Geometrie im Alltag

von Günter Graumann

Im Mathematikunterricht soll nicht nur in mathematische Inhalte und Denkweisen eingeführt werden, sondern es soll auch die Relevanz von Mathematik im Alltag anhand von Anwendungen vermittelt werden. Diese Aufgabe, die sich leichter anhört als sie wirklich ist, betrifft auch den Geometrieunterricht. Geometrie darf in der Vorstellung der Schüler und Schülerinnen nicht nur aus dem Betrachten von Formen und dem Beweisen von Sätzen bestehen. Beim Stichwort „Geometrie "sollten auch Assoziationen mit „Häuserfassaden" oder „Lampenformen" oder „Öltanks" oder „Deicherhöhung" auftreten. Der folgende Aufsatz möchte dazu anregen, in verschiedenen Lebensbereichen nach Themen für die Verbindung von Geometrie und Alltag zu suchen und Lebenssituationen für die Unterrichtspraxis aufzuarbeiten.

1. Konzeptionelle Grundgedanken

Ausgangspunkt meiner Überlegungen war die Frage nach der Relevanz des Mathematikunterrichts im allgemeinen und des Geometrieunterrichts im besonderen; d. h. die Frage nach dem *Sinn*, den die Behandlung eines bestimmten Themas für die Kinder hat. Für viele Lehrende mag diese Frage als Selbstverständlichkeit erscheinen, auf die man mit ein paar allgemeinen Bemerkungen antworten kann und die darüber hinaus ja schon über die Richtlinien abgeklärt wurde. Dagegen ist jedoch festzustellen, daß das Erreichen allgemeiner, nicht nur auf Kenntnisse und Fertigkeiten orientierter Lernzeile vielschichtige Überlegungen voraussetzt und neben der Auswahl der Unterrichtsinhalte im wesentlichen von der Art der Behandlung dieser Inhalte abhängt. Hierfür ist es wichtig, sich im Vorfeld der konkreten Unterrichtsvorbereitungen die grundlegende Konzeption einer Unterrichtseinheit klarzumachen.

Eine solche Grundposition – die selbstverständlich nur für einen Teil des Mathematikunterrichts konzipierend wirken kann – stellt der *Praxisorientierte Mathematikunterricht* dar, den ich vor 10 bis 15 Jahren als Reaktion auf den rein mathematisch orientierten Modernen Mathematikunterricht entwickelt habe. Die folgenden Erörterungen beziehen sich auf diese Grundposition (vgl. [3], [5], [6] und vor allem [4]). Ziel dieser Konzeption ist die Entwicklung von Erkenntnis, Bewußtsein und Handlungsfähigkeit des Menschen in der Auseinandersetzung mit seiner natürlichen und sozialen Umwelt. Die Relevanz des Mathematikunterrichts ist dabei im Rahmen der Bedeutung von Mathematik in der Lebenswelt (Alltag) zu suchen. Ausgangspunkt einer Unterrichtseinheit im Rahmen des "Praxisorientierten Mathematikunterrichts" sollte deshalb eine unmittelbar gegebene oder möglichst realitätstreu dargestellte *Situation der Umwelt* sein. In der Auseinandersetzung mit den Problemen dieser Situation werden dann die mathematisierbaren Aspekte herausgehoben und mittels vorhandener oder noch zu entwickelnder mathematischer Kenntnisse und Fähigkeiten gelöst. Danach wird die Ausgangssituation unter Beachtung der zwischenzeitlich erworbenen Einsichten erneut beurteilt, wobei nicht nur die mathematisierbaren Aspekte berücksichtigt werden; manchmal ist gerade das Erkennen der Grenzen der Mathematisierbarkeit das Wesentliche.

2. Zur Konzeption von Geometrieunterricht

Die hier dargestellte konzeptionelle Grundposition paßt nicht zu einem an Fachsystematik orientierten Geometrieunterricht, bei dem Sätze und Beweise im Vordergrund stehen. Zur Erläuterung meiner Vorstellungen über Geometrieunterricht möchte ich etwas weiter ausholen.

Leider wird die Geometrie in der Schule immer noch stiefmütterlich behandelt, obgleich gerade in Deutschland die Bedeutung des Geometrieunterrichts von vielen Didaktikern in letzter Zeit wieder hervorgehoben wurde. Der Grund für die Vernachlässigung der Geometrie in der Schule mag darin liegen, daß einerseits die Geometrie nicht so einfach zu erlernen ist wie irgendwelche Rechenalgorithmen – dies betrifft sowohl die Lernfähigkeit der Kinder als auch die inhaltlichen Kenntnisse und methodischen Fähigkeiten der Lehrenden – und andererseits, daß das Problem der systematischen Darstellung auf Schulniveau nicht gelöst werden konnte. Das zuletzt genannte Hindernis läßt sich meiner Meinung nach dadurch überwinden, daß man die Orientierung an einer von Mathematikern entwickelten Systematik – sei es nun die von Euklid, Hilbert, Bachmann oder sonst jemand – einfach aufgibt. Das Überbordwerfen der Orientierung an irgendeiner Fachsystematik ist m. E. kein Verlust, denn das Ziel des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen sollte ja nicht die Vermittlung der Ergebnisse mathematischer Forschungen, d.h. die Vorwegnahme eines Teils mathematischer Studien, sein. Vielmehr müssen wir nach den allgemeingültigen Aspekten der Beschäftigung mit Mathematik Ausschau halten.

2.1 Begründung für Geometrie in der Schule

Unter Besinnung auf die allgemeinen Erziehungsziele der Schule und die Spezifika der elementaren Geometrie möchte ich folgende fünf Aspekte nennen, die eine Beschäftigung mit Geometrie in der Schule sinnvoll erscheinen lassen:

– Geometrie als *Begriffsapparat*, mit dem wir die räumliche Umwelt besser verstehen und strukturieren können und der zur Veranschaulichung sowie als kommunikatives und heuristisches Medium verwendet werden kann.

