Platonische Parkettierungen und Platonische Körper

Ein Thema des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I

von Günter Graumann

Die Beschäftigung mit regelmäßigen Vielecken unter dem Aspekt der Konstruktion von regelmäßigen (platonischen) Parkettierungen und Körpern liefert Einsichten in mathematische Denkweisen, Möglichkeiten der Klärung einer Reihe von Begriffen, Anlässe für das Training von Problemlösefähigkeiten, Bezüge zur Fähigkeit, Zusammenhänge zu erkennen, Situationen zum Üben in Raumanschauung und Material für die Ausbildung zeichnerischer Fertigkeiten sowie Ansatzpunkte für die Erschließung der Umwelt. Außerdem können bei diesem Thema historische und ästhetische Aspekte gut integriert werden.

Prof. Dr. Günter Graumann, geb. 1941. Studium der Mathematik und Physik an der Uni Hamburg 1961 – 67, Promotion in Mathematik an der TU Hannover 1989, 2. Staatsexamen 1969, Ass. Prof. für Mathematik an der U. of Florida/USA 1969 – 70, Akad. Rat für Math. und Didaktik der Math. an der PHN in Hannover 1970 – 74, seit 1974 Prof. für Mathematik und Didaktik der Math. in Bielefeld.

Das Thema ist relativ geschlossen, so daß es jederzeit in den Unterricht eines 8., 9. oder 10. Schuljahres irgendeiner Schulform der Sekundarstufe I eingebaut werden kann. Die Ausführlichkeit und das Schwergewicht der Repräsentationsmodi kann dabei der jeweiligen Klassensituation entsprechend gewählt werden. Auch bietet das Thema viele Ansatzpunkte für weiterführende Fragestellungen.

Im folgenden wird zur Erläuterung und als Anregung für die Aufbereitung des Themas eine mögliche Unterrichtseinheit (siehe Kasten unten) beschrieben. Varianten dieser Fassung wurden im Rahmen von Examensarbeiten im 9. Schuljahr eines Gymnasiums und im 10. Schuljahr einer Realschule schon einmal durchgeführt.

1. Phase: Einstimmung auf das Thema und Wiederholungen

In dieser ersten Phase, die die ganze erste Stunde der Unterrichtseinheit umfassen soll, geht es um Wiederholung und Vertiefung von Begriffen und Erkenntnissen aus früheren Schuljahren, die als Grundlage für die Inhalte der ganzen Unterrichtseinheit gelten. Wenn kein besonderer Bezug zu den Unterrichtsstunden der vergangenen Wochen hergestellt werden kann, empfiehlt es sich, mit der Betrachtung von einer Reihe verschiedengeformter Dreiecke (vorgegeben auf einem Arbeitsblatt bzw. durch die Frage nach allen Dreiecken, deren Seitenlängen ganzzahlige Verhältnisse etwa aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 bilden) zu beginnen. Dabei können Begriffe "spitzwinkliges Dreieck", "rechtwinkliges Dreieck", "symmetrisches Dreieck", "Innenwinkel", "Winkelsumme", "Seite", "Seitenlänge", "Umfang", "Flächeninhalt" u. a. wiederholt werden. Durch Betrachtung von verschiedenartigen Vierecken, Herausheben von Ordnungsbeziehungen ("Haus der Vierecke") und Diskussion von möglichen Begriffsfestlegungen wie "spitzwinklig", "rechtwinklig", "symmetrisch" kann man dann zur Behandlung des n-Ecks übergehen, wobei insbesondere auf die Begriffsfestlegung des Vielecks und die Begriffe der "Seitenlängen" und der "Innenwinkel" geachtet wird. Je nach Wunsch und Möglichkeiten kann dann differenziert werden nach "konvexen n-Ecken", "konkaven n-Ecken" und "n-Ecken mit überschlagenen Seiten". Ebenso können bezüglich der Diagonalen ergänzende Erkenntnisse gewonnen werden.

2. Phase: Einführung des Begriffs "regelmäßiges n-Eck" und Konstruktion einzelner regelmäßiger n-Ecke

In der zweiten Stunde dieser Unterrichtseinheit beginnt man am besten mit der Wiederholung des Begriffs "n-Eck" und dessen Spezialisierung für n = 3, 4, 5, 6. Dabei wird dann insbesondere die Frage der Symmetrien hervorgehoben bzw. nach symmetrischen 3-, 4-, 5- und 6-Ecken gesucht (vgl. etwa **Abb. 1**). Als Ergebnis von zeichnerischen Versuchen und logischen Überlegungen erhält die Lerngruppe als Gemeinschaftsergebnis, daß (mindestens für die behandelten Spezialfälle) bei dem n-Eck mit den meisten Symmetrien alle Seiten und alle Innenwinkel der Größe nach jeweils übereinstimmen.

