

# Mathematikunterricht und Allgemeinbildung – mit Blick auf Schlüsselprobleme unserer Welt

GUNTER GRAUMANN

Seit einigen Jahren wird der Aspekt der Allgemeinbildung wieder stärker diskutiert. Dahinter steht die Frage nach dem Sinn von Schule und den möglichen Orientierungen, die wir den Schülerinnen und Schülern mit auf den Weg geben können. Für den Mathematikunterricht sind neben der pragmatischen Dimension die Aufklärungs-Dimension und die Persönlichkeits-Dimension sowie die Dimension der kritischen Reflexion zu beachten /vgl. 9/. Auf jeden Fall sollte der Sinn des Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen nicht in der Vermittlung von Mathematik an sich (und schon gar nicht im Lernen von Strukturmathematik als Gegenstand) gesehen werden. Vielmehr hat der Mathematikunterricht die Aufgabe, zur allgemeinen Entwicklung der jungen Menschen beizutragen.

Dieses oberste Ziel des Mathematikunterrichts ist einerseits einem humanistischen Menschenbild verpflichtet und damit zeitlos. Andererseits ist dieses Ziel ohne Beachtung der heutigen Welt mit ihren natürlichen und sozialen Gegebenheiten und Entwicklungen nicht zu verwirklichen. In diesem Sinne hat Klafki /11/ vor einigen Jahren den Begriff der Schlüsselprobleme eingeführt und deren Bedeutung für die Allgemeinbildung hervorgehoben.

Ich möchte mich nun hier bezüglich der Rolle des Mathematikunterrichts für die Allgemeinbildung vor allem auf diesen Aspekt der Schlüsselprobleme /bezüglich anderer Aspekte vgl. etwa 5, 6, 8/ beschränken.

## 1. Strukturieren der Welt

Zuallererst erfassen und strukturieren wir die Welt mit Begriffen. *Wir werfen über die Erfahrungswelt das Netz der Begriffe und suchen sie darin zu fangen* /3, S. 30/. Hierzu gehören für alle Menschen unseres Kulturkreises auch eine Reihe von mathematischen Begriffen: Vor allem die Zahlbegriffe einschließlich ihrer Verknüpfungen und Ordnung, elementargeometrische Begriffe wie etwa *gerade, dreieckig, quadratisch, kreisrund, symmetrisch, quaderförmig, dreidimensional* und stochastische Begriffe wie z. B. *zufällig, wahrscheinlich* oder *Risiko*. Zu beachten ist hierbei auch der teilweise unterschiedliche

Gebrauch mathematischer Begriffe (wie z. B. *Würfel, Trapez, eine Menge*) im Alltag. Ebenfalls wichtig sind in diesem Zusammenhang einige Redensarten mit mathematischem bzw. mathematikhistorischem Hintergrund, wie etwa *ersprang im Quadrat; das ist die Quadratur des Kreises; wir drehen uns im Kreis; die Würfel sind gefallen* oder *das war . . . in höchster Potenz*.

Aber nicht nur Begriffe verwenden wir zum Erfassen und Strukturieren unserer Umwelt, sondern auch mathematische Darstellungsformen wie etwa Tabellen, Pfeilschemata, Flußdiagramme und skizzenhafte oder maßstabgetreue Zeichnungen sowie Eigenarten bestimmter mathematischer Dinge wie Proportionalität, exponentielles Wachstum, zufällige Verteilung oder systematische Anordnungen.

Zusammenfassend ließe sich also sagen, daß die Mathematik uns ein in besonderer Weise elaboriertes Begriffssystem und spezielle Darstellungsformen zur Verfügung stellt, das uns Erklärungshilfen für die Vergangenheit und Handlungsorientierungen für die Zukunft liefert.