Im Rahmen der allgemeinen Sprach- und Denkentwicklung spielen auch geometrische Begriffe einschließlich deren Zusammenhänge eine gewisse Rolle. Im Laufe der gesamten Schulzeit müssen gewisse geometrische Begriffe und deren Zusammenhänge entwickelt und präzisiert werden, und es muß deren Verwendung bei Veranschaulichungen, in der Umgangssprache und beim Lösen von Problemen aufgezeigt und geübt werden.

- Geometrie zur *praktischen Nutzung im Alltag* (einschließlich Technik und Wissenschaft). Dieser pragmatische und praxisorientierte Aspekt soll im folgenden näher ausgeführt werden.
- *Geometrie als Kulturgut*, d. h. als Erkenntnisgegenstand, der in bestimmten Situationen und bei bestimmten Fragestellungen entstanden ist und Auswirkungen auf unsere Welt und unser Weltbild gezeitigt hat.

Die Entstehung von Kalendern und Ornamentik in der frühen Menschheitsgeschichte, unsere Zeit- und Winkeleinteilung aufgrund des babylonischen Sexagesimalsystems oder die Rolle von Quadrat und regelmäßigem Dreieck bei Kirchengrundrissen im Mittelalter sind Beispiele für die kulturelle Bedeutung der Geometrie. Aber auch die fundamentale Rolle der Geometrie bei der Entstehung der Wissenschaften und das Phänomen, daß der menschliche Geist durch Umweltprobleme zu rein theoretischen Fragen angeregt werden kann, gehört zu diesem kulturellen Aspekt.

- Geometrie als Medium zum Erreichen *allgemeiner Lernziele* und intellektueller Kompetenzen insbesondere im Bereich der Perzeptions- und Problemlösefähigkeit in komplexen Feldern, des Anschauungsvermögens, der Argumentationsfähigkeit, der Kreativität, des Selbstvertauens und des ästhetischen Empfindens.

Das Wiedererkennen bestimmter Figuren und Muster in komplexen Figurationen und das Auffinden logischer Verflechtungen zwischen geometrischen Begriffen ist ein wesentliches Moment der elementaren Geometrie, welches exemplarisch für viele Situationen in den postmodernen wissenschaftlichen Fragen steht. Aber schon das einfache räumliche Anschauungsvermögen und die Argumentationsfähigkeit an anschaulichen Objekten stellen wichtige allgemeine Lernziele dar. Hierfür und ebenso für die Förderung von Kreativität, Selbstvertrauen und ästhetischem Empfinden ist die Geometrie ein geeignetes Übungsfeld (neben anderen).

- Geometrie als Betätigungsfeld zur Entfaltung bestimmter *Spieltriebe* und zur Entwicklung von *Freude an Mathematik*.

Wegen der Anschaulichkeit und des schon bei Grundschulkindern vorhandenen Sinns für Symmetrie und Ornamentik und wegen des oftmals direkten Zugangs zu einzelnen Problemen, bietet die Geometrie insbesondere die Möglichkeit den spielerischen und spaßbetonten Aspekt der Mathematik herauszustellen. Fördernd wirkt in dieser Hinsicht auch die Möglichkeit der Erstellung von sichtbaren Produkten.

Wie diese fünf Aspekte zu sinngebenden Geometriekursen verbunden werden können, kann hier nicht weiter ausgeführt werden. Abschließend sei die folgende These formuliert:

Die vordringliche Aufgabe des Geometrieunterrichts an allgemeinbildenden Schulen ist die Bildung gesicherter und aspektreicher geometrischer Begriffe sowie die Entwicklung von Fähigkeiten zum Erkennnen von Beziehungen und zum Lösen von Problemen mittels geometrischer Erkenntnisse.

2.2 Der Aspekt "Geometrie im Alltag" in der Schule

Im *traditionellen Raumlehreunterricht* der Volksschule bzw. der Hauptschule lag das Schwergewicht auf der Anwendung geometrischer Erkenntnisse und Berechnungen im Alltag, allerdings eingeschränkt auf den Alltag einer bestimmten Schicht (vor allem den Berufsalltag von Handwerkern). Auch ging die Zielsetzung in der Regel nicht über den Erwerb eines gewissen Anschauungsvermögens und die Fähigkeit, Formeln anzuwenden, hinaus.

Im *traditionellen Gymnasium* wurde der Aspekt der praktischen Nutzung von Geometrie im Alltag so gut wie gar nicht berücksichtigt, da das Ziel des Gymnasiums in der formalen Bildung und der Wissenschaftspropädeutik lag und deshalb an dem Bild der zweckfreien Mathematik der Griechen (vor allem Platons und Euklids) anknüpfte. Im Rahmen der Angleichung aller Schulformen und der Orientierung am strukturellen Denken im *Modernen Mathematikunterricht* Anfang der 70er Jahre ist dann der Aspekt der praktischen Nutzung von Geometrie im Alltag größtenteils auch in der Hauptschule verloren gegangen.

In den *letzten zwölf Jahren* wurde die Bedeutung des Umweltaspektes für den Geometrieunterricht erneut diskutiert und hervorgehoben. Mit der Abkehr vom rein strukturmathematisch orientierten Modernen Mathematikunterricht seit Ende der 70er Jahre haben dann Umweltbezüge auch Eingang in den Geometrieunterricht aller Schularten gefunden. Allerdings sind Umfang und Stellenwert recht unterschiedlich.

Als *Begründungen für die Einbeziehung von Umweltaspekten in den Geometrieunterricht* findet man etwa folgende: Erstens bieten Hinweise auf umweltliche Situationen eine gute Motivation zur Behandlung geometrischer Fragestellung; zweitens stellen umweltliche Präsentationen die erste Stufe zur Erschließung der Geometrie dar; drittens wird durch die Einbeziehung umweltlicher Aspekte eine breitere Fundierung der geometrischen Begrifflichkeit, eine stärkere Konzentration auf die substantiellen Inhalte sowie eine bessere Förderung der Intuition und der Flexibilität erreicht; viertens stellen umweltorientierte Anwendungsaufgaben ein geeignetes Feld zum Zwecke der Übung und Vertiefung geometrischer Begriffe und Formeln dar; fünftens zeigen die Anwendungen im Alltag die Relevanz vorher gelernter geometrischer Erkenntnisse auf; sechstens ist die Bewältigung von Umweltproblemen mittels Geometrie konstituierendes Element des Geometrieunterrichts. (Vgl. auch die Begründungen zur "Umwelterschließung im Geometrieunterricht" von H. Winter in [11]).

