von a_2 bzw. a_3 mit n. Diese beiden Geraden gehören offenbar (vgl. Beweis von Satz 5.2) zu $\mathcal{G}$, wir bezeichnen sie mit M, N und setzen $b_3 = B \cap N$. Wir wählen dann einen Punkt $b_2 \in M$ mit $b_2 \neq a_2$ (vgl. I 2). Von C und n wird in $\widetilde{\Pi}$ eine Ebene erzeugt. Diese enthält a_2, a_3, b_2, b_3. Da C projektive Gerade ist, liegen a_2, a_3, b_2, b_3 auch in einer Ebene von $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{J}_p)$. Wir setzen dann $d_1 = C \cap \overline{b_2 b_3}$. Weiterhin seien $d_2 = B \cap \overline{a_1 a_3}$, $d_3 = A \cap \overline{b_1 b_2}$.



Da in $\widetilde{\Pi}$ der allgemeine Satz von Desargues gilt, folgt $d_1 \in \overline{d_2 d_3}$. Wir wenden auf diese Konfiguration den Automorphismus σ an. Die drei Bildgeraden $\sigma(L)$, $\sigma(M)$, $\sigma(N)$ sind dann nach dem Satz von Desargues in $\widetilde{\Pi}$ wieder kopunktal. Also definieren zwei Geraden $L, N \subset \delta$ den gleichen Bildpunkt wie zwei Geraden $L, M \subset \mathcal{E}$. Die Unabhängigkeit des Bildpunktes von den Geraden einer eigentlichen Ebene wurde schon im Beweis von Satz 5.2 mitgeliefert.

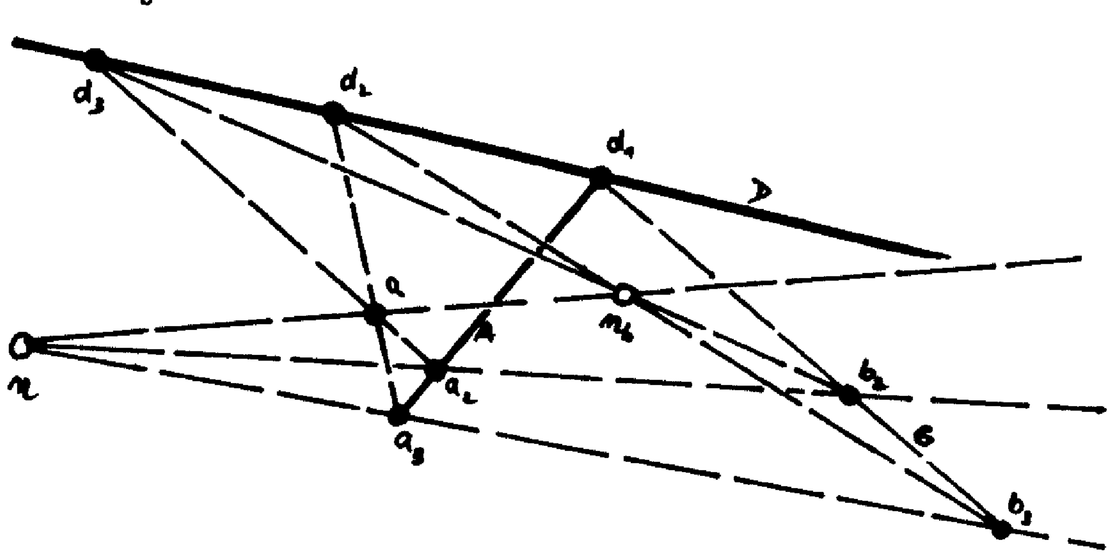
Es soll nun gezeigt werden, daß drei in $\widetilde{\Pi}$ kollineare Punkte nach der Abbildung wieder kollinear in $\mathcal{T}$ sind.

<u>Fall 1</u>: Alle drei Punkte gehören schon zu $\mathcal{P}$. Dann ist die Behauptung trivial.