Zu beachten ist dabei allerdings, daß wir mit den Modellierungen niemals alle Erfahrungen erfassen können. Die Reflexion der Begrenztheit von Modellierungen im allgemeinen und von mathematischen Modellierungen im besonderen ist deshalb immer auch ein wichtiges Lernziel des Mathematikunterrichts. Genauso wichtig ist allerdings auch die Erkenntnis, daß wir gar keine andere Möglichkeit haben, Erfahrungen zu begreifen und zu reflektieren sowie Planungen für die Zukunft zu machen, als daß wir Begriffe bilden, die Welt mit diesen strukturieren, Modelle entwerfen und diese dann wieder an der Wirklichkeit überprüfen.

Dem Mathematikunterricht kommt nun neben der Entwicklung und Präzisierung der für den Alltag wichtigen mathematischen Begriffe sowie dem Training der angemessenen Verwendung mathematischer Begriffe und Darstellungsweisen vor allem auch die Förderung des systematischen Denkens zu. In der Mathematik ist es in besonderer Weise wichtig, ein Problemfeld vollständig zu überblicken und keinen Fall zu vergessen. Auch verwendet man in der Mathematik bei zunächst überschaubaren Problemen oft das Prinzip des *divide and conquer* (zerlege die Aufgaben in Teilprobleme und erobere danach das Gesamtproblem). Hierbei muß man dann meist eine Systematik erfinden, bei der man sicher ist, keinen Fall vergessen zu haben.

Im Mathematikunterricht kann man dieses systematische Denken in vielfältiger Weise entwickeln und fördern; z. B. im ersten Schuljahr, wenn es darum geht, alle Plus- und Minusaufgaben mit 6 oder alle Tausch-, Nachbar- und Umkehraufgaben zu  $4 + 3$  zu finden, oder im fünften Schuljahr, wenn alle Teiler einer Zahl gesucht sind, oder im elften Schuljahr, wenn eine Ungleichung mit Absolutbeträgen mittels Betrachtung mehrerer Fälle gelöst werden muß.

Schließlich kommt es insbesondere bei der Erforschung von Mathematik darauf an, Zusammenhänge zu entdecken und übergeordnete Strukturen herauszuarbeiten. Gerade die Mathematik bildet ein weites Feld für die Erforschung von Zusammenhängen und funktionalen Abhängigkeiten und fordert nicht nur lineares, algorithmisches Denken, wie das Bild der Schulmathematik heute leider zu oft nahelegt. Die hierzu notwendige Fähigkeit, des kreativ-suchenden, mehr-perspektivischen Denkens, der Entdeckung von größeren Zusammenhängen und die Strukturierung von Erfahrungen bzw. Vorgängen der Erfahrung mittels formaler Strukturen, ist nun gerade heute in unserer vielfältigen und sich häppchenweise präsentierenden Welt eine notwendige Aufgabe eines jeden Menschen.

Im Mathematikunterricht kann auch dieses Ziel an vielen Stellen gefördert werden; z. B. im zweiten Schuljahr bei Aufgabenreihen wie  $18 + 27$ ,  $19 + 26$ ,  $20 + 25$  oder  $18 + 27$ ,  $18 + 28$ ,  $18 + 29$ ,  $18 + 30$ ; im vierten Schuljahr bei Analogiebetrachtungen zwischen ebenen und räumlichen Formen; im achten Schuljahr bei der Analyse komplexer Figuren oder im zwölften Schuljahr bei der Klassifikation von Funktionen. In jedem Fall ist dabei allerdings wichtig, daß nicht die Rechentechnik bzw. der Beweis das Unterrichtsgeschehen beherrscht, sondern daß die einzelne oder gemeinsame Entdeckung und Strukturierung als das Wesentliche gesehen wird.