In dem von mir hier vertretenen *"Praxisorientierten Geometrieunterricht"* ist der Umweltaspekt der Kernpunkt des Geometrieunterrichts. Geometrie stellt in dieser Konzeption im Sinne der Zielsetzung des "Praxisorientierten Mathematikunterrichts" ein Hilfsmittel (tool) zur Bewältigung des gegenwärtigen und zukünftigen Lebens dar. Die methodische Richtschnur ist die Beschäftigung mit einer realen oder realitätstreuen Situation bzw. einem Fragenkomplex des Alltags. Der Erwerb und die Klärung geometrischer Tatbestände sollte dabei teils vorher teils während der Beschäftigung mit dem Thema stattfinden.

In Bezug auf die Entwicklung der geometrischen Begriffe stellt der Ansatz von Bender und Schreiber (vgl. etwa [1] oder [2]) eine recht gute Ergänzung meiner Konzeption dar. Als übergeordnetes Ziel formulieren sie die "Strukturierung des wirklichen Raumes und Erforschung der Nutzbarkeit dieser Struktur"([2], S. 207), wobei sie nach dem von ihnen sogenannten *"Prinzip der operativen Begriffsbildung (POB)"* vorgehen, welches wie folgt lautet: "Geometrische Begriffe sind operativ zu bilden, d. h.: Von bestimmten Zwekken ausgehend, werden Normen zur Herstellung von Formen entwickelt, die jene Zwecke erfüllen. Die Normen, zumeist Homogenitätsforderungen, werden in Handlungsvorschriften zu ihrer exhausitiven Realisierung umgesetzt und sind damit inhaltliche Grundlage der ihnen entsprechenden Begriffe" ([2], S. 26). Als Beispiele solcher zweckbedingten Formen, werden von ihnen u. a. die runden Formen (wie Kreis, Zylinder, Kugel) für alle rollenden bzw. rotierenden Bewegungsvorgänge, die homogenen Polyeder (wie Würfel, Ikosaeder, Rhombendodekaeder) für gleichwahrscheinliche Ereignisse bzw. Ballherstellung und die spiraligen Formen (wie archimedische Spirale, logarithmische Spirale, Schraubenlinie, Wendefläche) für rotierende nach außen oder oben strebende Bewegungen bzw. Transportsysteme genannt.

Solche Überlegungen zur Funktionalität einzelner geometrischer Formen vertiefen zunächst die Begrifflichkeit bei gleichzeitigem Aufzeigen der Relevanz von geometrischen Betrachtungen für die Umwelt. Bei weiterer Einlassung auf diejenigen Alltagssituationen, durch die bestimmte Funktionsweisen vorgegeben sind, wird man dann zum Aspekt der praktischen Nutzung von

Geometrie im Alltag geführt. Ganz im Sinne ihres übergeordneten Zieles kommen daher auch Bender und Schreiber zu Überlegungen, die meiner oben skizzierten Konzeption nahe kommen: "Am reinsten zu verwirklichen wäre das POB, wenn Schüler in Problemsituationen gebracht werden könnten, in denen sie die Probleme durch Bildung geometrischer Begriffe mit Herstellung und Anwendung geometrischer Formen zu lösen hätten"([2], S. 191).

3. Alltagssituationen mit geometrischem Gehalt

Wie ich oben schon erwähnt habe, müssen die Lehrenden die einen Geometrieunterricht im Sinne der dargelegten Konzeption planen und durchführen wollen, einen Blick dafür gewinnen, welche Alltagssituationen wesentliche geometrisierbare und mittels Geometrie lösbare Aspekte enthalten. Das geschieht am besten dadurch, daß man zunächst in seinem persönlichen Alltag und beim Studieren von Literatur auf Anregungen achtet. Eine Reihe von inhaltlichen und methodischen Anregungen bieten die Hand- und Lehrbücher des traditionellen Raumlehreunterrichts, sofern die Veränderungen der Lebenswelt und die über den traditionellen Raumlehreunterricht hinausgehenden Zielsetzung des "Praxisorientierten Geometrieunterrichts" berücksichtigt werden. In gleicher Weise können auch einzelne neuere Veröffentlichungen als Anregung genutzt werden. Beispielsweise schreibt Profke: "Auch im Alltag stößt man immer wieder auf geometrische Sachverhalte: Basteln, Heimwerken, Landkarten, Richtungsverhalten im Verkehr, Verkehrszeichen, Verpackungen aller Art, Firmenzeichen" ([10], S. 27).

Weiterhin findet man in dem gleichen Artikel eine lange Reihe von Stichwörtern aus der Umwelt, zugeordnet zu Inhalten des Geometrieunterrichts der Sekundarstufe I. Allerdings geht der Verfasser dabei so vor, daß zu den nach der Fachsystematik geordneten geometrischen Begriffen jeweils einzelne Stichwörter aus der Umwelt genannt werden. Dieses Vorgehen entspricht ganz dem Ansatz des sog. Anwendungsorientierten Mathematikunterrichts, bei dem die Fachsystematik weiterhin die Leitlinie für den Unterricht darstellt. Der Umweltbezug wird dann -stückweise bezogen auf den jeweils behandelten Teil der Mathematik- in Form von Anwendungsaufgaben hergestellt. In dem hier von mir vertretenen "Praxisorientierten Mathematikunterricht" dagegen soll die Lebenswelt das konzipierende Element sein, d. h. reale oder zumindest realitätstreue Situationen in ihrer Ganzheit stehen am Anfang. Die Bewältigung von Problemen in solchen Situationen mit Hilfe von Mathematik bzw. die Frage, wie Mathematik bei solchen Problemen hilfreich sein kann, ist dann die Leitlinie des Unterrichts.