Hieran schließt sich dann die Definition "regelmäßiges n-Eck" an. Durch Spezialisieren auf n = 3 und n = 4 wird danach die Übereinstimmung von "regelmäßiges Dreieck"

Aufarbeitung des Themas in einer Unterrichtseinheit

1. Einstimmung auf das Thema und Wiederholung einiger Begriffe aus der Dreiecks- und Viereckslehre
2. Die regelmäßigen Vielecke – Begriffserklärungen und Konstruktion (einschließlich der Diskussion von Zirkel/Lineal-Konstruktionen)
3. Die regelmäßigen Vielecke – Eigenschaften und Vorkommen in der Umwelt
4. Platonische Parkettierungen – Theoretische Fragen und Vorkommen im Alltag
5. Herstellen von Material zum Basteln platonischer Körper
6. Platonische Körper – Experimentelle Erfahrungen und theoretische Fragen
7. Platonische Körper – Eigenschaften, Bedeutung im Alltag und historische Aspekte

und "gleichseitiges Dreieck" sowie von "regelmäßiges Viereck" und "Quadrat" festgestellt. Durch Hinzuziehen von Rauten und Rechtecken wird weiterhin hervorgehoben, daß im regelmäßigen n-Eck sowohl alle Seiten als auch alle Winkel gleich groß sein müssen. Durch genaueres Betrachten des regelmäßigen Sechsecks (Aufgliederung in gleichseitige Dreiecke) erhält man dann auch die Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks (und dazugehöriger Kreismuster) allein durch einen Zirkel (vgl. etwa **Abb. 2**).

Um den Begriff des regelmäßigen n-Ecks auch an einem Beispiel mit nicht so üblicher Eckenzahl zu verdeutlichen, werden aus den schon behandelten regelmäßigen n-Ecken durch Halbierung der Mittelpunktswinkel (was auch durch Halbierung der Seiten geschehen kann) weitere regelmäßige n-Ecken konstruiert (vgl. etwa **Abb. 3**). Hierbei kommt dann die Größe von Mittelpunkts- und Innenwinkel und der Umkreis eines regelmäßigen n-Ecks ins Blickfeld, wodurch weitere regelmäßige n-Ecke mit Hilfe von Zirkel, Lineal und Winkelmesser (im Rahmen der Meßgenauigkeit) konstruierbar sind.

Zur Differenzierung und Arbeit in Gruppen wird die Aufgabenstellung der Konstruktion von regelmäßigen n-Ecken variiert, indem die Seitenlänge für ein bestimmtes regelmäßiges n-Eck oder der Inkreisradius vorgegeben werden. Als Hausarbeit sind dann mehrere regelmäßige n-Ecke mit vorgegebener Seitenlänge aus Papier oder Pappe herzustellen. (Für die spätere Arbeit ist es dabei hilfreich, für jedes n eine bestimmte Farbe für das Tonpapier vorzugeben).

Als weitere Vertiefung bietet sich die Diskussion der möglichst exakten Konstruktion und der Beschränkung auf die Hilfsmittel von Zirkel und Lineal an. Dabei wird zunächst auf die Aufgaben von technischen Zeichnern eingegangen (wobei auch der Einsatz von Computern besprochen werden kann). Durch Ausweitung auf frühere Zeiten kommt man auf die Bedeutung von Konstruktionsvorschriften bei den Griechen. Dabei sollte deutlich werden, daß aufgrund der Unsicherheit im Zahlenbereich durch die Entdeckung der Irrationalitäten die Griechen in der Geometrie die Sicherheit durch Beschränkung auf einfache Hilfsmittel (Zirkel und Lineal) und klare Konstruktionsbeschreibung zu gewinnen suchten.

Die Konstruktion von regelmäßigen Dreiecken und Sechsecken wird dabei noch einmal hervorgehoben und im Zusammenhang mit der Konstruktion des Quadrats werden die Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal (Mittelsenkrechte, Lot, Winkelhalbierende) wiederholt bzw. eingeführt. Die Konstruktion des regelmäßigen Achtecks und Zwölfecks kann dann von den Schülern und Schülerinnen selbst gefunden werden. Von der Lehrkraft muß nun durch Verweis auf Literatur berichtet werden, daß nicht alle regelmäßigen n-Ecke sich mit Zirkel und Lineal allein konstruieren lassen und daß dieses Problem die Mathematik über zwei Jahrtausende beschäftigt hat. Je nach Vorkenntnissen und vorhandener Zeit kann danach die Zirkel/Lineal-Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks behandelt werden, wobei die Berechnung des goldenen Schnittes und die Konstruktion von Quadratwurzeln mittels des Satzes von Pythagoras wichtige Rollen spielen.

3. Phase: Eigenschaften regelmäßiger Vielecke und deren Bedeutung in der Umwelt

Ausgangspunkt für die weitere Erforschung der regelmäßigen Vielecke sind die schon gewonnenen Erkenntnisse über deren Symmetrien. Zunächst kann man feststellen, daß die Symmetrieachsen bei ungeradem n immer durch eine Ecke und eine gegenüberliegende Seitenmitte gehen, während bei geradem n zwei Arten von Symmetrieachsen vorkommen, nämlich entweder durch zwei gegenüberliegende Ecken oder zwei gegenüberliegende Seitenmitten. In diesem Zusammenhang kann man das Augenmerk auch auf die Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden richten, wobei im Fall des ungeraden n diese immer zusammenfallen, während bei geradem n sie verschieden sind und die beiden Typen von Symmetrieachsen darstellen. Hiernach betrachten wir die Drehsymmetrien und die Symmetrieordnung (Anzahl der Symmetrien) eines regelmäßigen n-Ecks. Zur Kontrastierung sollten dann auch einige n-Ecke mit nicht so großer Symmetrieordnung mit herangezogen werden. Die Betrachtung von Winkeln und Längen verschiedener Teilfiguren eines regelmäßigen n-Ecks knüpft an die Erfahrungen der vorangegangenen Phase an und verbreitert die Kenntnisse über reguläre Vielecke (vgl. dazu **Abb. 4**).