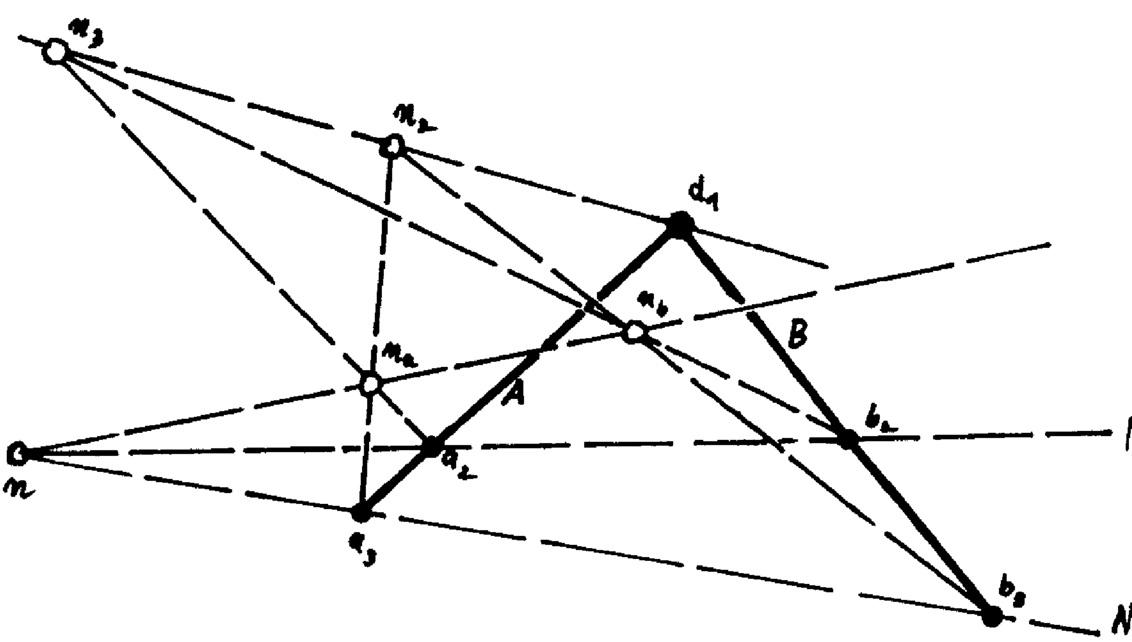
<u>Fall 2</u>: Zwei Punkte gehören zu $\mathcal{P}$ und beide liegen in einer eigentlichen Ebene. Die Behauptung folgt dann entsprechend dem Beweis von Satz 5.2 .[28]

28) In jeder eigentlichen Ebene wird eine ebene Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich induziert. Es gelten daher auch die Folgerungen dort.

