Günter Graumann / Helmut Siegert, Bielefeld

Funktionsmodelle zum Zeichnen von Ellipsen

Vorbemerkung:

Die Modelle, die wir vorstellen, wurden von H. Siegert im Rahmen einer Staatsexamensarbeit entwickelt. Das Thema wurde durch eine Schülerarbeit und einen Vortrag über Ellipsenzirkel angeregt.

Funktionsmodell:

Mit dem Begriff "Funktionsmodell" wollen wir ausdrücken, daß es sich nicht einfach um irgendwelche Modelle im Sinne der Modelltheorie handelt, sondern daß die Modelle in Hinsicht auf eine bestimmte Funktion im Mathematikunterricht und auf die besonderen Bedingungen von Unterricht hin konzipiert sind. Einige wesentliche Prinzipien, die ein Funktionsmodell erfüllen muß, seien im folgenden genannt.

- Konkret-anschaulich: Mit dem Modell muß ein mathematischer Sachverhalt auf der enaktiven und/oder ikonischen Ebene eine anschauliche Gestalt annehmen, wobei insbesondere auch der taktile Kontakt der Lernenden mit dem Modell möglich sein muß.
- Dynamisch: Das Modell muß mindestens einen veränderlichen Faktor enthalten, so daß durch systematische Variation des Zustandes Gesetzmäßigkeiten erkennbar werden und die Lernenden gewissermaßen spielerisch zu Vermutungen gelangen können.
- Mäeutisch: Mathematische Zusammenhänge und Beweisideen sollen im Funktionsmodell so augenfällig angelegt sein, daß Lernende sie im Umgang mit dem Modell selbsttätig forschend erkennen können und dazu motiviert werden, unter minimaler Anleitung einen Zusammenhang mathematisch exakt zu begründen bzw. einen exakten mathematischen Beweis zu entwickeln.
- Technisch einfach und ansprechend gestaltet: Aufgrund der oben genannten Anforderungen und aus methodischen Gründen sollte ein Funktionsmodell in seiner technischen Ausführung leicht durchschaut werden können, stabil und einfach handhabbar, sowie zur evtl. Reparatur leicht zerlegbar sein und von der äußeren Gestaltung einen Anreiz bieten. Darüber hinaus ist es oft auch sinnvoll, wenn das Modell auf einem Overhead-Projektor (OHP) verwendet werden kann.

An einem Funktionsmodell zum "Satz des Thales" (vgl. Abb. 1) seien diese Punkte noch einmal verdeutlicht:

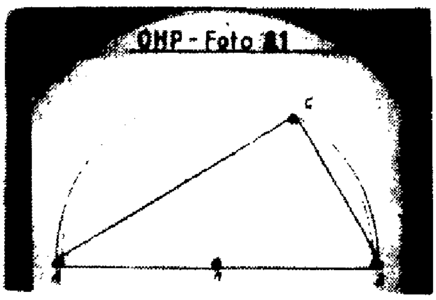

Abb. 1 a

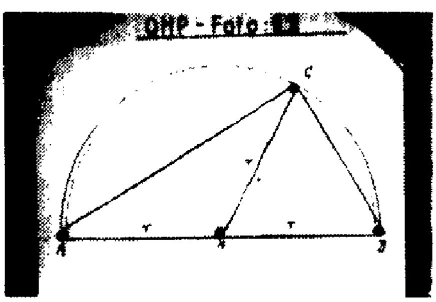

Abb. 1 b

Das Modell wurde aus Plexiglas hergestellt und läßt sich daher mittels eines OHP an der Wand abbilden. Sein mechanischer Aufbau ist einfach und es läßt sich auch von Lernenden leicht handhaben. Spannt man ein Gummiband um die Stifte der Punkte A,B,C und dreht die Kreisscheibe, so kann man aus der Anschauung entnehmen, daß $\overline{AB}$ stets den Durchmesser des Halbkreises darstellt, auf dem C liegt, und daß vermutlich der Winkel bei C immer ein rechter ist. Um auch weitere Zusammenhänge in Hinsicht auf einen Beweis zu erkennen, verbinden wir noch die Punkte C und M mit einem Gummiband. Bei Variation der Position von C wird dann augenfällig, daß $\overline{MC}$, $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ immer den Radius darstellen, und daß daher das Dreieck ABC stets in die zwei gleichschenkligen Dreiecke AMC und BMC zerfällt. Mittels des Satzes über das gleichschenklige Dreieck und des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck, sowie einer einfachen Winkelberechnung kann dann der Satz von Thales mathematisch exakt bewiesen werden.
Ergänzend sei bemerkt, daß handelübliche Zirkel zum Zeichnen von Kreisen nicht alle Bedingungen eines Funktionsmodells erfüllen, da der konstante Radius nicht konkret zu sehen ist. Auch der im Handel erhältliche Haffsche Ellipsenzirkel (Ellipsograph Nr. 97 der Fa. Haff, vgl. Abb. 6) ist kein Funktionsmodell, da die Funktionszusammenhänge selbst für Fachleute nicht leicht durchschaubar sind.

<u>Modellreihe zum Zeichnen von Ellipsen:</u>

Funktionsmodelle eignen sich, in einer Sequenz von aufeinander aufbauenden Einheiten angeordnet, in besonderer Weise dazu, auch schwerer erfaßbare geometrische Sachverhalte Stufe für Stufe zu erarbeiten.
Dies soll hier an einer Modellsequenz verdeutlicht werden, die - ausgehend von dem Spielzeug "Klapsmühle" (vgl. Abb. 2) - den Lernenden schrittweise Aufbau und Funktionsweise des Haffschen Ellipsenzirkels verdeutlicht. Vor-

ausgesetzt werden folgende Kenntnisse: Lehrsatz des Pythagoras; Strahlensätze; Koordinatensystem; Gleichungslehre; Kenntnis der Ellipse und ihrer Gleichung in der Normalform.

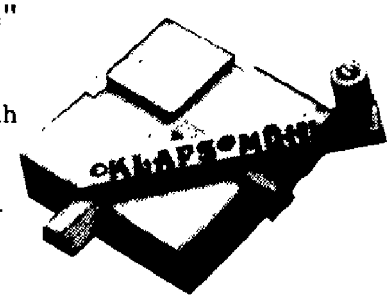

Abb. 2

Das Spielzeug "Klapsmühle" (kein Funktionsmodell) liefert spielerisch den Einstieg in die Modellsequenz. Es gestattet auch die Begriffe "Rastebene" und "Gangebene" sinnvoll einzuführen. Im Umgang mit der "Klapsmühle" entdeckt der Schüler, daß der Handgriff eine Bahn beschreibt, die eine Ellipse sein könnte. Da das Spielzeug keine Verstellmöglichkeiten aufweist, dient zur weiterführenden Arbeit ein Funktionsmodell aus durchsichtigem Acrylglas, bei dem der "Knauf" durch eine verschiebbare Führungshülse zur Aufnahme eines Filzstiftes ersetzt ist. So wird es möglich, verschiedene Ellipsen auf die Grundplatte zu zeichnen.

Aufbau des Modells:

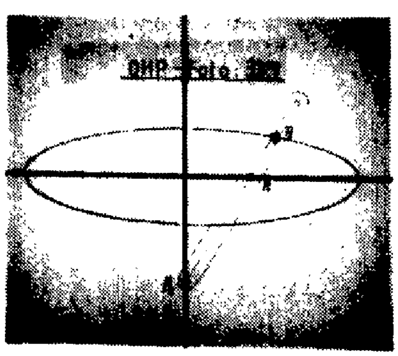

Abb. 3 a

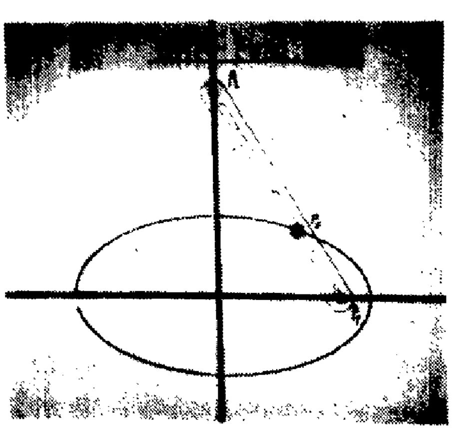

Abb. 3 b

Grundplatte mit eingefrästen Führungsnuten (Koordinatenkreuz). In ihnen gleiten Klötzchen, die mit einem Ende und der Mitte des "Kurbelarms" verbunden sind.

Gibt man auf einer Folie eine Zahlenebene mit Koordinatenkreuz vor und bringt sie unter das Modell auf den OHP, so können die Schüler die Gleichung der Ellipse über den Satz von Pythagoras und die Strahlensätze entdecken. Damit ist die Ellipseneigenschaft bewiesen und die Erkenntnis gewonnen: Eine Anordnung, wie sie in der "Klapsmühle" realisiert ist, kann zu Erzeugung von Ellipsen dienen.

Die Frage, ob sich nicht ebenfalls Ellipsen ergeben, wenn der Filzstift nicht außerhalb, sondern zwischen beiden Gleitklötzchen geführt wird, bringt eine Erweiterung des Funktionsmodells; der alte "Kurbelarm" wird ausgetauscht gegen einen anderen, bei dem die Gleitklötzchen an beiden Enden befestigt sind (vgl. Abb. 3 b).

Analog zum ersten Fall kann auch hier wieder die Gleichung der Ellipse gefunden werden. Nebenbei ergibt sich die Erkenntnis, daß der Kreis ein Sonderfall der Ellipse ist.

Das Modell wird weiter entwickelt, da sich folgende Probleme zeigen:
1. Die Halbachsen a und b sind nicht frei wählbar, da die Länge des "Kurbelarms" fest und damit (a+b) invariant ist. 2. Die Führungsnuten liegen im Zeichenfeld - sie sollen nun aus ihm heraus an die Ränder verlegt werden, was zum nächsten Funktionsmodell führt.

Aufbau des Modells:

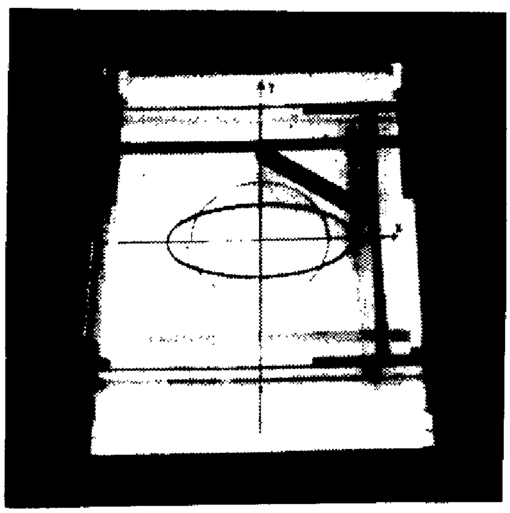

Abb. 4

Grundplatte mit eingefrästen Koordinatenachsen und aufmontiertem Rahmen. Jeweils zwei parallele Seiten des Rahmens enthalten Führungsnuten in gleicher Höhe. In ihnen verschiebbare "Gleitschuhe" führen zwei fest damit verlötete Messingstreifen parallel zu den Koordinatenachsen. Technisch sind so die störenden Führungsnuten an den Rand verlegt, die Mittelpunkte der Metallstreifen gleiten notwendigerweise über den Achsen, wobei diese mit einem an beiden Enden drehbar gelagerten Messingstreifen ("Kurbelarm") verbunden sind. In dem "Kurbelarm" ist ein Schlitz eingefräst, der eine verschiebbare Hülse enthält, die in der Projektion einen Ellipsenpunkt symbolisiert. So können auf Wand oder Tafel Ellipsen punktweise konstruiert werden.