## 2. Mit komplexen Problemen umgehen

Für die Welt von heute und morgen ist die Komplexität vieler Probleme ein besonderes Kennzeichen. Insbesondere die sogenannten Schlüsselprobleme der Menschheit wie etwa Bevölkerung (einschließlich der gesellschaftlich produzierten Ungleichheiten und den daraus resultierenden Wanderungsbewegungen), Friedenssicherung, Ökologie und Ökonomie (einschließlich der Ressourcen- und Energieproblematik) sind in diesem Zusammenhang zu nennen /vgl. auch 11, S. 56–72/. Bei allen solchen Problemen, bei denen viele untereinander zusammenhängende Faktoren das Geschehen bestimmen, hat sich gezeigt, daß die bisherige Methode der Wissenschaften (Isolierung einzelner Faktoren, die dann genauer studiert werden) nicht von Vorteil ist. Vielmehr müssen ganzheitliche Methoden verwendet werden, die durch Übersichtsdenken und Zusammenhangsdenken gekennzeichnet sind. Für mich sehr treffend (in doppeltem Sinne) hat Th. Schulze diese Problematik vor ein paar Jahren vorgetragen: *Der Zeithorizont zieht sich um die Menschheit zusammen, und ihr Lebensraum beginnt ein knappes Gut zu werden. Entwicklungen sind denkbar, voraussehbar, eingeleitet oder bereits voll im Gange, die den Charakter des menschlichen Lebens tiefgreifend verändern, . . . Sie stellen uns vor Probleme von großer Tragweite. Von der Art, wie wir sie wahrnehmen, formulieren, bear-*

beiten und lösen, wird das Überleben der Menschheit und die künftige Gestaltung des Lebens auf der Erde abhängen. /12, S. 7/

Gefordert sind deshalb nicht nur einzelne technische oder fachinhaltliche Lösungen, sondern ein neues, erweitertes Denkschema. W. Klafki schreibt hierzu: *Solche Probleme, wie sie schon in den Analysen des Club of Rome oder neuerdings etwa in Ulrich Becks Deutung der Entwicklung moderner Gesellschaften und tendenziell der zukünftigen Weltgesellschaft zur Risikogesellschaft aufgewiesen werden, machen deutlich, wie unzulänglich, wie folgenblind unser weitgehend noch verwaltendes Denken, Entscheiden und Handeln ist.* /11, S. 64; vgl. auch 4/. Als Ansatzpunkte zur Veränderung hebt Klafki vier grundlegende Einstellungen und Fähigkeiten hervor: *Kritikbereitschaft und -fähigkeit . . . , Argumentationsbereitschaft und -fähigkeit . . . , Empathie im Sinne der Fähigkeit, eine Situation, ein Problem, eine Handlung aus der Lage des jeweils anderen, von der Sache betroffenen aus sehen zu können . . . Schließlich [nenne ich] noch eine weitere Bereitschaft und Fähigkeit von übergreifender Bedeutung. Man kann sie als ‚vernetzendes Denken‘ oder ‚Zusammenhangsdenken‘ bezeichnen.* /11, S. 63/

Nach diesen grundsätzlichen Bemerkungen möchte ich nun zur Bedeutung des Mathematikunterrichts für die Entwicklung eines solchen Denkens kommen. Zunächst ist einmal die Einstellung zur Mathematik betroffen, d. h. Mathematikunterricht darf nicht nur durch „Rechnen“, Algorithmen und Regelanwendungen geprägt sein; vielmehr sollten eigenständige Entwicklungen und Entdeckungen sowie das Herausstellen von Zusammenhängen ein wichtiges Moment des Mathematikunterrichts ausmachen. Hierbei kann dann auch die Argumentationsbereitschaft und -fähigkeit recht gut gefördert werden; und zwar nicht in dem Sinne des einfachen Nachvollziehens von Beweisen, sondern als *das Bemühen, eigene Positionen und eigene Kritik so in den Zusammenhang eines Gesprächs bzw. einer Diskussion mit anderen einbringen zu wollen und einbringen zu können, daß den Gesprächspartnern Verstehen und kritische Prüfung ermöglicht wird, so also, daß die Chance zum gemeinsamen Erkenntnisfortschritt gewahrt bleibt, hin zu besser begründeter Erkenntnis, als man sie zunächst besaß.* /11, S. 63/

Ebenfalls in diesem Zusammenhang wird bei entsprechender Unterrichtskultur /vgl. hierzu 8, S. 55 und 9, S. 194/ auch die Empathie sowie die Kritikbereitschaft und -fähigkeit gefördert. Wichtig ist hierbei in besonderer Weise die Diskussion von Modellierungsverfahren sowie der Grenzen mathematischer Modellierungen (z. B. *Was hilft uns die mathematische Lösung im Alltag oder Was läßt sich von dem gegebenen Problem überhaupt mathematisieren*) und der Grenzen mathematischer Verfahren innerhalb der Mathematik (z. B. die Subtraktion im ersten Schuljahr oder der Dreisatz im achten Schuljahr).