Fall 3: Einer der Punkte gehört zu $\mathfrak{P}$. Wir nennen ihn a . Die anderen beiden seien $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}_b$ genannt. (Im Sonderfall kann $\mathfrak{n}_b$ auch zu $\mathfrak{P}$ gehören. Dies wird jedoch nicht allgemein vorausgesetzt. Ebenso wird nicht vorausgesetzt, daß die Verbindungsgerade zu $\mathfrak{G}$ gehört.) Nach Satz 5.3 gibt es eine eigentliche Ebene $\mathcal{E}$, zu deren Erweiterung $\mathfrak{n}$ gehört. In dieser wählen wir nach Satz 1.1 eine projektive Gerade A mit $a \notin A$ in der eigentlichen Ebene $\overline{A \cup \{a\}}$ wählen wir eine projektive Gerade D mit $D \neq A$ und $a \notin D$. In $\widetilde{\Pi}$ existiert dann die erweiterte Ebene, die D und $\mathfrak{n}_b$ enthält. Diese hat mit $\mathcal{E}$ eine Gerade als Schnitt.— Falls $\mathfrak{n}_b$ nicht zu $\mathcal{E}$ gehört, existiert diese Schnittgerade G in $\widetilde{\Pi}$ eindeutig. Sie hat zunächst in $\widetilde{\Pi}$ mit den projektiven Geraden von $\mathcal{E}$ Schnittpunkte. Diese Schnittpunkte gehören aber auch zu $\mathfrak{P}$. Deshalb ist G auch eine Gerade von $\mathfrak{G}$.
Falls $\mathfrak{n}_b$ und D zu $\mathcal{E}$ gehören und $\mathfrak{n}_b \notin \mathfrak{P}$, wählen wir durch $A \cap D$ irgendeine von A und D verschiedene projektive Gerade von $\mathcal{E}$ als G (vgl. IP 4). Wegen $\mathfrak{n}_b \notin \mathfrak{P}$ gehört dann $\mathfrak{n}_b$ nicht zu G .
Falls $\mathfrak{n}_b$ und D zu $\mathcal{E}$ gehören und $\mathfrak{n}_b \in \mathfrak{P}$, verfahren wir nach Fall 2 weiter.— Nach Satz 1.4 gibt es zwei verschiedene Punkte $b_2, b_3 \in G$ mit $b_2, b_3 \notin G \cap A$. In der Erweiterung von $\mathcal{E}$ existieren die Verbindungsgeraden von b_2 und b_3 mit $\mathfrak{n}$. Diese haben mit A je einen gemeinsamen Punkt, der auch zu $\mathfrak{P}$ gehört. Wir nennen die Schnittpunkte a_2 bzw. a_3 . Weiterhin sei $d_1 = G \cap A$, $d_2 = \overline{a_3 a} \cap D$ $d_3 = \overline{a_2 a} \cap D$. In der Erweiterung der eigentlichen Ebene von $\mu = \overline{G \cup D}$ existiert die Verbindungsgerade von b_2 und $\mathfrak{n}_b$ bzw. von b_3 und $\mathfrak{n}_b$. Da diese zur erweiterten Ebene von a_2, b_2 bzw. a_3, b_3, a gehören, muß die Verbindungsgerade von b_2 und $\mathfrak{n}_b$ durch d_3 und die Verbindungsgerade von b_3 und $\mathfrak{n}_b$ durch d_2 gehen. Die genannten Verbindungsgeraden gehören deshalb zu $\mathfrak{G}$. Die Punkte $\mathfrak{n}$; a, a_2, a_3; $\mathfrak{n}_b, b_2, b_3$; d_1, d_2, d_3 bilden also in $\widetilde{\Pi}$ eine Desargueskonfiguration, von der höchstens die Verbindungsgerade von $\mathfrak{n}, a, \mathfrak{n}_b$ nicht zu $\mathfrak{G}$ gehört. Nach Anwendung des Automorphismus gehen die Geraden von $\mathfrak{G}$ wieder in Geraden über und alle Inzidenzen bleiben erhalten (entweder nach Fall 1 oder Fall 2). Nach dem allgemeinen Satz von Desargues sind dann die Bildpunkte von $\mathfrak{n}, a, \mathfrak{n}_b$ auch kollinear.



Fall 4: Alle drei Punkte sind beliebig. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}_a$, $\mathfrak{n}_b$. Nach Satz 5.3 gibt es zwei verschiedene Geraden $M, N \in \mathcal{G}$ und eine eigentliche Ebene $\mathcal{E}$ mit $M, N \subset \mathcal{E}$ und $\mathfrak{n}$ inzidiert mit M, N und $\mathfrak{n}_a$, $\mathfrak{n}_b$ inzidieren nicht mit M, N.
Nach Satz 1.1 gibt es zwei verschiedene projektive Geraden $A, B \subset \mathcal{E}$ mit $A \cap B \notin M, N$. Wir setzen $a_2 = A \cap M$, $a_3 = A \cap N$, $b_2 = B \cap M$, $b_3 = B \cap N$ und $d_1 = A \cap B$. In $\widetilde{\Pi}$ existieren dann die Verbindungsgeraden von a_2 bzw. b_2 mit $\mathfrak{n}_a$ bzw. $\mathfrak{n}_b$ und schneiden sich im Punkt $\mathfrak{n}_3$ und es existieren in $\widetilde{\Pi}$ die Verbindungsgeraden von a_3 bzw. b_3 mit $\mathfrak{n}_a$ bzw. $\mathfrak{n}_b$ und deren Schnittpunkt $\mathfrak{n}_2$. Nach dem allgemeinen Satz von Desargues in $\widetilde{\Pi}$ sind dann $d_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3$ kollinear in $\widetilde{\Pi}$.



