Günter GRAUMANN, Bielefeld

Eine genetische Einführung in die Trigonometrie

Genetisch nenne ich eine Unterrichtsweise, wie heutzutage üblich, wenn sie
- sich an der historischen Begriffsgenese orientiert
- die geistige Entwicklung der Lernenden berücksichtigt
- die Absicht verfolgt, den Sinn der Behandlung des Themas zu verdeutlichen.

Da eine ausführliche Analyse des Begriffs "genetisch" hier nicht möglich ist, möchte ich lediglich noch ein für unsere Zwecke passendes Zitat eines Mitbegründers der genetischen Methode, Otto Toeplitz, vortragen:

"Alle diese Gegenstände ..., die heute als kanonisierte Requisiten gelehrt werden, ... müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals, als sie geschaffen wurden. Wenn man an diese Wurzeln der Begriffe zurückginge, würden der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie würden wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen. Und von da aus würde sich dann ein doppelter Weg in die Praxis darbieten: entweder man könnte den Studenten direkt die Entdeckung in ihrer ganzen Dramatik vorführen und solcherart die Fragestellungen, Begriffe und Tatsachen vor ihnen entstehen lassen - das würde ich *die direkte genetische Methode* nennen -, oder man könnte für sich selbst aus solcher historischen Analyse lernen, was der eigentliche Sinn, der wirkliche Kern jedes Begriffs ist, und könnte daraus Folgerungen für das Lehren dieses Begriffs ziehen, die als solche nichts mehr mit der Historie zu tun haben - die *indirekte genetische Methode*." [O. Toeplitz, Das Problem der Universitätsvorlesungen ..., in: Jahresbericht der DMV 1927, S. 92/93]

In Bezug auf die Einführung in die Trigonometrie möchte ich mich der indirekten genetischen Methode anschließen. Allerdings sollte man dabei die wesentlichen historischen Fakten den Lernenden nicht verschweigen. Da hierfür sowie für die Vorbereitung der Lehrenden die Kenntnis der wesentlichen historischen Fakten von Wichtigkeit ist, möchte ich Ihnen zunächst einen kurzen Abriß der historischen Entwicklung geben. Ich beziehe mich dabei auf die übliche Sekundärliteratur, welche im wesentlichen zu Beginn unseres Jahrhunderts geschrieben wurde (vgl. Literaturverzeichnis).

Historischer Abriß

Erste Spuren in Richtung auf die Entwicklung einer Trigonometrie finden wir bei den Ägyptern vor etwa 4000 Jahren: Damit die Bekleidungssteine für eine Pyramide alle den gleichen Neigungswinkel erhielten, hat man das Verhältnis zweier Kanten festgelegt. Dieses Verhältnis, *Seqt* genannt, ist je nach Interpretation der Texte des Papyrus Rhind entweder der Cosinus oder der Tangens des Neigungswinkels. Eine entsprechende Vorstufe zur Trigonometrie stellen die Berechnungen der Seitenverhältnisse von ähnlichen Dreiecken bei *Thales* dar. Obgleich bei Thales der Begriff des Winkels zum ersten Mal exiplizit vorhanden ist, so fehlt ihm dennoch das Bewußtsein, daß durch die Seitenverhältnisse im gleichschenkligen bzw. rechtwinkligen Dreieck ein Maß für den Winkel gegeben ist. Gleiches gilt für die griechischen Mathematiker der klassischen Zeit. Erst bei dem Astronomen *Aristarch* (um 280 v. Chr.) kann man auf trigonometrische Berechnungen schließen. Bekannt von ihm sind Berechnungen bezüglich des Verhältnisses der Entfernungen Erde-Mond zu Erde-Sonne. Als Begründer einer eigentlichen Trigonometrie sieht man *Hipparch* (um 150 v. Chr.) an. Von ihm ist überliefert, daß er eine Schrift über die Kreissehnen in zwölf Büchern verfaßt hat. Die Schrift selbst ist heute nicht bekannt. Gleiches gilt für eine Schrift über die Kreissehnen in sechs Büchern von *Menelaus* (um 100 n. Chr.). Erhalten ist uns dann das astronomische und trigonometrische große Lehrgebäude in dreizehn Büchern des *Ptolemäus*, der sogenannte *Almagest*. In diesem schuf Ptolemäus (um 150 n. Chr.) für die Astronomie eine Trigonometrie von so vollendeter Form, daß sie über ein Jahrtausend lang nicht überboten wurde. Entgegen heutigen Gepflogenheiten befaßte sich Ptolemäus im wesentlichen mit der sphärischen Trigonometrie. Uns soll an dieser Stelle nur seine Einführung in die Trigonometrie interessieren: Er berechnet zunächst mittels Sätzen von Euklid das Verhältnis von Seite zu Radius eines einem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Drei-, Vier-, Fünf-, Sechs- bzw. Zehnecks. Danach beweist er den nach ihm benannten Satz über Sehnenvierecke, aus dem sich (in heutiger Sprechweise) der Differenz- und Summensatz sowie der Halbwinkelsatz für die Sinus- und Cosinusfunktion ableiten läßt. Unter Benutzung dieser Sätze und einer Abschätzung der Sehnen von $(3/2)^0$ und $(3/4)^0$ erstellt er dann eine Tabelle der Sehnen für 0^0 bis 180^0 in $(1/2)^0$-Schritten.