Interessant ist hierbei die Zusammengehörigkeit bestimmter Wurzelzahlen, Winkelmaße und Eckenzahlen sowie die Veränderung des Um-

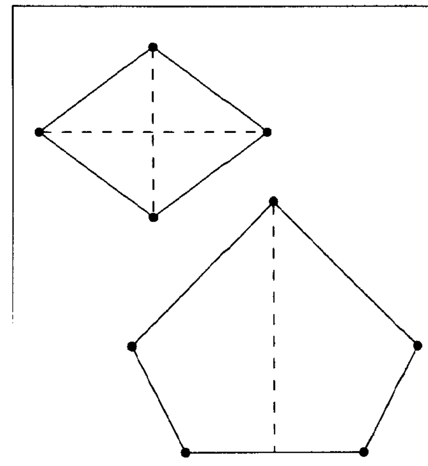

Abb. 1

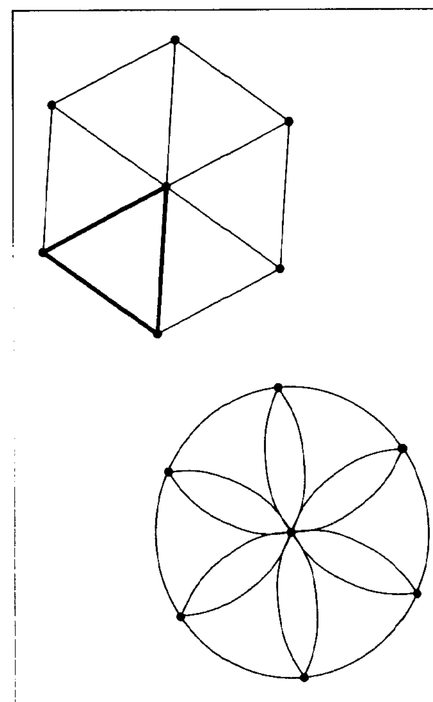

Abb. 2

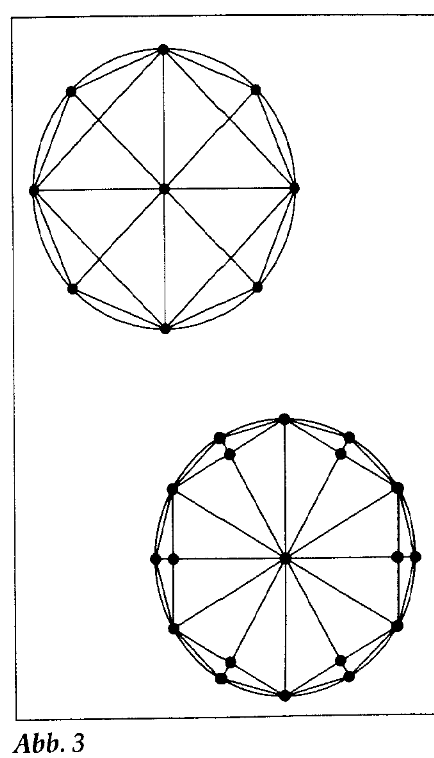

Abb. 3

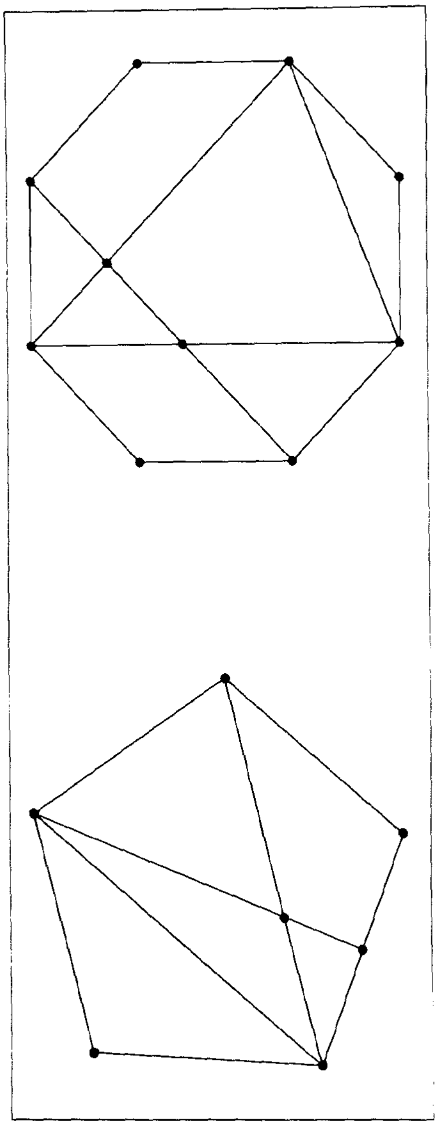

Abb. 4

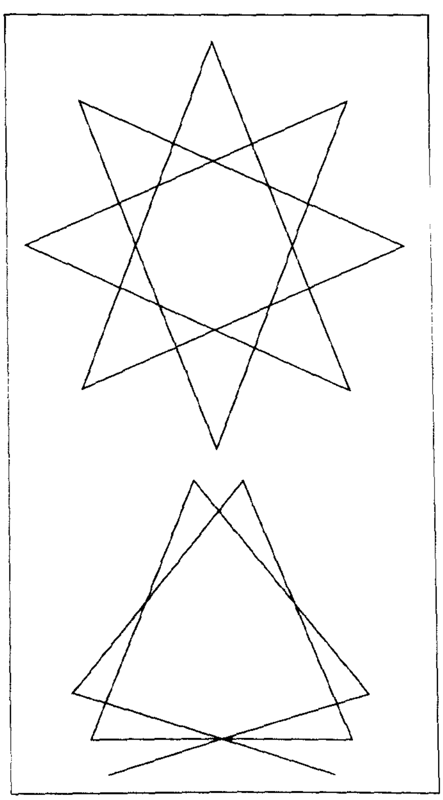

Abb. 5

kreisradius oder des Flächeninhalts bei konstanter Seitenlänge und wachsender Eckenzahl. Auch sollten zeichnerische Erfahrungen gemacht werden, wie sich die Regularität verändert, wenn bestimmte Ungenauigkeiten eingehen und sich gegenseitig vervielfachen. Weiterhin kann schon mit wenigen Vorkenntnissen ein Satz über die Anzahl der Diagonalen eines regelmäßigen n-Ecks aufgestellt und begründet werden. Hierbei bietet die nähere Untersuchung von Stern-n-Ecken, die aus Diagonalen gebildet werden, gute Gelegenheit zur Differenzierung, wobei die Begriffsfestlegung "regelmäßiges Vieleck" erneut reflektiert wird. Interessant sind auch Probleme, die bei der Erstellung von Computerprogrammen zur Konstruktion regelmäßiger n-Ecke auftauchen. Hat man ein Programm (z. B. in Logo), bei dem das Abtragen eines