Schließlich kann die Entwicklung von „vernetztem Denken“ im Mathematikunterricht an vielen Stellen gefördert werden, indem begriffliche und strukturelle Vernetzungen aufgezeigt werden. In besonderer Weise eignet sich hierfür der Geometrieunterricht, dessen Objekte einerseits relativ anschaulich sind und andererseits oft recht komplexe Zusammenhänge aufweisen. Die Komplexität der Geometrie und deren Nicht-Reduzierbarkeit auf Algorithmen sind sicherlich auch ein Grund dafür, daß viele Lehrer und Lehrerinnen den Geometrieunterricht stiefmütterlich behandeln (sei es, daß sie selbst unsicher sind auf diesem Gebiet oder daß sie Probleme mit der Überprüfbarkeit haben). Aber gerade wegen dieser Situation und der Notwendigkeit vom Training des Umgangs mit komplexen Problemen sollte der Geometrieunterricht in der Schule eine größere Bedeutung erhalten.

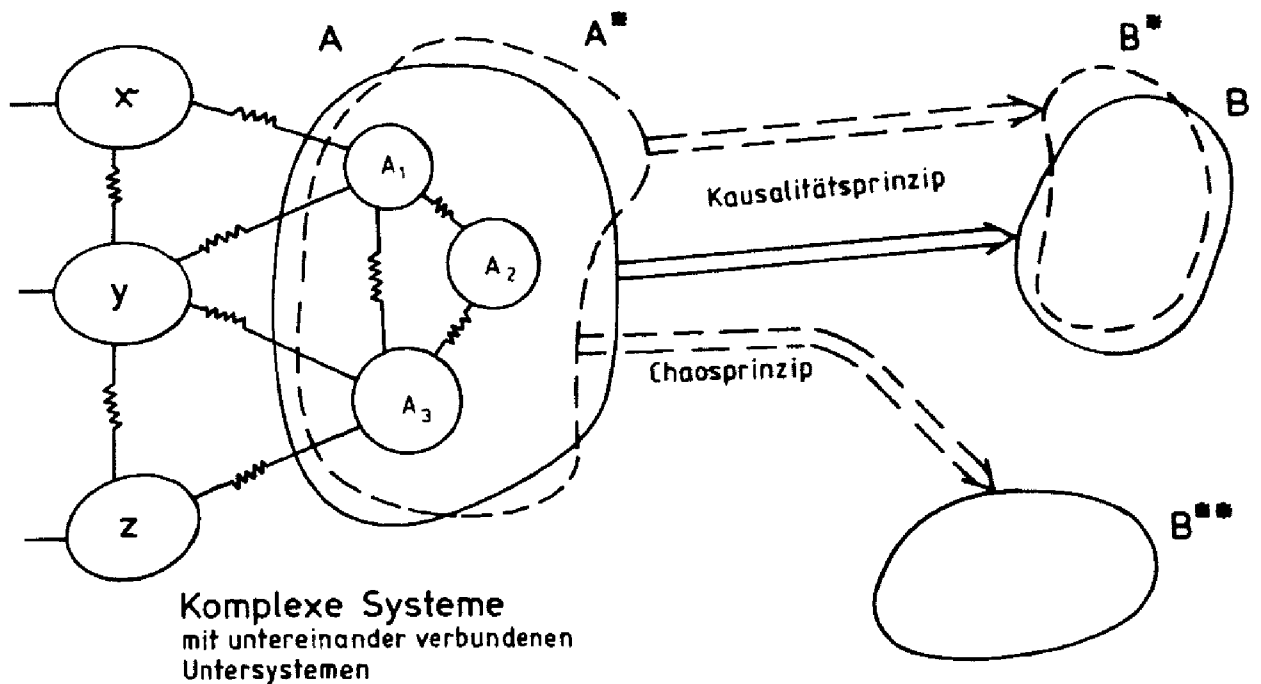
### 3. Aus der Chaostheorie lernen

Es ist zwar schon immer bekannt gewesen, daß viele Begebenheiten unserer Umwelt so „chaotisch“ ablaufen, daß wir sie nicht genau berechnen bzw. keine Voraussagen über sie machen können; aber in den Wissenschaften und dem auf sie bezogenen Schulunterricht hat man sich bisher immer auf genau bestimmte Phänomene konzentriert, wobei sich die Reduktion der komplexen Begebenheiten auf wenige Faktoren gewissermaßen zwangsläufig ergibt. Wie bei den Schlüsselproblemen schon erwähnt, können wir uns in Zukunft auf ein solches Paradigma (das positivistisch-mechanische Denken, bei dem die Welt als so etwas wie ein „großes Uhrwerk“ vorgestellt wird) nicht mehr zurückziehen. Neben der Notwendigkeit der oben schon behandelten Förderungen eines veränderten Denkstiles /vgl. auch 13/ ergibt sich nun durch die Erfahrung mit der Chaostherapie (und alle mit ihr in Zusammenhang stehenden Ansätze wie die Synergetik, die Theorie der offenen dynamischen Systeme oder die Theorie der Selbstorganisation) ein noch ganz anderer Gesichtspunkt.

