

Günter Graumann, Bielefeld

Computerunterstützter Geometrieunterricht (CUGU)

Nachdem die Computer in alle Bereiche des Lebens langsam eindringen und der Einsatz von Computern in der Schule weithin diskutiert wird, erscheint es mir als eine besonders wichtige Aufgabe der Mathematikdidaktik über die sinnvolle Verwendung von Computern im Mathematikunterricht nachzudenken. Da ich dabei die Computer vor allem zu den Medien zähle (auf Informatik bezogene Lernziele spielen eine untergeordnete Rolle), ist die sinnvolle Verwendung von Computern immer auch an den Sinn des entsprechenden Unterrichts gebunden. Dabei ist zu beachten, daß durch Computer die Stärken und Schwächen des herkömmlichen Unterrichts stärker zum Vorschein treten. Ähnlich wie auch die Computer in der Gesellschaft nicht an sich "gut" oder "böse" sind, sondern lediglich selektiv bestimmte positive oder negative Strömungen verstärken. In diesem Zusammenhang sei auch erwähnt, daß meiner Meinung nach die gesellschaftlichen Auswirkungen der Computer in den Informatikunterricht bzw. Computerunterstützten Unterricht stets in angemessener Weise integriert werden müssen. Ich möchte auf diese Problematik hier jedoch nicht näher eingehen, vielmehr möchte ich aufzeigen, welche didaktischen Möglichkeiten Computer bieten, um den oft recht stiefmütterlich behandelten Geometrieunterricht erneut zu beleben. Zwar wird der Computerunterstützte Unterricht oft nur im Zusammenhang mit Themen, die auf Algorithmen orientiert sind, gesehen, aber gerade mit den neuen grafikfähigen Computern als unterstützendes Medium können wir die bisher sehr begrenzten Möglichkeiten zum Anfertigen von Zeichnungen und zum Durchführen von längeren Rechnungen wesentlich erweitern. Ein Computerunterstützter Geometrieunterricht kann deshalb die Fülle, die die Elementargeometrie bietet, viel besser ausnutzen, um auch Fähigkeiten wie "Kreativität", "Flexibilität", "Differenzierte und beziehungsreiche Wahrnehmung", "Umgang mit komplexen Problemen" zu trainieren. Und besonders in der heutigen Zeit, in der Routineaufgaben immer häufiger von Maschinen übernommen werden, bilden solche Fähigkeiten wichtige Lernziele. Außerdem lassen sich mit den grafikfähigen Computern viele geometrische Prozesse wesentlich besser veranschaulichen. Schließlich sei in diesem Zusammenhang noch erwähnt, daß die grafikfähigen Computer einerseits über den künstlerischen und spielerischen Reiz zu weiterführenden Berechnungen motivieren und andererseits zu einer sehr schnellen sichtbaren Rückkopplung dieser Berechnungen führen.

Beispiele für Themen zur Bearbeitung mit einem Computer

Zur Verdeutlichung der Möglichkeiten eines Computerunterstützten Geometrieunterrichts will ich nun einige beispielhafte Themen nennen^{*)}. Diese sind noch nicht soweit ausgearbeitet, daß ein direkter Bezug zu einer Schulstufe genannt werden könnte. Auch hängt eine genaue Ausarbeitung von der Art des vorhandenen Computers (einschließlich Software) ab. Mit den Themen soll vielmehr nur ein erster Ansatzpunkt geliefert werden. Die Themen sind dabei nach der Art und Weise des Einsatzes von Computern geordnet.

1. Das Computer-Grafik-System als Darstellungsmedium für einzelne geometrische Figuren oder Figurenfolgen:
 - a) Geometrische Formen und Muster der Ebene aus N-Ecken und Kreisen bzw. Kreisteilen, Ornamente und Symbole, Parkettierungen und besondere Konfigurationen etc.
 - b) Ebene Kurven und Kurvenscharen wie etwa Schwingungskurven, Wachstumskurven, Spiralen, Rosetten, Rollkurven und dynamisch sich ändernde Kegelschnitte.
 - c) Schrägbilder oder Dreitafelprojektionen räumlicher Gebilde.
 - d) Paare Figur - Bildfigur bei ebenen Abbildungen.
2. Der Computer als Rechenhilfe bei der Ermittlung geometrischer Größen:
 - a) Längen-, Flächenmaß- und Winkelmaßberechnungen an N-Ecken (insbesondere Dreiecken und Vierecken) bei unterschiedlicher Bestimmung der N-Ecke.
 - b) Längen-, Flächen-, Volumen- und Winkelmaßberechnungen an Körpern wie etwa Säulen, Spitzkörper und Stümpfen, Prismatoiden und platonischen Körpern (bei unterschiedlicher Festlegung der Körper).
 - c) Bogenlänge-, Krümmungs-, Oberflächen- und Volumenberechnungen von Kurven und Rotationskörpern.
 - d) Ermittlung von Größen in der analytischen Geometrie wie etwa Steigungsmaß, minimale Abstände, Exzentrizität und Mittelpunkt.