Wir können nun auf die Konfiguration den Automorphismus anwenden und nach Fall 3 bleiben alle Inzidenzen erhalten. Nach dem allgemeinen Satz von Desargues sind dann aber auch die Bilder von $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_a, \mathfrak{n}_b$ kollinear.

Es ist jetzt noch zu zeigen, daß die durch σ induzierte Abbildung bijektiv ist. Auf Grund der Konstruktion und der Bijektivität von σ folgt sofort, daß die induzierte Abbildung auf ist. Es bleibt noch die Injektiviät zu zeigen übrig. Nehmen wir nun an, es gäbe zwei verschiedene Punkte $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ von $\widetilde{\Pi}$, die auf einen Punkt $\mathfrak{m}'$ von $\widetilde{\Pi}$ abgebildet werden.(O.B.d.A. können wir $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \notin \mathcal{D}$ voraussetzen). Wir wählen wir dann zunächst eine projektive Gerade A, die $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ nicht enthält. Durch $\mathfrak{m}_1, A$ und $\mathfrak{m}_2, A$ sind in $\widetilde{\Pi}$ zwei Ebenen definiert, die von eigentlichen Ebenen $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ erzeugt werden können. Wir wählen auf A drei verschiedene Punkte b, c, d und durch b zwei verschiedene projektive Geraden B_1, B_2 mit $A \neq B_1, B_2$ und $B_1 \subset \mathcal{E}_1$, $B_2 \subset \mathcal{E}_2$. Die Verbindungsgeraden von $\mathfrak{m}_1$ bzw. $\mathfrak{m}_2$ mit c,d seien C_1, D_1 bzw. C_2, D_2 genannt. Da B_i (i=1,2) eine projektive Gerade ist, existieren die Schnittpunkte $e_i = B_i \cap C_i$, $f_i = B_i \cap D_i$ (i=1,2). Auf Grund der Inzidenzerhaltung der Abbildung und der Annahme folgt dann für die entsprechenden Bilder $C_1' = C_2'$ und $D_1' = D_2'$ und damit $\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_2'$. Wegen der Bijektivität von $\mathcal{G}$ muß dann auch $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ gelten. Wir verfahren dann weiter wie im ebenen Fall -siehe im Beweis von Satz 5.2- und erhalten einen Widerspruch, womit die Injektivität auch bewiesen ist.

Als Zusammenfassung von Satz5.2 und 5.3 erhalten wir den folgenden Hauptsatz.

Hauptsatz 5 Ist die Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich in eine desarguessche projektive Ebene oder in einen dreidimensionalen projektiven Raum einbettbar, so induziert jeder Automorphismus der Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich in eindeutiger Weise eine Projektivität im projektiven Abschluß. [29]

§ 4 Modelle von Inzidenzstrukturen mit Projektivitätsbereich

Wir werden auf zwei verschiedene Weisen Modelle konstruieren. Einmal gehen wir von Spiegelungsgruppen aus, zum zweiten gehen wir von einer projektiven Geometrie aus(d.h. setzen die Einbettbarkeit voraus) .

Es sei zunächst also eine Spiegelungsgruppe (G, D) gegeben[30], d.h. eine Gruppe G mit einem Erzeugendensystem D , die folgende Axiome erfüllt:

(G 0) Alle Elemente von D sind involutorisch und $D \neq \emptyset$.

(G 1) abx, aby, abz involutorisch für $a,b,x,y,z \in D$ mit $a \neq b \Longrightarrow xyz \in D$.