Die *Inder* haben diese Erkenntnisse von Ptolemäus laut einer Schrift aus dem vierten Jahrhundert übernommen, jedoch die Berechnung für die halben Sehnen durchgeführt. Wir haben damit unsere heutige Sinusfunktion am rechtwinkligen Dreieck im Unterschied zur Chordafunktion am gleichschenkligen Dreieck, wie sie von den Griechen verwendet wurde. Die *Araber* haben dann die Trigonometrie von den Indern und Griechen übernommen und weiterentwickelt. Im christlichen Abendlande des Mittelalters ist kaum eine Spur von trigonometrischen Kenntnissen nachweisbar. Erst im *12. Jahrhundert* dringen über Spanien die Kenntnisse der Araber nach Europa ein. Ein gewisser *Levi ben Gerson* findet zweihundert Jahre später (um 1340) den Sinussatz für beliebige Dreiecke. Und weitere hundert Jahre später entwickeln

Peurbach und *Regiomantanus* (1440 - 1470) die ebene Trigonometrie als eigenständiges Teilgebiet der Mathematik. Die Entwicklung der Goniometrie als eigenständigen Bereich mit algebraischen Umformungen geht auf *Vieta* (um 1580) zurück. Durch die Einführung der Logarithmen zu Beginn des 17. Jahrhunderts findet der rechnerische Teil dann eine weitere Verbesserung. Die heutige schöne und einfache Gestalt erhält die Trigonometrie schließlich um 1750 durch *Euler*.