^{*)} Vgl. hierzu auch die Vorträge von W.L. Fischer und V. Vogt auf der Bundestagung 1984.

3. Computerprozeduren als universelles Werkzeug zum Verändern von Figuren und zum Testen von Bedingungen:
 - a) Prozedure zum Spiegeln, Drehen oder Verschieben (bzw. Schrägspiegeln, Scheren oder Strecken) einer beliebigen durch Koordinaten vorgegebenen Figur.
 - b) Prozedure zum Erzeugen eines Schrägbildes einer beliebigen durch Koordinaten vorgegebenen Figur.
 - c) Prozedure zur Ermittlung der Zusammensetzung von zwei Abbildungen.
 - d) Prozedure zum Zeichnen eines Dreiecks (bzw. Vierecks) bei Vorgabe von drei (bzw. fünf) beliebigen Bestimmungsgrößen.
 - e) Prozedure zum Testen der gleichen Länge, der Parallelität und der Orthogonalität zweier Strecken.
 - f) Prozedure, die aus einer einzugebenden Kurve nach einem festen Verfahren (wie etwa "Fußpunktkurve" oder "Evolute") eine neue Kurve erzeugt.

4. Der Computer als heuristisches Mittel zur Lösung gegebener Probleme und zum Aufsuchen neuer Fragestellungen:
 - a) Entdecken archimedischer Parkettierungen.
 - b) Erzeugen von Mitten- oder Diagonalfiguren für beliebige ebene oder räumliche N-Ecke.
 - c) Erzeugen von N-Ecken bei Vorgabe einer bestimmten Länge und eines bestimmten Winkels.
 - d) Entdecken von Symmetrien bei beliebigen N-Ecken.
 - e) Entdecken von bestimmten Abbildungsgruppen.
 - f) Iteration von Abbildungen (vgl. z.B. Theorie von Mandelbrot und Attraktoren in der Theorie dynamischer Systeme).
 - g) Darstellung einfacher vierdimensionaler Körper.
 - h) Erkennen von Muster in bauhistorischen Grundrissen.

Erfahrungen mit Studierenden

Da über die genannten Themen bisher kaum Erfahrungen vorliegen, habe ich im vergangenen Jahr zunächst auf der Ebene der Hochschule allgemeine Vor-

aussetzungen eines Computerunterstützten Geometrieunterrichts sowie einzelne Themen aus dem obigen Katalog zusammen mit Studierenden bearbeitet. Auf diese Weise konnte auch gleichzeitig das Problem der Implementation solcher Fragen in die Lehrerausbildung bearbeitet werden. Zur Verfügung stand uns zunächst ein Grafik-System in Pascal für die Großrechenanlage, später konnten wir auch Kleinrechner mit Basic hinzuziehen. Alle Studierenden hatten schon Vorkenntnisse im Programmieren.

Zur Einführung in die Problematik und zum Sammeln von Erfahrungen mußten zunächst alle Studierenden fünf Programme aus der folgenden Sammlung von acht Aufgaben erstellen und ausprobieren: Reguläres N-Eck, Symmetrieachsen in regulären N-Ecken, Sechseckparkettierung, Kreismuster, Rosetten, Dreiecksdeformationen, Vielecke aus fester Länge und festem Winkel, Pythagoräische Dreiecke.

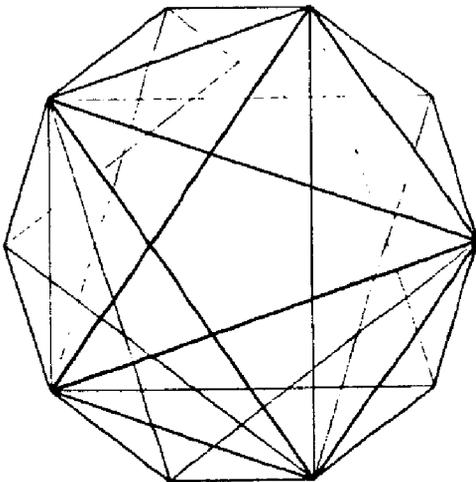
Danach wurden fünf Kleingruppen (2 bis 4 Personen) gebildet, von denen sich jede ein Projektthema ausgesucht hatte. Das Thema mußte einmal programmtechnisch bewältigt werden und zum anderen sollte über eine mögliche Verwendung eines solchen Programms im Unterricht reflektiert werden. Die fünf ausgewählten Themen bezogen sich auf "Abbildung und Symmetrie nichtregulärer N-Ecke", "Berechnungen an Pyramiden und Parallelepipeds", "Schrägbilder von platonischen Körpern", "Kurven in ebenen kartesischen Koordinatensystemen" und "Geburtshoroskope/Darstellung der Planetenkonstellationen".