(G 2) Es gibt mindestens ein eigentliches Büschel und jedes $x \in D$ gehört entweder keinem oder mindestens drei eigentlichen Büscheln an[31].

Wir nennen (G, D) eine Spernersche Spiegelungsgruppe, wenn an Stelle von (G 2)
(G 2*) Jedes $x \in D$ gehört mindestens drei eigentlichen Büscheln an gilt .

---

29) **Unter dem projektiven Abschluß verstehen wir den kleinsten projektiven Raum, in den ($\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_p$) eingebettet werden kann. Ist die Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich prinzipiell einbettbar, so existiert offensichtlich auch der projektive Abschluß.**

30) **Vgl. [17] oder [6] und auch [22], [14], [28] .**

31) **Eine Menge $B_{ab} = \{x \in D \,/\, abx \text{ involutorisch}\}$ für $a,b \in D$ und $a \neq b$ heißt Büschel. Die Menge aller Büschel bezeichnen wir mit $\mathcal{B}$.
Ein Büschel, das mit jedem anderen Büschel einen nicht-leeren Durchschnitt hat, heißt eigentliches Büschel. Die Menge aller eigentlichen Büschel wird mit $\mathcal{B}_e$ bezeichnet.**

Es lassen sich nun jeder Spiegelungsgruppe drei Inzidenzstrukturen zuordnen: Erstens die sogenannte (verallgemeinerte) absolute Ebene $(G/D)_1$, deren Punkte die eigentlichen Büschel und deren Geraden die Elemente von D sind, zweitens die duale (verallgemeinerte) absolute Ebene $(G/D)_2$, deren Punkte die Elemente von D und deren Geraden die (beliebigen) Büschel sind, drittens der sogenannte Gruppenraum D(G), dessen Punkte die Elemente von D^2 und dessen Geraden die Mengen αB^2 mit $\alpha \in D^2$, $B \in \mathcal{B}$ sind.

Über diese drei Inzidenzstrukturen lassen sich nun nach [6] und [14] die folgenden Aussagen machen.

Satz 4.1 a) Die absolute Ebene $(G/D)_1$ ist ein ebener Inzidenzraum, in dem das zu (Ds) duale Axiom gültig ist.

b) Die duale absolute Ebene $(G/D)_2$ ist eine ebene Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich, in der (Ds) gilt.
Ist (G, D) eine Spernersche Spiegelungsgruppe, so gilt (D).

Satz 4.2 Der Gruppenraum D(G) ist eine räumliche Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich, in der die Axiome (D), (III P) erfüllt sind.
Ist (G, D) eine Spernersche Spiegelungsgruppe, so gilt (II P) auch.

Satz 4.3 Im Gruppenraum D(G) ist das Axiom (II P) stetts dann erfüllt, wenn für die Spiegelungsgruppe die folgende Bedingung erfüllt ist:
(G ii) Für jedes Paar $c,d \in D$ gibt es $a,x \in D$ mit $cd = ax$ und a,x sind in eigentlichen Büscheln enthalten.[32)]

Fassen wir die Ergebnisse zusammen und beachten wir Hauptsat 2 und 3, so erhalten wir den folgenden Hauptsatz.

Hauptsatz 4 Es sei (G, D) eine Spiegelungsgruppe, dann ist

a) $(G/D)_2$ eine ebene Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich, die in eine desarguessche projektive Ebene einbettbar ist.

b) $(G/D)_2$ voll-einbettbar, wenn (G ii) erfüllt ist.

c) der Gruppenraum D(G) eine räumliche Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich, die in einen projektiven dreidimensionalen Raum voll-einbettbar ist, wenn (G ii) gilt.[32)]

Wir wollen nun von einem projektiven Raum $\widetilde{\Pi}$ ausgehen, d.h. wir setzen die Voll-Einbettbarkeit der Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich voraus.

---

32) Die Bedingung (G ii) ist in jeder Spernerschen Spiegelungsgruppe erfüllt. Bezüglich der Begriffe "einbettbar" und "voll-einbettbar" vgl. Anm. 17.