3.1 Liste von Situationen für den "Praxisorientierten Geometrieunterricht"

Da es für viele Lehrende des Faches Mathematik aufgrund ihrer Ausbildung und aufgrund der Vorgaben durch den Lehrplan ungewohnt ist, in der vorgestellten Weise zu denken, möchte ich im folgenden eine Liste von Situationen für einen praxisorientierten Geometrieunterricht vorstellen. Diese Liste kann selbstverständlich den Anspruch der Vollständigkeit nicht erheben, dennoch habe ich mich bemüht, möglichst viele Bereiche des Alltags zu streifen. In Anlehnung an Kategorien der Soziologie könnte man nach den Bereichen Beruf, Gemeinwesen, Familie und Freizeit unterteilen; hier erschien mir eine etwas davon abweichende Unterteilung passender (s. Kasten, Seite 11).

3.2 Erläuterung einzelner Alltagssituationen

Hausgrundrisse: Eine Familie plant, ein Haus zu bauen. Von einem Architekten läßt sie sich mehrere Grundrißpläne geben. Sie analysiert diese im Hinblick auf die eigenen Wünsche und stellt daraufhin einen eigenen Grundrißplan auf.

Als mathematische Aktivitäten kommen in jedem Fall dabei insbesondere das Lesen und Berechnen von Längen- und Flächenmaßen sowie das Erkennen von Formverhältnissen und deren Umsetzung in Raumvorstellungen vor.

Fassaden: Die Fassade eines Siedlungshauses soll neu gestrichen werden. Die Eigentümerin läßt sich vom Maler ein Angebot machen. Der Maler muß dazu die zu streichende Fläche, seine Arbeitskosten und die Kosten für das Aufstellen eines Gerüstes berechnen.

Eine andere Situation im Zusammenhang mit den Stichwort "Fassade" wäre das Entwerfen einer Fassade, die eine Lücke zwischen zwei historischen Gebäuden schließen soll. Neben den künstlerischen Fähigkeiten werden hierbei als geometrische Aktivitäten vor allem die Formanalyse und das Konstruieren verschiedener Formkompositionen angesprochen. (Vgl. dazu **Abb. 1**).

Moderne Fassade zwischen Gotik und Jugendstilelementen geplant.

Abb. 1

Alle Dreiecke sind im Räumlichen gleichseitig

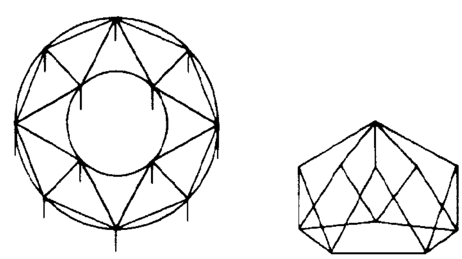


Abb. 2

Lampenformen: Ein Designer einer Lampenfirma hat die Aufgabe, neue Lampen für einen Kongreßsaal zu entwerfen. Er betrachtet und analysiert dazu erst einmal Lampen in verschiedenen ihm zugänglichen Sälen und stellt dann einige Entwürfe her (vgl. dazu **Abb. 2**). Die geometrischen Aktivitäten betreffen hierbei vor allem die räumlichen Formen.

Waldgebiete: Im Rahmen einer Untersuchung über das Waldsterben muß die Größe mehrerer Waldgebiete nach unterschiedlichem Baumbestand und nach der durchschnittlichen Stärke des Waldsterbens geordnet ermittelt werden.

Edelsteinformen: Während einer Klassenreise in das Moselgebiet wurde auch eine Edelsteinschleiferei in Idar-Oberstein besucht. Bei der Nacharbeitung der Klassenreise setzten sich die Schüler und Schülerinnen mit den verschiedenen geometrischen Formen, nach denen Edelsteine geschliffen werden, sowie dem kristallinen Aufbau verschiedener Stoffe auseinander.

Öltanks: Eine Firma für Heizöltanks plant Batterietanks für Hauskeller. Die Form eines solchen Batterietanks ist aus herstellungstechnischen Gründen eine Säule, deren Querschnitt aus einem Rechteck mit an beiden Enden aufgesetzten Halbkreisen besteht. Die Breite soll 80 cm nicht überschreiten, damit der Tank durch die Kellertür transportiert werden kann. Die Höhe sollte 1,70 m und die Länge 2 m nicht überschreiten. Es wird nach Maßen gesucht, so daß ein Tank ein wenig mehr als 2000 l faßt. Weiterhin wird in der Mitte oben ein Meßstab mit einem Schwimmer eingefügt, wobei die Schwimmerhöhe proportional zum Winkel der Anzeigenadel ist. Der maximale Anschlag der Nadel beträgt 120°. Wie sind die Striche für jeweils 100 l zu verteilen?

Säulenwerbung: Eine Werbeagentur vermietet für jeweils zehn Tage Plakatwerbung an den Litfaßsäulen in ihrer Stadt. Für die verschiedenen Plakatformate muß der jeweilige Preis ermittelt werden, und es muß überlegt werden, wie die Anordnung der Plakate die Säulenfläche am besten ausnutzt.

Werbedesigns: Eine Werbeagentur hat die Aufgabe, für verschiedene Firmen Ornamente für die Verpackung und die Firma kennzeichnende Symbole zu entwerfen.

Ein anderes Problem in diesem Zusammenhang wäre das Programmieren von dynamischen geometrischen Mustern, wie sie im Werbefernsehen oft zwischen zwei Werbebeiträgen vorkommen.

Weitere Themen (wie etwa "Tapezieren", "Wege-Pflasterungen", "Getränketüten", "Sonnenuhren" oder "Autobahnkreuze") kann man in der allgemein bekannten fachdidaktischen Literatur und in Schulbüchern für Berufsschulen finden.