festen Winkelmaßes und einer festen Länge iteriert wird (vgl. **Abb. 5**), kommt man schnell zur Frage, bei welchem Winkelmaß ein regelmäßiges konvexes n-Eck oder Stern-n-Eck entsteht und bei welchem Winkelmaß sich die Figur (theoretisch) nie schließt.

Um auf das Vorkommen regelmäßiger n-Ecke in der Umwelt einzugehen, kann eine Begehung mit Arbeitsauftrag von einem geeigneten Stadtteil (meist Altstadt) vorgenommen werden. Durch die vorhergehende Beschäftigung mit regelmäßigen Vielecken sind die Schülerinnen und Schüler schon recht gut darauf vorbereitet, regelmäßige Formen in der Umwelt zu entdecken. Damit dieses aber nicht nur ein flüchtiger Blick bleibt, sollten sie aufgefordert werden, mehrere Objekte (Häuserfassaden, Schilder, Pflastersteine etc.) zu skizzieren und zu beschreiben (wobei die Sprache im Mathematikunterricht eine entsprechende Beachtung findet). Anschließend können dann anstatt der Skizzen exakte Zeichnungen angefertigt werden. Anhand von Dias und Büchern wird danach das Vorkommen regelmäßiger Vielecke in der Umwelt auf Bereiche (wie Bienenwaben, Kristallmuster, Ornamente in der Hagia Sophia, etc.), die nicht direkt zugänglich sind, ausgeweitet.