Es ist dann klar, daß die Punktmenge $\mathcal{P}$ sich aus der Punktmenge der projektiven Geometrie durch Herausnahme einer Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ ergibt, es ist also $\mathcal{P} = \mathcal{T} \setminus \mathcal{U}$. Die Geradenmenge $\mathcal{G}$ besteht aus allen Geraden von $\mathcal{T}$, die mit $\mathcal{T} \setminus \mathcal{U}$ mindestens zwei Punkte gemeinsam haben. Die projektiven Geraden sind dann alle Geraden von $\mathcal{T}$, die mit $\mathcal{U}$ keinen Punkt gemeinsam haben. Die Menge aller solcher projektiven Geraden sei mit $\mathcal{G}_p$ bezeichnet.
Die durch $\mathcal{T}$ und $\mathcal{U}$ auf diese Weise definierte Inzidenzstruktur nennen wir die Spurgeometrie von $\mathcal{T}$ bzgl. $\mathcal{U}$.

Satz 4.4 Es seien eine projektive Geometrie $\mathcal{T}$ und eine beliebige Teilmenge $\mathcal{U}$ von $\mathcal{T}$ gegeben.

a) Die Spurgeometrie von $\mathcal{T}$ bzgl. $\mathcal{U}$ ist stets ein Inzidenzraum.
b) Die Struktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_p)$ erfüllt die Axiome (IP 1), (IP 3).
c) Ist $\mathcal{T}$ desarguesch, so gilt auch (D) in $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_p)$.

Damit auch die Reichhaltigkeitsaxiome (IP 2), (IP 4) in der Spurgeometrie erfüllt sind, müssen wir zwei Forderungen an $\mathcal{U}$ stellen:

(U 1) Es gibt mindestens zwei Geraden von $\mathcal{T}$, die mit $\mathcal{U}$ keinen gemeinsamen Punkt haben.

(U 2) Ist A eine Gerade von $\mathcal{T}$, die mit $\mathcal{U}$ keinen Punkt gemeinsam hat, so gibt es durch jeden Punkt $a \in A$ und jede Ebene $\mathcal{E} \supset A$ mindestens zwei weitere Geraden B, C mit $a \in B, C$ und $\mathcal{E} \supset B, C$ und $B \cap \mathcal{U} = C \cap \mathcal{U} = \emptyset$.

Es folgt nun

Satz 4.5 Ist $\mathcal{T}$ eine projektive Geometrie und $\mathcal{U}$ eine Teilmenge von $\mathcal{T}$, die (U 1) (U 2) erfüllt, so ist die Spurgeometrie von $\mathcal{T}$ bzgl. $\mathcal{U}$ eine Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich.
Ist $\mathcal{T}$ desarguessch, so gilt offensichtlich auch Axiom (D).

Bezüglich der Automorphismen einer solchen Spurgeometrie lassen sich folgende, sofort einsichtige Feststellungen machen:

Satz 4.6 Es sei $\mathcal{T}$ eine projektive Geometrie und $\mathcal{U}$ eine Teilmenge von $\mathcal{T}$.

a) Eine Projektivität τ der projektiven Geometrie $\mathcal{T}$ ist genau dann eine Automorphismus der Spurgeometrie von $\mathcal{T}$ bzgl. $\mathcal{U}$, wenn τ zu den Fixabbildungen von $\mathcal{U}$ gehört.
b) Ist $\mathcal{T}$ zwei- oder drei-dimensional und desarguessch und erfüllt die Teilmenge $\mathcal{U}$ die Bedingungen (U 1) (U 2), so ist jeder Automorphismus der Spurgeometrie von $\mathcal{T}$ bzgl. $\mathcal{U}$ auch eine Projektivität von $\mathcal{T}$.

Abschließend seien einige Beispiele von Inzidenzstrukturen mit Projektivitätsbereich genannt, die sich als Spurgeometrie einer projektiven Geometrie $\mathfrak{P}$ mit einer Teilmenge $\mathfrak{U}$, die (U 1) (U 2) erfüllt, darstellen lassen.