Die Mechanik würde einen Zeichenstift behindern - es ist also eine andere technische Realisierung für die Führung der Mittelpunkte über den Koordinatenachsen zu finden. Hier bieten sich Kreisscheiben an, die in den Nuten geführt werden. Wegen der Kreiseigenschaft können ihre Mittelpunkte bei jeder Dreh- oder Schiebebewegung die Achsen nicht verlassen.

Es bleibt noch das Problem der freien Wählbarkeit der Halbachsen a und b. Die Lösung ist ein Langloch auf dem Durchmesser jeder Scheibe und ein "Klemmstein", der auch den Schreibstift trägt. Die Langlöcher gestatten dann eine Variation des Abstandes der Mittelpunkte, wobei der Klemmstein es ermöglicht, die Kreisscheiben gegeneinander zu arretieren; damit bleibt der Abstand der Mittelpunkte der beiden Kreisscheiben bei Bewegung des Systems konstant.

Diese Überlegungen führen zum letzten Funktionsmodell.

Aufbau des Modells:

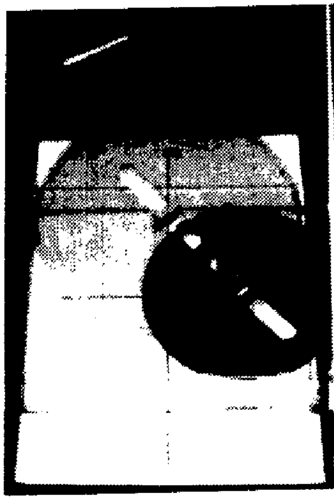

Abb. 5 a

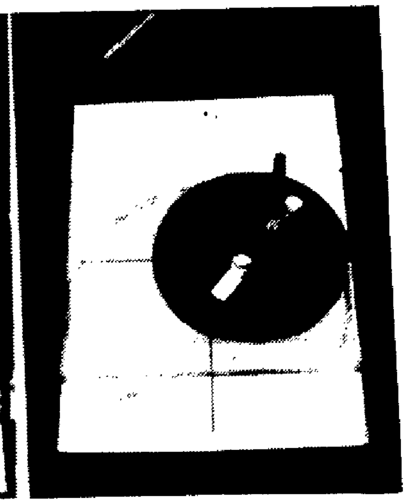

Abb. 5 b

Rechteckrahmen mit Nuten, die zwei verschiedenfarbige Kreisscheiben auf unterschiedlichen Ebenen rechtwinklig zueinander führen. Die in der oberen Ebene laufende Kreisscheibe hat einen Handgriff zum Bewegen. Beide enthalten übereinanderliegende Langlöcher, die den Kreisdurchmessern folgen. Ein gemeinsamer arretierbarer Klemmklotz kann in ihnen verschoben werden, ohne die Kreisscheiben zu bewegen. Er enhält auch ein Gewinde zur Aufnahme eines Tuschezeichners (Rapidograph) bzw. eine Steckvorrichtung für eine Führungshülse zur Aufnahme eines Filzschreibers für den OHP.

Die Lage der Mittelpunkte ist erkennbar und läßt sich durch kleine auflegbare Brücken noch verdeutlichen.

Die unterschiedliche Farbgebung der Kreisscheiben gestattet es, problemlos die Bewegung der Kreise separat zu verfolgen.

Das Modell ist leicht von der Version nach Abb. 3 b in die Version nach Abb. 3 a umzubauen (vgl. Abb. 5 a mit 3 b; Abb. 5 b mit 3 a).

Wir haben dieses Funktionsmodell "Ellipsenzirkel nach Haff" genannt, weil es in seinem konstruktiven Aufbau - bis auf die didaktisch notwendigen Veränderungen - baugleich ist mit dem Ellipsenzirkel "Ellipsograph Nr. 97" der Fa. Haff (vgl. Abb. 6).

Abb. 6