4. Phase: Einführung des Begriffes "Parkettierung" und Aufsuchen platonischer Parkettierungen

In Anknüpfung an die zuvor betrachteten Muster und Mosaike sowie durch Aufgreifen des Begriffs "Parkett" wird die Definition des Begriffs "Parkettierung" (lückenlose Bedeckung einer Fläche mit periodisch wiederkehrendem Grundmuster) eingeführt. Die Behandlung von Parkettierungen wird dann auf Parkettierungen der Ebene eingegrenzt, wobei besonders zu beachten ist, daß die ganze (unendliche) Ebene in Gedanken ausgelegt werden muß. Nach dieser ersten Begriffserklärung, wird nun nach verschiedenen Parkettierungen der Ebene gesucht, wobei diese Aufgabe zunächst ganz offen gestellt wird. In dieser Phase kann man solche Parkettierungen, wie man sie bei Escher findet, gut mit einbringen. Daran anknüpfend wird die Konstruktion von Parkettierungen (genauer: Ausschnitten davon) mittels Schablonen durchgeführt. Insbesondere werden hierbei auch die in einer früheren Stunde schon hergestellten regelmäßigen n-Ecke aus Kartonpapier mit herangezogen. In jedem Fall wird dann das Problem der Parkettierung der Ebene auf regelmäßige Vielecke als Grundmuster konzentriert. Nebenbei wird der Begriff der "regelmäßigen (platonischen) Parkettierung" eingeführt und die systematische Suche nach platonischen Parkettierungen durchgeführt. Dabei sollten die Schüler und Schülerinnen erst mit Pappfiguren oder ähnlichem experimentell arbeiten, jedoch auch schon zu gedanklichen Überprüfungen angeregt werden. So ist es kein großes Problem mehr, an der Tafel den Beweis für die Existenz von genau drei platonischen Parkettierungen durchführen zu lassen. Dabei kann auch sofort erkannt werden, daß das Sechseckgitter ein Teilgitter des Dreieckgitters ist und die Winkel 60°, 90°, 120° als Teiler von 360° wesentlich sind. Das Vorkommen der drei platonischen Parkettierungen im Alltag schließt sich hieran an. In diesem Zusammenhang empfiehlt es sich, auch auf andere Parkettierungen und Ornamente in der Umwelt einzugehen. Zur Differenzierung kann danach auf Muster aus mehreren Grundfiguren Ausschau gehalten werden, oder es kann die Frage nach möglichen Längen und Winkeln an Figuren, die nur aus Gitterpunkten bestehen, behandelt werden.

5. Phase: Herstellen von Material zum Basteln von Körpern aus Kartonpapier und Gummiband

Die Behandlung räumlicher Figuren in der Schule (und auch Hochschule) scheitert oft an dem Mangel von geeigneten Medien. Über zweidimensionale Veranschaulichungen und einzelne Demonstrationskörper hinausgehend gibt es leider bislang nur wenige Angebote. Das wiegt umso schwerer, als gerade das räumliche Anschauungsvermögen ein vielfältiges aktives Handeln mit dem Körper als Voraussetzung hat. Deshalb sei ein Material vorgestellt, mit dem man einfach viele regelmäßige und halbregelmäßige Körper herstellen kann. Die Schülerinnen und Schüler können es selbst herstellen, wobei die vorher erworbenen zeichnerischen Fertigkeiten vertieft werden können. Im Umgang mit dem Material können dann viele Handlungsvarianten selbst entwickelt werden.

Zur Herstellung der Grundelemente müssen zunächst mehrere Bögen Kartonpapier oder entsprechendes Material besorgt werden, wobei aus ästhetischen und didaktischen Gründen (Betonung bestimmter Flächen) farbiges Kartonpapier sehr empfehlenswert ist. Auf diese Bögen werden nun die Figuren gezeichnet. Um jede Figur ist dann noch ein Rand von ca. 1 cm Breite zu zeichnen. D. h. jedes Grundelement entsteht aus zwei ähnlichen, konzentrischen Randlinien mit etwa 1 cm Abstand (vgl. **Abb. 6**). Dabei ist nun wichtig, daß die Seitenlängen der inneren Figuren für alle Grundformen (hier: regelmäßige n-Ecke) gleichgroß sind, damit später alle möglichen Seiten zu einer Kante kombiniert werden können. Wenn nicht aus irgendwelchen Gründen diese Kantenlänge vorgeschrieben ist, empfiehlt es sich aus praktischen Gründen (Locherabstand) hierfür die Länge 8 cm zu wählen.

Nebenbei sei bemerkt, daß es eine nette, praktisch oder/und theoretisch zu lösende Aufgabe ist, nach der Länge der äußeren Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke ... zu fragen. Auch über die Anordnung der verschiedenen Figuren läßt sich diskutieren, wobei möglichst wenig Abfall zu erzeugen sicherlich ein Ziel ist. Im einfachsten Fall kann auch eine schon fertige Vorlage (entsprechend **Abb. 6**, vergrößert im Maßstab 3:8) den Kindern vorgegeben werden.

Die Grundelemente werden nun entlang der äußeren Linien ausgeschnitten. An jedem Eckpunkt der inneren Figur wird dann (etwa mit einem Locher) ein Loch gestanzt. Weiterhin schneidet man an jeder Ecke den Rand ein wenig ab, so daß das Loch von außen zugänglich ist und benachbarte Ränder sich nach dem Falzen nicht behindern. Schließlich muß noch jeder Randstreifen entlang der vorgezeichneten inneren Randlinie der Figur gefalzt werden.

Bei festerem Material kann man schließlich im Inneren jedes solcher Grundelemente einen Teil herausschneiden, so daß man später in den aus mehreren Grundelementen zusammengesetzten Körper hineinschauen kann. Es empfiehlt sich eine innere ähnliche Figur herauszuschneiden oder jeweils mehrere kleine Dreiecke herauszuschneiden, so daß gewissermaßen Verstrebungen der Eckpunkte mit dem Mittelpunkt stehen bleiben (siehe **Abb. 7**).

Neben einem "Satz" von genügend vielen Grundelementen der eben beschriebenen Art, benötigt man nun noch eine genügend große Anzahl von Gummibändern, deren halber Umfang im nicht-gespannten Zustand etwa 1 cm kürzer als die vorgegebene Seitenlänge der Grundelemente sein sollte. Man kann auch längere Gummibänder benutzen, die entweder doppelt gelegt werden oder für zwei benachbarte Kanten verwendet werden.