Vorschlag für eine Unterrichtssequenz

Eine Begründung für die Einführung trigonometrischer Funktionen über die Astronomie ist in der Schule nicht angebracht; aber das folgende dahinterliegende Kernproblem sollte als ein Einstieg gewählt werden: An Körpern und Flächen lassen sich einerseits mittels des Satzes von Pythagoras viele genaue Berechnungen durchführen, andererseits kann man jedoch eine Reihe einfacher Dreiecke nicht berechnen, obgleich z.B. über die Kongruenzsätze die Konstruktion eindeutig ist.
Es wird bei der Analyse dieses Problems schnell deutlich, daß dabei immer ein oder zwei Winkel bekannt sind und daß man lediglich einige Probleme über die Ähnlichkeit und die Bestimmung von Streckenverhältnissen lösen kann (vgl. die Ägypter und Thales). Durch Kombination dieser beiden Aspekte wird man darauf geführt, daß bei ähnlichen Dreiecken die Seitenverhälnisse mit den Winkeln in Zusammenhang stehen. Da aber bei beliebigen Dreiecken die Variationsvielfalt zu unübersichtlich ist und andererseits bei dem gleichseitigen Dreieck und dem Dreieck aus dem halben Quadrat eine Variation des Winkels nicht mehr möglich ist, kommen fast selbstverständlich erst einmal die Dreiecke der "Mittelgruppe" im Haus der Dreiecke, nämlich die gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecke, ins Blickfeld. Man kann nun erst einmal das gleichschenklige Dreieck in den Vordergrund stellen, wie es der Historie entspricht. Dieses ist auch pädagogisch gesehen von Vorteil, da im wesentlichen ein Winkel hervorsticht und nur ein Seitenverhältnis auftritt. Aus Zeitgründen kann man sich aber auch gleich der Untersuchung des rechtwinkligen Dreiecks widmen. In jedem Fall ist unter Bezugnahme auf die Ähnlichkeit bzw. die Strahlensätze herauszuheben, daß das entsprechende Seitenverhältnis allein von der Größe des betreffenden Winkels abhängt, so daß die Definition einer Winkelfunktion auch wohldefiniert ist. Um die Logik der Begriffsgenese deutlich werden zu lassen und wegen des operativen Prinzips sollten gleich alle trigonometrischen Funktionen, aufgrund kombinatorischer Oberlegungen aller möglichen Seitenverhältnisse,

eingeführt werden. Dabei werden die ersten Zusammenhänge der Funktionen von selbst klar. Außerdem empfiehlt es sich, die historische Entstehungsgeschichte der Bezeichnungen für die trigonometrischen Funktionen einzufügen.
Als nächstes wichtiges Problem tritt aber nun die Frage auf, wie man die Werte trigonometrischer Funktionen berechnen kann; etwa über die Frage, woher die Programmierer von Taschenrechnern oder die Ersteller von Tabellen die Werte erhielten. Bei der Lösung dieses Problems wird man zunächst herausstellen, daß die trigonometrischen Werte für einen bestimmten Winkel ermittelt werden können, wenn die Seitenverhältnisse eines rechtwinkligen Dreiecks mit diesem Winkel bekannt sind. Hiernach ist es dann ein leichter Schritt, die regelmäßigen Figuren heranzuziehen. Entsprechend wie bei Ptolemäus werden dann anhand des halben gleichseitigen Dreiecks und Quadrates die üblichen Standardwerte ermittelt. Um das Prinzip klar zu machen, sollte man aber auch das regelmäßige Fünfeck für weitere Werte mit heranziehen. Hierbei wird dann auch die Grenze dieses Weges klar, so daß man sich nach anderen Lösungswegen umsehen muß. Die Entdeckung der Differenz-, Summen- und Halbwinkelsätze ist dabei sicherlich von den Lernenden allein nicht zu erwarten. Berichte über die Form und Beweisführung dieser Sätze bei Ptolemäus können dabei eine Hilfe sein. Die Anwendung dieser Sätze zur Bestimmung vieler Werte trigonometrischer Funktionen bis hin zu einer systematischen Tabelle bietet dann wieder vielfältige Möglichkeiten der selbständigen Entdeckung und Übung für die Lernenden.

Literatur

A.G. Kästner, Geschichte der Mathematik, Hildesheim 1970 (Org. 1796)
M. Cantor, Vorl. über Geschichte der Mathematik, Stuttgart 1965 (Org. 1880)
A. v.Braunmühl, Geschichte der Trigonometrie, Wiesbaden 1971 (Org. 1900)
J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, Leipzig 1903
S. Günther, Geschichte der Mathematik, Leipzig 1908
E. Hoppe, Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum, Heidelberg 1911
H. Wussing, Mathematik in der Antike, Leipzig 1961
O. Becker, Das mathematische Denken der Antike, Göttingen 1966
B.L. v.d.Waerden, Erwachsende Wissenschaft, Stuttgart 1966