Bei allen bisher üblichen Anwendungen von Ursache-Wirkungs-Gesetzen (*Aus A folgt B*) benutzen wir das sogenannte starke Kausalitätsprinzip: *Aus A\*, das sich nur wenig von A unterscheidet, folgt B\*, das sich von B auch nur wenig unterscheidet*. Die Größe der Abweichung des B\* von B in Abhängigkeit der Abweichung des A\* von A wird dann manchmal durch die sogenannte Fehlerberechnung oder Fehlerabschätzung noch genauer betrachtet.

Die Chaostheorie zeigt nun, daß unter bestimmten Bedingungen (wenn wir uns an einem sogenannten Bifurkationspunkt befinden) das starke Kausalitätsprinzip nicht angewendet werden kann, obgleich das zugrunde liegende Ursache-Wirkungs-Gesetz nicht angezweifelt wird. Vielmehr kann man unter

solchen Bedingungen über das nach längerer Zeit (bzw. vielen Iterationen) sich aus  $A^*$  ergebende  $B^{**}$  keine sinnvolle Angaben machen (s. Fig. 1).



Figur 1: Zur Gültigkeit des Ursache-Wirkungs-Gesetzes „Aus A folgt B“

Als Folgerung für den Mathematikunterricht geht es mir nun nicht darum, die Chaostheorie als Unterrichtsgegenstand einzuführen, obgleich Erfahrungen über entsprechende Phänomene (etwa mit dem „Spiel des Lebens“ bei zellulären Automaten) sicherlich sinnvoll wären. Auch möchte ich das traditionelle Paradigma nicht prinzipiell verwerfen (in den vielen quasi „stabilen“ Situationen ist es ja sehr hilfreich). Vielmehr geht es mir in diesem Zusammenhang um die Förderung des Bewußtmachens und Reflektierens der Grenzen von theoretisch geleitetem Handeln im allgemeinen und durch technologisches Denken geprägtes Handeln im besonderen. Dieses kann im Mathematikunterricht an verschiedenen Stellen geschehen. Im Rahmen dieses Aufsatzes können wir darauf nicht weiter eingehen. Die Einstellung der Lehrenden (ihr Bild von der Mathematik und der Anwendung von Mathematik) ist dabei aber ein wesentlicher Einflußfaktor; insbesondere muß auch die oben schon erwähnte Diskussion von Modellierungen und deren Grenzen von Zeit zu Zeit explizit behandelt werden.