Zwei Grundelemente werden zu einer Kante eines Körpers verbunden, indem einfach die zwei gewünschten Seiten aneinandergelegt werden und durch ein Gummiband, das um die aneinanderliegenden Randstücke gespannt wird, miteinander verbunden werden. Aus drei oder mehr Grundelementen, die an einem Punkt zusammenstoßen und von denen nacheinander jeweils zwei eine Kante bilden, läßt sich dann sehr leicht eine räumliche Ecke bilden. Fährt man damit von Ecke zu Ecke fort, so entsteht bei geeigneter Vorgehensweise ein geschlossener Körper (**Abb. 8**).

6. Phase: Herstellen von platonischen Körpern und Feststellen der Anzahl nicht-ähnlicher platonischer Körper

Nachdem die Schüler und Schülerinnen genügend lange frei experimentieren dürfen, wird zunächst festge-

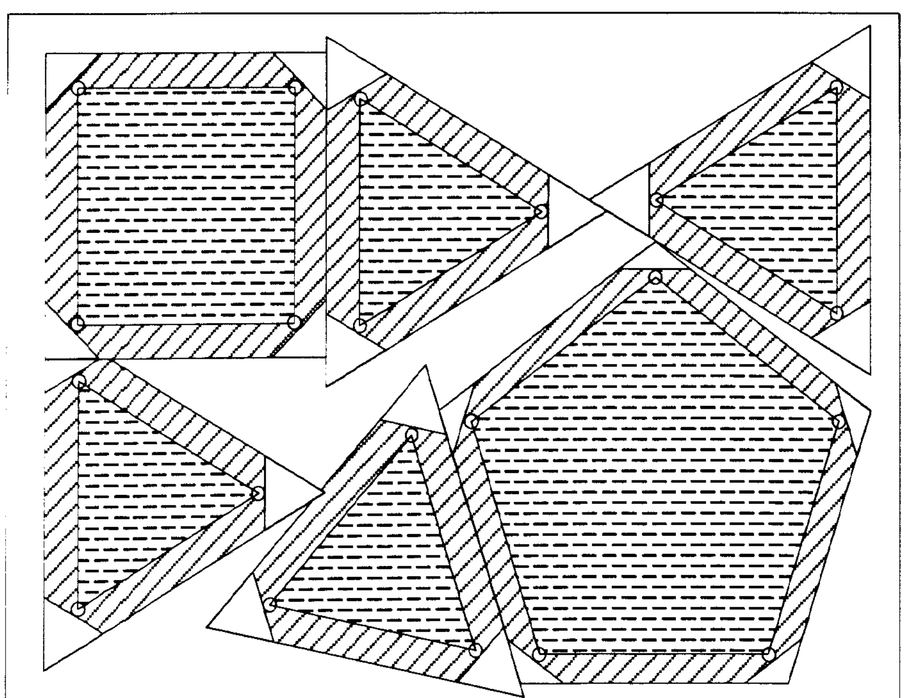

Abb. 6

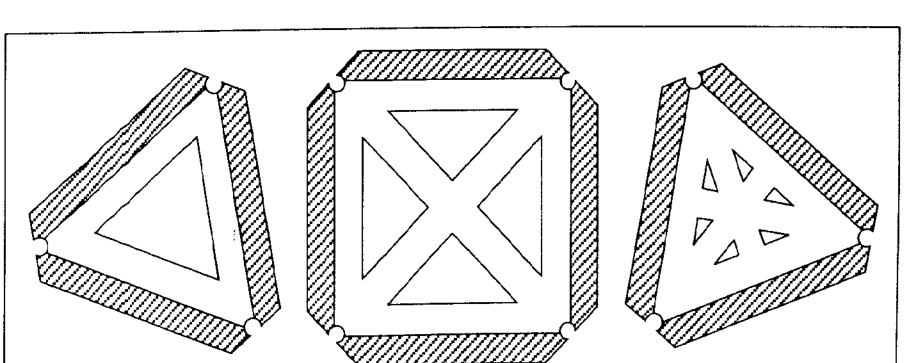

Abb. 7

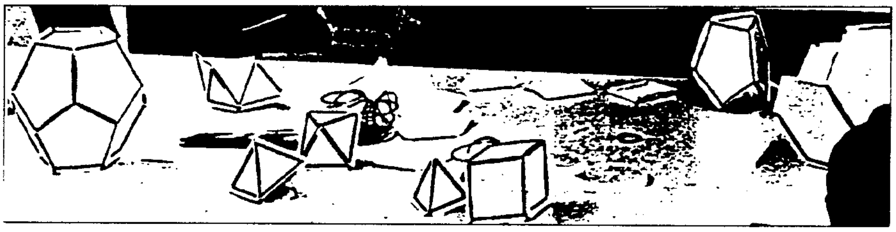

Abb. 8

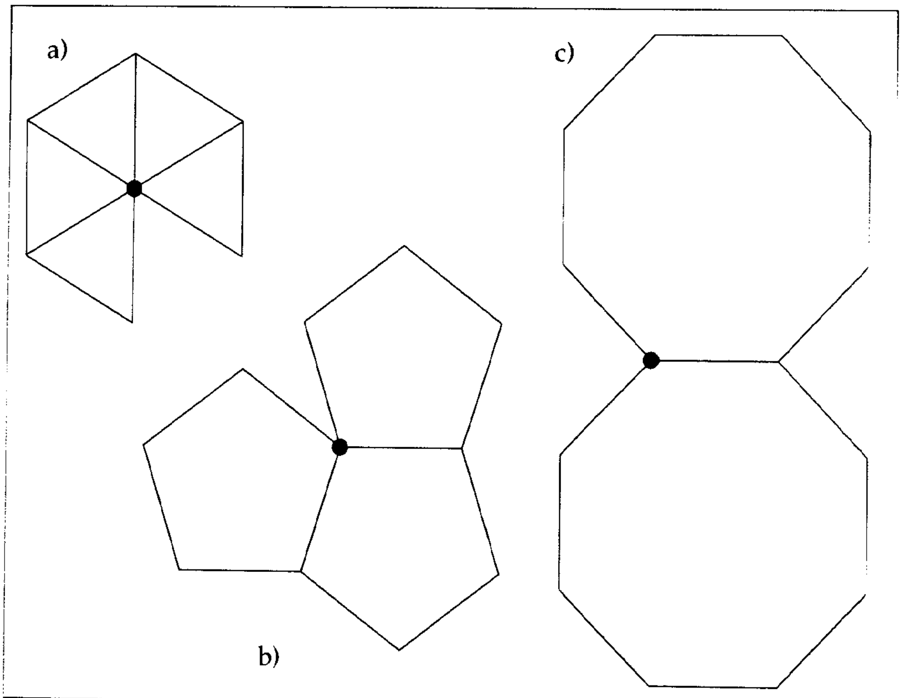

Abb. 9

halten, daß mindestens drei Flächenstücke benötigt werden, um eine räumliche Ecke zu erhalten, und daß die Summe der Flächenwinkel an einer räumlichen Ecke kleiner als 360° sein muß. Durch Anknüpfen an die regelmäßigen Parkettierungen wird dann die Aufgabe gestellt, Körper mit nur einer Grundform herzustellen. Nachdem einige solcher Körper hergestellt wurden, wird der Begriff "Platonischer Körper" genannt. Neben der Analogie zur platonischen Parkettierung muß auch berücksichtigt werden, daß die Kongruenz der Ecken beachtet wird, was etwa durch die Betrachtung von Doppelpyramiden (welche leicht mit dem Material hergestellt werden können) als Gegenbeispiel deutlich wird. Danach wird die Aufgabe gestellt, über die schon gefundenen Beispiele hinaus, systematisch nach weiteren platonischen Körpern (bastelnder Weise) zu suchen.