Beispiel 1 $\mathfrak{P}$ ist eine beliebige projektive Geometrie, die nicht nur aus einer Geraden besteht, und $\mathfrak{U} = \emptyset$.

Die Spurgeometrie von $\mathfrak{P}$ bzgl. $\mathfrak{U}$ ist dann mit $\mathfrak{P}$ identisch. Die projektive Geometrie ist also ein Sonderfall einer Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich.

Beispiel 2 $\mathfrak{P}$ ist eine projektive Ebene und $\mathfrak{U}$ besteht aus den Punkten einer Geraden, mit Ausnahme von drei Punkten.

In der zugehörigen Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich gehen durch jeden Punkt, der außerhalb der ausgezeichneten Geraden liegt, genau drei projektive Geraden.

Beispiel 3 $\mathfrak{P}$ ist eine projektive Geometrie, deren Koordinatenmenge mindestens drei Elemente enthält, und $\mathfrak{U}$ sei ein Teilraum von $\mathfrak{P}$, der keine Hyperebene ist. Außerdem sei $\mathfrak{P}$ mindestens zweidimensional.

Die zugehörige Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich ist nach [16] ein sogenannter "geschlitzter Raum" .

Beispiel 4 $\mathfrak{P}$ ist eine endliche projektive Ebene der Ordnung n und $\mathfrak{U}$ ist eine beliebige Menge, deren Mächtigkeit kleiner als (n-1) ist.

Beispiel 5 $\mathfrak{P}$ ist eine unendliche projektive Geometrie, die mindestens zweidimensional ist, und $\mathfrak{U}$ ist eine beliebige endliche Menge.

Beispiel 6 $\mathfrak{P}$ ist die reelle projektive Ebene und $\mathfrak{U}$ ist eine abgeschlossene Kreisscheibe.

Die zugehörige Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich ist die zur klassischen hyperbolischen Ebene duale absolute Ebene $(G/D)_2$.

Beispiel 7 $\mathfrak{P}$ ist ein vierdimensionaler projektiver Raum. Weiterhin seien ε, δ zwei bestimmte Ebenen von $\mathfrak{P}$, die genau einen Punkt n gemeinsam haben. $\mathfrak{U}$ wird nun gleich $(\mathfrak{P} \setminus (\varepsilon \cup \delta)) \cup \{n\}$ gesetzt.

Es sei hierzu noch angemerkt, daß sogar die Vereinigung von zwei beliebigen punkt~~/~~ierten Ebenen (projektive Ebenen, denen ein Punkt entnommen wird) auch eine Inzidentstruktur mit Projektivitätsbereich ergibt, wenn man zur Geradenmenge noch die zweielementigen Mengen aus je einem Element der punktierten Ebenen hinzunimmt.

<u>Beispiel 8</u> Π ist der dreidimensionale reelle projektive Raum und $\mathcal{U}$ ist die Oberfläche einer Kugel.

In der zugehörigen Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich ist Axiom (II P) nicht erfüllt. Es gibt sogar Punkte, durch die keine projektive Gerade geht.

<u>Beispiel 9</u> Π ist der dreidimensionale reelle projektive Raum und $\mathcal{U}$ ist eine Kreislinie.

In der zugehörigen Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich sind die Axiome (II P) (III P) erfüllt. Es gibt aber Punkte, durch die in einer bestimmten Ebene keine projektiven Geraden verlaufen.

<u>Beispiel 10</u> Π ist der dreidimensionale reelle projektive Raum und $\mathcal{U}$ bestehe aus den Punkten einer Kugeloberfläche S sowie den Punkten von $\overline{a_1a_2} \setminus \{a_1,a_2\}$, wobei a_1,a_2 zwei Punkte des Kugelinnern von S sind.

Die zugehörige Inzidenzstruktur mit Projektivitätsbereich enthält eine Gerade, die mit keinem eigentlichen Punkt inzidiert. Überdies hat diese Gerade nur zwei Punkte.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] F.BACHMANN, Zur Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff; Math. Ann. 123 (1951).