Die Erfahrungen in diesem Seminar lehrten uns, daß das Aufstellen von Programmen für diese Projektthemen sehr zeitaufwendig ist und daß dazu relativ viele mathematisch/informationstheoretische Vorkenntnisse erforderlich sind. Das Erstellen von solchen komplexen Programmen ist deshalb nur in Arbeitsgemeinschaften der Oberstufe des Gymnasiums möglich. Verwendet man jedoch die Programme als "black box" (ähnlich wie andere Software), so finden sich schon in der Sekundarstufe I interessante Anwendungen. Das Programm für die Berechnungen an Pyramiden dagegen läßt sich auch schon im 9. oder 10. Schuljahr der Realschule bzw. des Gymnasiums bewältigen. Dieses Thema führte u.a. auch zu Gleichungen dritten Grades und bot damit einen Anlaß über die Geschichte der Cardanoschen Formel zu reden. Weiterhin sei erwähnt, daß die mit den Pflichtaufgaben zusammenhängenden Programme auch schon in der Sekundarstufe I erstellt werden können. Die Anwendung dieser Programme, insbesondere zum Erstellen von "schönen" Figuren, geben für viele elementargeometrische Überlegungen und Rechnungen einen Anlaß.

Einige Programmbeispiele in Basic und Pascal seien nun noch vorgestellt.

```

10 REM **ITERATION EINES WINKELS**
20 LPRINT CHR$(28);CHR$(37)
30 INPUT "GIB DEN WINKEL EIN !";W
40 INPUT "GIB DIE ANZAHL DER
    ITERATIONEN AN !";N
45 IF N=0 THEN 130
50 INPUT "GIB DEN RADIUS AN !";R
60 INPUT "BEZUEGL. DER X-ACHSE
    GIB DIE ANFANGSRICHTUNG AN !";A
70 INPUT "WAELH DIE FARBNUMMER
    #Beachte 0=SW 1=BL 2=GR 3=RT #";F
80 U=180-W;X=48+R*COSA;Y=-48+R*SINA
90 LPRINT "J";F:LPRINT "M";X;";";Y
100 FOR I=1 TO N
102 X=48+R*COS(A+I*U)
104 Y=-48+R*SIN(A+I*U)
106 LPRINT "D";";";X;";";Y
108 NEXT I
110 LPRINT "M";0;";";-110
120 GOTO 30
130. LPRINT CHR$(28);CHR$(46):END
    
```



W1=36 W2=72 W3=108 W4=144

```

10 REM ** ANNAEHERUNG VON PI **
    # ueber den Umfangs reg. N-Ecke #
15 LPRINT " ZUM VERGLEICH: PI=";PI
20 INPUT "N=";N
25 X=N*SIN(180/N)
30 LPRINT " N=";N;" U/D=";X
40 GOTO 20
    
```

ZUM VERGLEICH: PI= 3.141592654

N= 6	U/D= 3
N= 12	U/D= 3.105828541
N= 60	U/D= 3.140157375
N= 100	U/D= 3.141075908
N= 240	U/D= 3.141502937
N= 1800	U/D= 3.141591059
N= 3000	U/D= 3.141592079
N= 10000	U/D= 3.141592602
N= 40000	U/D= 3.14159265
N= 1000000	U/D= 3.141592654

```

10=PROGRAM *DEFORM-3ECK* (INPUT,OUTPUT);
20=CONST DX=22; EX=17; FX=27;
25= DY=16; EY= 7; FY= 7;
30=VAR AX,BX,CX,LX,MX,NX :REAL;
35= AY,BY,CY,LY,MY,NY :REAL;
37= I :INTEGER;
40=PROCEDURE INITGRAFIK; EXTERN PASCAL;
45=PROCEDURE FINITGRAFIK; EXTERN PASCAL;
50=PROCEDURE DRAW(X,Y:REAL); EXTERN
51= PASCAL;
55=PROCEDURE MOVE(X,Y:REAL); EXTERN
56= PASCAL;
60=PROCEDURE ECK(AX,AY,BX,BY,CX,CY:REAL)
62= BEGIN MOVE(AX,AY);
64= DRAW(BX,BY);DRAW(CX,CY);DRAW(AX,AY);
66= END; (*ECK*)
70=PROCEDURE ZEICHNE(UAR AX,AY,BX,BY,
71= CX,CY:REAL);
72= VAR T :INTEGER;
73= BEGIN T:=0;
74= REPEAT
75= ECK(AX,AY,BX,BY,CX,CY);
76= AX:=AX+LX; BX:=BX+MX; CX:=CX+NX;
77= AY:=AY+LY; BY:=BY+MY; CY:=CY+NY;
78= T:=T+1;
79= UNTIL T=10; END; (*ZEICHNE*)
80=BEGIN (*HAUPTPROGRAMM*) INITGRAFIK;
82= WRITELN( GIB ECKPUNKTE EIN );
83= READ(AX,AY,BX,BY,CX,CY);
85= LX:=(DX-AX)/10; LY:=(DY-AY)/10;
86= MX:=(EX-BX)/10; MY:=(EY-BY)/10;
87= NX:=(FX-CX)/10; NY:=(FY-CY)/10;
90= ZEICHNE(AX,AY,BX,BY,CX,CY);
95= ECK(DX,DY,EX,EY,FX,FY);
100=FINITGRAFIK; END.
    
```