Die Auswahl eines Themas für eine bestimmte Klassensituation erfordert dann natürlich noch einige weitere Überlegungen. Insbesondere müssen die sachlichen und mathematischen Vorkenntnisse der Schüler und Schülerinnen berücksichtigt werden. Damit meine ich jedoch nicht, daß alle zur Lösung der Problematik notwendigen Kenntnisse und Fähigkeiten schon vorher vorhanden sein müssen. Vielmehr läßt sich der Sinn von Mathematik – und hier im praxisorientierten Ansatz der Werkzeugcharakter von Mathematik – viel besser vermitteln, wenn einzelne zur Lösung wichtige mathematische Begriffe und Sätze in enger Verbindung mit der Lösungsfindung entwickelt werden, wie es u. a. auch mit der

Situationen für den praxisorientierten Geometrieunterricht

Handwerk und Planung	
– Hausbau:	Dach ausbauen, Hausgrundrisse planen, Fassaden renovieren
– Wohnungseinrichtung:	Tapezieren, Möbelverteilung planen, Lampenformen entwerfen, Verdunster erneuern
– Gartenpflege:	Wege pflastern, Beete bepflanzen, Rasen sprengen, Gartenhaus bauen
– Landschaftsplanung:	Wanderwege einrichten, Land vermessen, Waldgebiete berechnen
– Kunsthandwerk:	Schmuckformen entwerfen, Edelsteinformen analysieren, Ornamente malen
Industrie	
– Metallverarbeitung:	Getriebe und Wellen konstruieren, Kugel- und Rollenlager vergleichen, Rohrleitungsformen und -dicken berechnen, Meßstab für Öltanks ermitteln
– Autoherstellung:	Aerodynamische Formen entwickeln, Hubraum von Motoren vergleichen, Scheinwerfer testen, Transportwege optimieren, Bewegungen von Industrierobotern programmieren
– Verpackungen:	Kartonherstellen, Verpackungsgrößen vergleichen, Verpackungsformen entwerfen, Abfall beim Stanzen von Formen berechnen
Handel und Verkehr	
– Vertrieb:	Möbelwagen beladen, Getränketüten stapeln, Container verladen
– Werbung:	Säulenwerbung verwalten, Papierkosten verschiedener Formate berechnen, Werbe-Designs entwerfen
– Verkehr:	Stadtpläne und Landkarten herstellen, Flugrouten vergleichen, Küstenschiffe navigieren, Fahrradkonstruktionen analysieren
Staat	
– Kommune:	Sporthalle bauen, Bebauungsplan zeichnen, Versorgungsleitungen legen
– Bund und Land:	Autobahnkreuze planen, Tunnel bauen, Deiche erneuern, Stausee vermessen und kalkulieren, Sonnenkraftwerk planen
Kultur	
– Kunst und Architektur:	Kulissen auf einer Theaterdrehbühne planen, Kirchenbauten analysieren, Häuserfassaden zeichnen
– Populärwissenschaftliche Fragen:	Schattenfiguren und Sonnenuhren analysieren, Kalender und Planetenbahnen berechnen, Blattoberflächen von Pflanzen berechnen und vergleichen, gebogene Spiegel analysieren
Privates	
– Hobby:	Modelle bauen, Intarsienarbeiten herstellen, Drachen bauen, Muster stricken
– Urlaub:	Koffer im Auto verstauen, Entfernungsmesser am Fahrrad testen, Steigungen von Wanderwegen oder Straßen berechnen
– Spiele:	Billard spielen, geometrische Puzzles lösen, Computerspiele programmieren

genetischen Methode angestrebt wird (vgl. etwa [8]). Einschränkend muß allerdings gesagt werden, daß die wichtigsten Vorkenntnisse und Fähigkeiten schon vorhanden sein müssen; auch wird man nicht immer während des Problemlöseprozesses neue Begriffe oder Sätze entwickeln können. Für die Vermittlung der Relevanz von Mathematik wäre es allerdings schon hilfreich, wenn man von Zeit zu Zeit so vorgehen würde.

4. Aus der Unterrichtspraxis

Als Anregung und zur Verdeutlichung der methodischen Ausgestaltung von Geometrieunterricht im Sinne der hier dargestellten Konzeption seien abschließend drei in der Schule erprobte Unterrichtseinheiten vorgestellt. Die Themen entstammen den Bereichen "Handwerk und Planung", "Industrie", und "Staat". Die Unterrichtseinheiten wurden von Studierenden des Lehramtes der Sekundarstufe I gemeinsam mit mir im Rahmen der schulpraktischen Studien entwickelt und durchgeführt.

4.1 Dachausbau

Diese Unterrichtseinheit wurde in einem Grundkurs eines 8. Schuljahres einer Hauptschule in sieben aufeinanderfolgenden Mathematikstunden realisiert.

In der *1. Stunde* wurde die die Einheit bestimmende Lebenssituation vorgestellt und diskutiert. Es begann mit dem Lehrerhinweis "Wir wollen uns in den nächsten Stunden mit einem Problem der Familie Bernstein beschäftigen". Danach wurde ein Text für ein Rollenspiel mit sieben Personen (Vater, Mutter, 2 Söhne, 3 Freunde) und einem Sprecher ausgegeben. In diesem Rollenspiel wurden zunächst die Konflikte zwischen den beiden Söhnen der Familie Bernstein in den beengten Wohnverhältnissen (nur ein Zimmer für die beiden halbwüchsigen Jungen) dargestellt. Danach wurde in einem Gespräch zwischen Vater und Mutter allein angedeutet, daß eine Lösung der Konflikte möglicherweise durch den Ausbau des Dachbodens gefunden werden könnte. Nachdem die Schüler und Schülerinnen den Text zunächst einmal gelesen hatten, wurde er dreimal (jeder wurde auf diese Weise einmal aktiv beteiligt) mit verteilten Rollen gelesen bzw. gespielt. Anschließend diskutierten die Schüler und Schülerinnen darüber, wie die Geschichte wohl weitergehen könnte. Es wurde festgestellt, daß die Familie nun gemeinsam den Ausbau des Dachbodens planen und den Ausbau aus finanziellen Gründen in Selbstarbeit durchführen wird. Hierbei gingen Erfahrungen aus dem eigenen häuslichen Milieu mit ein. Außerdem konnte auch herausgearbeitet werden, daß eine Vorplanung und Kostenüberschlagsberechnung vor Beginn der Arbeiten wichtig ist. Es wurde ein Arbeitsplan mit folgenden Punkten erstellt: Elektrische Leitungen, Wärmedämmung, Verkleidung, Fenster, Heizung, Tapezieren, Fußboden, Möbel. Dabei wurde klar, daß bei der Kostenüberschlagsrechnung die Isolierung und Verkleidung den wesentlichen Punkt ausmachen.

Zum Abschluß der Stunde wurden noch verschiedene Dachformen behandelt. Die Lehrperson teilte dabei mit, daß die Familie Bernstein ein halbes Walmdachhaus beitze.