Darüber hinaus ist es wichtig, daß Handlungsorientierungen für komplexe Situationen, die eine kritische Reflexion des starken Kausalitätsprinzips beinhalten, erworben werden. Das heißt, wir dürfen in Situationen, die durch mehrere miteinander zusammenhängende Faktoren geprägt sind, weder in Lethargie oder blindes Agieren, noch in einseitiges, auf positivistisch-mechanistisches Denken basierendes Handeln verfallen. Vielmehr sollten einerseits

auf Analysen basierende Prognosen die Grundlage der Handlungen sein, und andererseits müssen stets nach einiger Zeit die sich ergebenden Veränderungen der Handlungsgrundlage zur Korrektur bzw. Revision der Entscheidungen führen.

Da das positivistisch-mechanistische Weltbild heute noch sehr weit verbreitet ist und neben dem naturwissenschaftlichen Unterricht der Mathematikunterricht (als Hauptfach) eine wesentliche Rolle bei der Verbreitung des Wissenschaftsparadigmas leistet, hat der Mathematikunterricht nun auch bei der Vermittlung neuer Denkweisen eine wichtige Aufgabe, für deren Konkretisierungen noch eine ganze Reihe von Ideen und Erfahrungen gesammelt werden müssen.

- /1/ Bigalke, H.-G.: *Zur „gesellschaftlichen Relevanz“ der Mathematik im Schulunterricht – Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts.* – In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. – Karlsruhe (1976) 1. – S. 25–34
- /2/ Floyd, Chr.: *Wissenschaft und Ethik.* – In: Informationsdienst Wissenschaft und Frieden. – Bonn (1992) 1. – S. 6–13
- /3/ Frey, G.: *Die Mathematisierung unserer Welt.* – W. Kohlhammer Verlag. – Stuttgart, 1967
- /4/ Graumann, G.: *Was kann die Mathematikdidaktik zum neuen Weltbild beitragen?* – In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1984. – Bad Salzdetfurth 1984. – S. 126–129
- /5/ Graumann, G.: *Geometrie im Alltag.* – In: mathematik lehren. – Seelze (1988) 29. – S. 8–14
- /6/ Graumann, G.: *„Allgemeinbildung durch Mathematik“ als Aufgabe der Lehrerbildung.* – In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1990. – Bad Salzdetfurth, 1990. – S. 103–107
- /7/ Graumann, G.: *Wie können wir aus der Chaostheorie ein neues Denken für die Behandlung komplexer Probleme ableiten?* – In: Köhnlein u.a. (Hrsg.): *Wissenschaft und Verantwortung.* – LIT-Verlag. – Münster, 1991
- /8/ Graumann, G.: *Wodurch wirkt der Mathematikunterricht allgemeinbildend – Vier Beispiele aus dem Geometrieunterricht.* – In: Arbeitskreis Mathematik und Bildung (Hrsg.): *Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht.* – Polygon Verlag. – Buxheim, 1993
- /9/ Graumann, G.: *Die Rolle des Mathematikunterrichts im Bildungsauftrag der Schule.* – In: Pädagogische Welt. – Donauwörth (1993) 5. – S. 194–199
- /10/ Heymann, H.-W.: *Allgemeinbildender Mathematikunterricht – was könnte das sein?* – In: mathematik lehren. – Seelze (1989) 33. – S. 4–9
- /11/ Klafki, W.: *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik.* – Beltz Verlag. – Weinheim und Basel, [1985] 1991
- /12/ Schulze, Th.: *Mögliche Zugänge der Fächer zur Allgemeinbildung.* Typoskript eines Vortrags auf dem 23. Seminartag des BAK. – Bielefeld, 1989
- /13/ Vester, F.: *Neuland des Denkens – vom Technokratischen zum Kybernetischen Zeitalter.* – Deutscher Taschenbuchverlag. – Stuttgart, [1980] 1991