Wegen des für die Suche gut geeigneten Materials kann davon ausgegangen werden, daß alle fünf platonischen Körper gefunden wurden. (Andernfalls helfen kleine Tips während der Bastelphase). In der anschließenden Diskussion wird zunächst noch einmal festgestellt, daß es sich bei den fünf gefundenen Typen auch wirklich um platonische Körper handelt, wobei die Definition nochmals ausführlich geklärt wird. Dann ergibt sich aber automatisch die Frage, ob es nicht noch mehr als diese fünf Typen platonischer Körper geben könnte. Durch Berechnen der Summe der Flächenwinkel an einer Ecke an den schon vorhandenen platonischen Körpern und probierendes Zusammenlegen von n-Ecken in der Ebene, wird man nun leicht zu der folgenden Feststellung kommen:

Die Summen von 3, 4 oder 5 Flächenwinkeln von gleichseitigen Dreiecken ist kleiner als 360° (vgl. **Abb. 9a**), während 6 gleichseitige Dreiecke keine Raumecke mehr bilden können, sondern flach in der Ebene liegen und zur schon bekannten regelmäßigen Dreiecksparkettierung der Ebene gehören. Mehr als 6 gleichseitige Dreiecke können nicht einmal in der Ebene zusammengelegt werden; sie bilden (wie man experimentell überprüft) deshalb auch keine Raumecke, sondern höchstens so etwas wie eine "gezackte Wellenfläche". Weiterhin ist die Summe von 3 Flächenwinkeln von Quadraten kleiner als 360°, während 4 Quadrate keine Raumecke mehr bilden können, sondern flach in der Ebene liegen und zur schon bekannten regelmäßigen Quadratparkettierung gehören. Mehr als 4 Quadrate können entsprechend wie eben diskutiert keine Raumecke bilden. Die Summen von 3 Flächenwinkeln von regelmäßigen Fünfecken sind kleiner als 360° (vgl. **Abb. 9b**), während die Summe von mehr als 3 Flächenwinkeln von regelmäßigen Fünfecken größer als 360 ist. Die Summe von 3 Flächenwinkeln von regelmäßigen Sechsecken ist gerade gleich 360°, weshalb 3 zusammengelegte regelmäßige Sechsecke zur schon bekannten regelmäßigen Sechseckparkettierung der Ebene gehören. Dagegen können mehr als 3 regelmäßige Sechsecke keine Raumecke bilden. Für alle regelmäßigen n-Ecke mit einer Eckenzahl, die größer als 6 ist, ergibt die Summe von schon 3 Flächenwinkeln eine Zahl, die größer als 360° ist (vgl. **Abb. 9c**). Deshalb kann aus jeweils 3 oder mehr regelmäßigen Siebenecken, Achtecken, Neunecken ... keine Raumecke gebildet werden.