[Dieser hier vorgestellte Fall war zwar von den Lehrenden fingiert, zur besseren Einführung der Kinder in der Situation wurde jedoch so getan, als ob der Fall existiere. Da hier eine wirklich realitätstreue Situation vorlag – was auch die Reaktion der Kinder bestätigte – halte ich dieses Vorgehen für erlaubt.]

Als Hausaufgabe erhielten die Kinder den Auftrag, ein Pappmodell von einem Walmdach herzustellen.

In der *2. und 3. Stunde* wurden zunächst die zu Hause erstellten Modelle kurz vorgestellt, und es wurde an die in der ersten Stunde diskutierte Situation der Familie Bernstein erinnert. Dann wurde das angeschnittene Problem der Verkleidung der Wände und des Fußbodens ausführlich behandelt. Als mathematisches Problem ergab sich dabei neben der Erstellung von Rechenbäumen die Berechnung der Oberfläche eines halben Walmdachkörpers (vgl. dazu **Abb. 3**).

Die Lösung wurde gruppenweise erarbeitet, wobei sich zum Teil verschiedene Lösungswege ergaben. Diese wurden zum Schluß der 3. Stunde gemeinsam besprochen.

[Es stellte sich dabei heraus, daß viele Schüler und Schülerinnen Schwierigkeiten mit den Formeln für Rechtecks- und Dreiecksflächen hatten. Allerdings wurde eine allgemeine Wiederholung nicht vorgenommen, denn die Kinder sollten lernen, möglichst selbständig mit der Gesamtproblematik umzugehen, was durch die Gruppenarbeit mit Betreuung jeder Gruppe durch einen Studenten bzw. eine Studentin auch möglich war. Dabei kamen auch individuelle und teils "unorthodoxe" Lösungen zu Tage, die ebenso wie die anderen vorgestellt und diskutiert wurden.]

In der *4. Stunde* wurde auf den Einbau eines Heizkörpers eingegangen. Da die Größe, und damit auch der Preis, wesentlich vom Volumen des Dachraumes abhängt, trat die Volumenberechnung als nächstes Problem auf. Hierfür waren vier Modelle aus Kunstmoos vorbereitet worden (für Gruppenarbeit). Die Schüler kamen nun von selbst darauf, den Walmdachkörper in Teilkörper zu zerlegen. Dies konnte dann

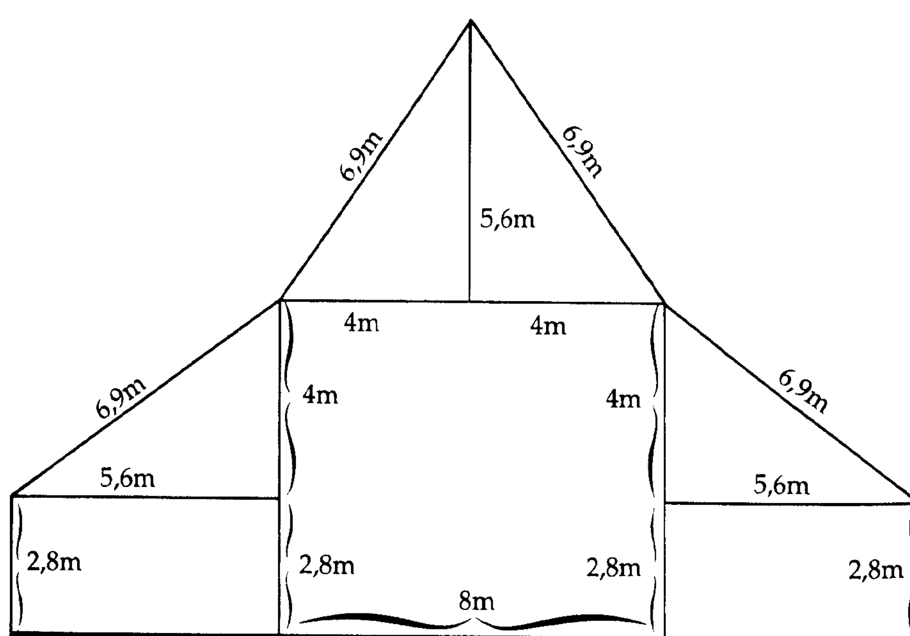


Abb. 3: Skizze zur Berechnung der Oberfläche eines Walmdachkörpers

auch von den Schülern selbst vorgenommen werden, da sich das Kunstmoos leicht mit einem Messer zerschneiden läßt. (Die Studierenden hatten hierfür jeder ein großes Messer mitgebracht, welches sie solange in ihrer Aktentasche versteckt gehalten hatten.) Es wurde dann der Mittelkörper, eine Dreiecksäule, berechnet. Bei den Spitzkörpern überlegten und probierten die Schüler lange, bis sie darauf kamen, diese Körper noch einmal zu halbieren und drei Hälften davon zu einem Quader zusammenzulegen.

[Dieses Verfahren geht nur mit quadratischen Pyramiden, bei denen die Höhe gleich der halben Kantenlänge ist, wie in unserem Beispiel. Es war auch nicht das Ziel die noch nicht bekannte Pyramidenformel herzuleiten, sondern es ging zunächst einmal um die Lösung des konkreten Problems, welches durch unsere Zahlenvorgaben eine Lösung auf diesem Wege erlaubte. Die allgemeine Pyramidenformel wurde dadurch vorbereitet, und es wurde eine Vorstellung für die Bedeutung einer solchen Formel, die in einem späteren Unterricht erarbeitet wurde, angebahnt.]

In der *5. und 6. Stunde* wurden dann die Volumenberechnungen zu Ende geführt, und es wurde die Gesamtproblematik unter Zusammenfassung der bisherigen Berechnung und der Abschätzung der sonstigen Kosten abschließend behandelt.