[2] F.BACHMANN, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952 bzw. 1959.

[3] W.BLASCHKE, Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie, Zeitschrift für Mathematik und Physik 60 (1911).

[4] E.ELLERS/H.KARZEL, Kennzeichnung elliptischer Gruppenräume, Abh. Math. Sem. Universität Hamburg 26 (1963).

[5] E.ELLERS/E.SPERNER, Einbettung eines desarguesschen Ebenenkeimes in eine projektive Ebene, Abh. Math. Sem. Universität Hamburg 25 (1962).

[6] G.GRAUMANN, Projektive Abschließbarkeit von Inzidenzstrukturen mit Eigentlichkeitsbereich, Dissertation Hannover 1969.

[7] J.GRÜNWALD, Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft, Sitz.-B. Akad. Wien math.-nat. Kl. IIa 80 (1911).

[8] H.HJELMSLEV, Neue Begründung der ebenen Geometrie, Math. Anm. 64 (1907).

[9] H.KARZEL, Ein Axiomensystem der absoluten Geometrie, Arch. Math. 6 (1955).

[10] H.KARZEL, Verallgemeinerte absolute Geometrien und Lotkerngeometrien, Arch. Math. 6 (1955).

[11] H.KARZEL, Spiegelungsgeometrien mit echtem Zentrum, Arch. Math. 9 (1958).

[12] H.KARZEL, Zentrumsgeometrien und elliptische Lotkerngeometrien, Arch. Math. 9 (1958).

[13] H.KARZEL, Verallgemeinerte elliptische Geometrien und ihre Gruppenräume, Abh. Math. Sem. Universität Hamburg 24 (1960).

[14] H.KARZEL, Gruppentheoretische Begründung metrischer Geometrien, Vorlesungsausarbeitung von G.GRAUMANN, Hamburg 1963.

[15] H.KARZEL, Bericht über projektive Inzidenzgruppen, Jber. Deutsch. Math. Verein 67 (1964).

[16] H.KARZEL/I.PIEPER, Bericht über geschlitzte Inzidenzgruppen, Jber. Deutsch. Math. Verein 72 (1970).

[17] H.KARZEL, Spiegelungsgruppen und absolute Gruppenräume, Abh. Math. Sem. Universität Hamburg 35 (1971).

[18] H.KARZEL, Kinematic Spaces, Inst. Nazionale di Alta Matematica, Symposia Math. Volume XI. (1973).

[19] H.KARZEL, Endliche 2-gelochte Ebenen, Abh. Math. Sem. Universität Hamburg 40 (1974).

[20] H.KARZEL/K.SÖRENSEN/D.WINDELBERG, Einführung in die Geometrie, Göttingen 1973.

[21] H.KARZEL/H.-J.KROLL, Eine inzidenzgeometrische Kennzeichnung projektiver kinematischer Räume, Arch. Math. Vol. XXVI (1975).

[22] R.LINGENBERG, Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt I, II, III, IV.
I, II Math. Anm. 137 (1959), III Math. Anm. 142 (1961), IV Math. Anm. 158 (1965).

[23] E.PODEHL/K.REIDEMEISTER, Eine Begründung der elliptischen Geoemtrie, Abh. Math. Sem. Universität Hamburg 10 (1934).

[24] A.SCHMIDT, Die Dualität von Inzidenz und Senkrecht, Math. Anm. 118 (1943).

[25] E.SCHRÖDER, Gruppenräume Minkowskischer Ebenen, Dissertation Hamburg 1968.

[26] E.SCHRÖDER, Kennzeichnung und Darstellung kinematischer Räume metrischer Ebenen, Abh. Math. Sem. Universität Hamburg 39 (1973).

[27] F.SCHUR, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1909.

[28] E.SPRERNER, Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik, Arch. Math. 5 (1954).

[29] G.THOMSEN, Über einen neuen Zweig geometrischer Axiomatik, Math. Zeitschrift 34 (1932).