Zusammenfassend ergibt sich also, daß ein platonischer Körper nur möglich ist mit entweder 3 gleichseitigen Dreiecken oder 4 gleichseitigen Dreiecken oder 5 gleichseitigen Dreiecken oder 3 Quadraten oder 3 regelmäßigen Fünfecken in einer Ecke. Mit dem nochmaligen Hinweis auf die fünf schon experimentell gefundenen platonischen Körper ist dann der Satz über die fünf platonischen Körper bewiesen.

7. Phase: Eigenschaften der platonischen Körper und deren Bedeutung in der Umwelt

Durch Wiederaufgreifen der Diskussion der vergangenen Phase, insbesondere die Betrachtung der Flächen und Ecken, wird eine Tabelle mit den Anzahlen der Seitenflächen, Kanten und Ecken bei den fünf platonischen Körpern erstellt. Aufgrund der Verteilung von Seitenflächen- und Eckenzahl kommt man dann auf die Dualität von Dodekaeder-Ikosaeder und Würfel-Oktaeder. Durch Hinweis darauf, daß eine Seitenfläche auch durch ihren Mittelpunkt repräsentiert werden kann, läßt sich der Dualkörper im Inneren des Körpers darstellen. Auf diese Weise erhält man dann auch die Dualität des Tetraeders mit sich selbst. Als weiteres sollten Zerlegungen der platonischen Körper in Teilkörper und ebene Schnitte besprochen werden. Außerdem gehört die Existenz von Umkugel und Inkugel bei jedem platonischen Körper zu den hier zu behandelnden Eigenschaften. Sie sollten mindestens demonstriert werden. Der Beweis ihrer Existenz und die Berechnung ihrer Radien in Abhängigkeit der Kantenlängen kann dann je nach Situation der Klasse behandelt werden. Ebenso kann die Berechnung der Oberfläche und Volumina als Differenzierung eingebaut werden. In jedem Fall sollten aber noch die Ebenen und Achsensymmetrien der platonischen Körper an den Modellen demonstriert werden.

Die Betrachtung der platonischen Körper soll abgerundet werden durch das Auffinden von Formen der platonischen Körper in der Umwelt. Angesprochen werden sollten dabei die in einigen Kristallen vorkommenden Formen, die aus Gründen des chemischen Aufbaus und dessen Symmetrie einen platonischen Körper als Grundfigur haben. Weiterhin wird auf die Rolle von Würfel und Tetraeder als Verpackungsform einzugehen sein, wobei die Funktionalität des Würfels (und auch des Quaders) beim Stapeln hervorgehoben wird. Fragen von möglichst dichten Packungen in der Ebene und im Raum (insbesondere auch das Problem der Kugelpackungen) können zur Differenzierung bzw. als Vertiefungsarbeit hier ausgeschlossen werden. Auf die Verwendung der platonischen Körper in der Kunst sollte in jedem Fall hingewiesen werden. Auch die Verwendung von platonischen Körpern bzw. Teilen davon beim Design von Lampen sollte behandelt werden. Außerdem bietet sich hier eine Betrachtung über die Rolle der platonischen Körper in verschiedenen historischen Perioden an, wobei ein Exkurs über die Rolle dieser Körper in der Philosophie Platons sinnvoll ist.

Schlußbemerkung

Wie schon anfangs erwähnt, stellt dieser geraffte Unterrichtsentwurf nur eine Anregung dar. Die fehlenden Sachinformationen sind der umfangreichen Fachliteratur zu diesem Thema zu entnehmen. Auch bieten sich an mehreren Stellen andere Wege an. Zum Beispiel ist eine Verbindung mit dem Kunst- oder Werkunterricht, bei dem etwa auch Gipsmodelle, Styropormodelle oder Drahtmodelle hergestellt werden, empfehlenswert. Für den Mathematikunterricht finden sich ebenfalls neben den schon erwähnten Differenzierungen noch viele Möglichkeiten der Ausweitung dieses Themas. Anregungen können hier nur durch Aufzählung einiger Schlagworte gegeben werden: konkave n-Ecke; Sternkörper; archimedische Parkettierungen; archimedische Körper; Symmetriegruppen; weitere Eigenschaften der platonischen Körper, wie etwa Größe der Winkel zwischen den Seitenflächen oder Anzahl und Größe von Raumdiagonalen.

Ich hoffe, durch diese Ausführungen ist klar geworden, daß die platonischen Parkettierungen und die platonischen Körper (obgleich in vielen Schulbüchern unerwähnt) ein interessantes Thema des Mathematikunterrichts sind.

Hinweis:

Weitere Anregungen enthält das Heft 4/1991 "Platonische Körper – Unterricht und Geschichte" unserer Zeitschrift "Der Mathematikunterricht".