In der *7. Stunde* wurde eine Klassenarbeit zu dieser Unterrichtseinheit geschrieben. Sie bestand aus vier Aufgaben. In der ersten Aufgabe mußten zeichnerisch gegebene Gebäudeformen aus der Umwelt (Siegerpodest, Gewächshaus, Kirchturm) mit Hilfe der geometrischen Begriffe "Würfel", "Quadratsäule", "Rechteckssäule", "Dreieckssäule", "Pyramide" beschrieben werden. In der zweiten Aufgabe ging es um die Volumenberechnung einer Streichholzschachtel. In der dritten Aufgabe sollte das Netz der Cheopspyramide im Maßstaab 1:4000 gezeichnet und die Oberfläche berechnet werden. Die vierte Aufgabe knüpfte an die Situation der Familie Bernstein an. Eine der trapezförmigen Dachseiten muß neu gedeckt werden. Die Fläche und daraus die Anzahl der Dachpfannen war zu berechnen.

Das Ergebnis der Klassenarbeit entsprach dem auch sonst üblichen Mittelwert bei Mathematikarbeiten. Es fiel jedoch auf, daß einige Schülerinnen gegenüber früheren Klassenarbeiten wesentlich besser abschnitten, während einige andere Schüler und Schülerinnen schlechter abschnitten. Eine genauere Untersuchung dieses Phänomens war uns jedoch nicht möglich.

4.2 Form und Inhalt von Verpackungen

Diese Unterrichtseinheit orientiert sich nicht an einer räumlich und zeitlich begrenzten Situation, sondern an der Frage nach der funktionellen bzw. werbetechnischen Form von Verpakkungen. Sie wurde einmal in einem 9. Schuljahr und ein zweites Mal parallel in einem Ergänzungskurs und einem Grundkurs eines 8. Schuljahres einer Hauptschule durchgeführt. Im zweiten Fall standen uns jeweils sieben Mathematikstunden zur Verfügung.

In der *1. Stunde* wurden verschiedene Konsumgegenstände auf dem Lehrertisch aufgebaut und die Schüler zu Klasseneinteilungen (z. B. nach Material, Größe, Preis, Form) aufgefordert. Danach wurde auf die Formen besonders eingegangen.

[In dieser Stunde wurden die Schüler mit den in der gesamten Einheit vorkommenden Gegenständen vertraut gemacht. Außerdem wurde das Formverständnis differenziert.]

In der *2. Stunde* wurde das Volumen von quaderförmigen und zylinderförmigen Waschmittelkartons berechnet (Außenvolumen). Die Frage dabei war, ob bei gleicher Gewichtsangabe auch gleiche Volumina vorliegen.

In der *3. Stunde* wurde im Zusammenhang mit dem Problem der Pappmenge (Herstellerproblem) die Oberfläche der Kartons berechnet.

In der *4. Stunde* stand das sog. "Mogelpackungen"-Problem im Vordergrund. Das äußere Volumen wurde mit dem Volumen, das das Waschmittel im Inneren einnimmt, verglichen. Das entsprechende Problem wurde auch bei einer Creme-Dose behandelt, bei der der Unterschied zwischen Sein und Schein besonders groß war.

In der *5. Stunde* wurde das Volumen einer Motoröl-Dose mit der Form des Kegelstumpfes berechnet.

[Die Kegelstumpfformel war dabei nicht bekannt, es wurde das Volumen als Differenz der beiden zugehörigen Kegel ermittelt. Damit der Bogen zum Gesamtthema nicht verlorenging, wurden die Maße dieser Kegel nur zeichnerisch (bezogen auf den konkreten Fall) ermittelt. Diesem Vorgehen entsprechen auch Löseverfahren, wie sie oft im Alltag vorgenommen werden. Gleichzeitig wird damit die Erarbeitung der Kegelstumpfformel vorbereitet.]

In der *6. Stunde* wurden dann Körper, deren Form sich aus zwei oder drei Grundformen zusammensetzen läßt (wie etwa eine Fischdose, eine Käseschachtel oder eine Konfektschachtel), in bezug auf Form und Größe analysiert.

In der *7. Stunde* wurde eine Klassenarbeit geschrieben. Sie bestand aus Aufgaben zu Volumenberechnungen und Verhältnissen zwischen Volumina sowie aus der Beschreibung von Formen für Gegenstände aus dem Alltag, deren Form aus zwei oder drei Grundformen zusammengesetzt werden kann (Gewächshaus, Fernsehturm, Raumkapsel, Güterzugwaggon).

Die Klassenarbeiten fielen in beiden Klassen etwas besser aus als die sonstigen Mathematikarbeiten. Der Unterschied vom E-Kurs zum G-Kurs war erwartungsgemäß deutlich. Dieses zeigte sich auch im Unterricht schon ab der 2. Stunde.

4.3 Deicherhöhung

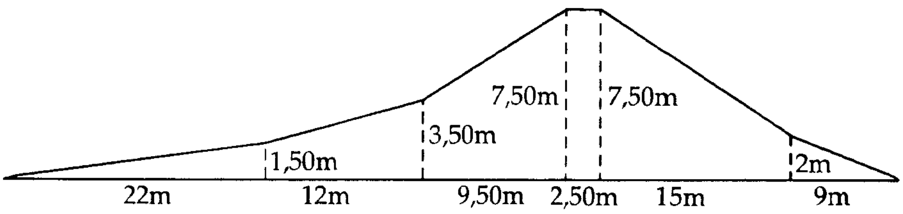
Dieses Thema wurde bislang einmal von einer Studentin im Rahmen einer Examensarbeit und zweimal von einer Studentengruppe im Rahmen des mathematikdidaktischen Tagespraktikums erprobt. Im zweiten Fall standen uns wieder sieben aufeinanderfolgende Mathematikstunden eines 8. Schuljahres einer Hauptschule zur Verfügung.

In der *1. Stunde* wurde anhand von Dias über die Sturmflutkatastrophe 1962 in das Thema eingeführt. Die Schüler und Schülerinnen sollten sich danach in die Rolle eines Planers oder Abgeordneten des hamburgischen Staates, der über die Verbesserung der Schutzmaßnahmen mitentscheiden muß, versetzen. Im Anschluß daran wurde das Projekt der Erhöhung eines 12 km langen Deichabschnittes herausgestellt und anhand von Bildern aus einem Atlas wurden verschiedene Deichformen in ihrer historischen Entwicklung besprochen.

In der *2. Stunde* wurde zunächst im gemeinsamen Unterrichtsgespräch eine Liste der wesentlichen Kostenpunkte (ohne Planungs- und Verwaltungskosten) erstellt. In der anschließenden Einzelarbeit berechneten dann die Schüler und Schülerinnen das Volumen vom Sandkern des alten Deiches für 1 km Länge.

In der *3. Stunde* wurden Volumen und Kosten des Sandkerns für die Erhöhung des Deiches, ebenfalls für 1 km, in Gruppenarbeit ermittelt (vgl. dazu **Abb. 4**).

Berechne das Volumen und die Kosten des Sandkernes für die Erhöhung des Deiches um 1 Meter auf der Länge von 1 Kilometer



1 m^3 Sand kostet 14,- DM.
Die Kosten für eine Anfahrt des LKW betragen 7,50 DM.
Ein LKW kann 15 m^3 Sand transportieren.

Abb. 4

[Die Kosten für 1 m^3 Sand, ebenso wie die später auftretenden Kosten für Kleieboden und Grassoden, hatten die Studierenden vorher bei entsprechenden Lieferfirmen erfragt. Die Kosten für die Anfahrt wurde aufgrund einer Befragung der Lieferfirmen und Schätzungen über die Weglänge ermittelt. Hiervon wurden die Schüler und Schülerinnen kurz unterrichtet. In einem anderen Fall hätte man sie auch selbst solche Daten ermitteln lassen können.]

In der *4. Stunde* wurde ebenfalls in Gruppenarbeit das Volumen der Kleieschicht des alten und des neuen Deiches für 1 km Länge berechnet. Hierzu mußten vor allem die Deichschrägen ermittelt werden. Im Anschluß daran wurden die Kosten für die zusätzlich notwendige Kleiemenge ermittelt.

[Die Ermittlung der Deichschrägen geschah hier im 8. Schuljahr auf zeichnerisch-messende Weise, da der Satz von Pythagoras noch nicht bekannt war. Für die praktischen Zwecke reicht die Genauigkeit dieser Methode aus. Bei der Einführung des Satzes von Pythagoras im nächsten Schuljahr konnte auf dieses Beispiel zurückgegriffen werden.]

In der *5. Stunde* wurden dann in Frontal- und Einzelarbeit die Kosten für die Grasschicht für einen 1 km langen Deich berechnet. Da für einen schnellen Schutz die Grasschicht nicht durch Säen, sondern mittels fertiger Grassoden normierter Größe hergestellt wird, müssen zunächst die Fläche und die Anzahl der Soden für die Pflasterung dieser Fläche ermittelt werden. Danach folgt die Kostenberechnung.

In der *6. Stunde* schließlich wurden die Arbeits- und Maschinenkosten in gemeinsamer Diskussion abgeschätzt, und es wurden die Gesamtkosten für die 12 km lange Deicherhöhung berechnet. Außerdem wurden noch einzelne Aspekte der Detailrechnungen aus den letzten Stunden zur Vertiefung wiederholt.

In der *7. Stunde* fand eine Klassenarbeit statt, bei der es um die Erhöhung eines entsprechenden Deiches mit etwas anderen Daten ging. Es sollten dann nacheinander die Sandmenge, deren Anfahrtskosten, die Kleiemenge, deren Anfahrtskosten und die Anzahl der Grassoden sowie deren Kosten berechnet werden. Wegen der Kopplung der Aufgaben und wegen einer zwischen der 6. und 7. Stunde liegenden Ferienwoche fiel die Klassenarbeit sehr schlecht aus und wurde deshalb nur als Übungsarbeit gewertet. Nach Besprechung dieser Arbeit durch den Fachlehrer wurde dann noch eine ganz analoge Klassenarbeit geschrieben, bei der jedoch für jede Aufgabe die jeweils benötigten Daten neu vorgegeben wurden. Diese Arbeit fiel dann wesentlich besser aus.

Abschließend möchte ich noch auf Unterrichtseinheiten zum Bereich "Kultur" hinweisen, bei der es um die Verbindung von Geometrie und Kunst ging. Erprobt wurden dazu eine Unterrichtseinheit im 6. Schuljahr, eine Unterrichtseinheit im 8. Schuljahr und ein Projekt in der Klassenstufe 7/8 (vgl. dazu [4] und [9]).

Literatur

[1] Bender, P.: Zentrale Ideen der Geometrie für den Unterricht der Sekundarstufe I. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1983, S. 8-17
[2] Bender/Schreiber: Operative Genese der Geometrie, Stuttgart/Wien 1985
[3] Graumann, G.: Praxisorientiertes Sachrechnen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1976, S. 79-83
[4] Graumann, G.: Praxisorientierter Geometrieunterricht. In Beiträge zum Mathematikunterricht 1977, S. 98-101
[5] Graumann, G. Mathematikunterricht und Freizeit – Ein Beitrag zum praxisorientierten Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1979, S. 142-145
[6] Graumann, G.: Begriffsbildungen und Zielsetzungen im Sachrechnen. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 13 (1983), Heft 5, S. 241-251
[7] Graumann, G.: Computerunterstützter Geometrieunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1985, S. 119-123
[8] Graumann, G.: Eine genetische Einführung in die Trigonometrie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1987, S. 146-149
[9] Graumann, G.: Mathematik und Kunst – Beobachten, Malen, Denken, Konstruieren. In: Hänsel, Projektbuch für die Sekundarstufe I (erscheint demnächst bei Beltz)
[10] Profke, L.: Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht – vorwiegend erörtert am Geometrieunterricht der Sekundarstufe I. In: Journal für Mathematikdidaktik 6 (1985), Heft 1, S. 15-43
[11] Winter, H.: Zur Einführung (Umwelterschließung im Geometrieunterricht). In: der Mathematikunterricht 24 (1978), Heft 5, S. 5-6

G. Graumanns Aufsatz „Geometrie im Alltag" ist die erweiterte Fassung eines auf der „Dritten Internationalen Konferenz über Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht", Kassel 1987, gehaltenen Vortrages.

Es sei an dieser Stelle auf das Heft 6/88 der Zeitschrift **„Der Mathematikunterricht"** hingewiesen, das weitere Vorträge dieser Tagung enthält.