ZAMM 48 (1968) Heft 1, Seite 51 - 56

Minimale Gerschgorin-Kreise

Von L. ELSNER

Die Theorie minimaler Gerschgorin-Kreise wird auf den Fall erweitert, daß mehrere Kreise mit gleichem Mittelpunkt von den übrigen getrennt werden können. Wie im Falle eines Kreises ergibt sich auch hier, daß der kleinste Gerschgorin-Radius Λ_0 Eigenwert einer gewissen Matrix ist. Die Resultate können zur Fehlerabschätzung beim Jacobi-Verfahren bei gehäuften Eigenwerten benutzt werden. Hinreichende Kriterien für die Trennbarkeit, die Porsching angegeben hat, sind auf diesen Fall übertragbar.

The theory of minimal Gerschgorin-disks is generalized to the case of some disks with the same center which can be separated from the others. As in the case of one disk we get the result, that the minimal Gerschgorin-radius Λ_0 is an eigenvalue of a certain matrix. The results can be used to obtain error bounds of the Jacobi-method, if the eigenvalues are clustered. Sufficient conditions for separability given by Porsching are carried over.

Теория минимальных окружностей Гершгорина распространяется на случай, если представляется возможным отделить ряд окружностей, имеющих тот-же самый центр, от остальных окружностей. Подобно как и для одной окружности оказывается в данном случае, что наименьший радиус Гершгорина Λ_0, является собственным значением определённой матрицы. Полученные результаты можно применять для оценки погрешности метода Якоби для скопленных собственных значений. На этот случай можно переносить достаточные критерии разединения, предложенные Поршингом.

1.

Zu einer gegebenen $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ definieren wir als i-ten GERSCHGORIN-Kreis die Menge

(1.1) $$\Gamma_i = \{z : |z - a_{ii}| \leqq \Lambda_i\},$$

(1.2) $$\Lambda_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Wir wissen, daß in $\bigcup_i \Gamma_i$ alle Eigenwerte von A enthalten sind und daß in jeder Zusammenhangskomponente, die aus k GERSCHGORIN-Kreisen besteht, genau k Eigenwerte liegen [5]. Sei x ein n-dimensionaler Vektor, $x > 0$ (d. h. alle Komponenten von x sind positiv), $X(x) = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)$, so hat $X^{-1}(x)\, A\, X(x)$ die gleichen Eigenwerte wie A, die zugehörigen GERSCHGORIN-Kreise

(1.3) $$\Gamma_i(x) = \{z : |z - a_{ii}| \leqq \Lambda_i(x)\},$$

(1.4) $$\Lambda_i(x) = \frac{1}{x_i} \sum_{k \neq i} |a_{ik}|\, x_k$$

haben jedoch im allgemeinen andere Radien. Liegen für ein $x > 0$ gewisse $\Gamma_i(x)$ getrennt von den übrigen, so sagen wir, daß sie „durch x getrennt" werden können.

VARGA [8], TODD [6] und (in einem Spezialfall) HENRICI [2] betrachten das folgende Problem: Es sei möglich, Γ_1 durch ein x von den übrigen Γ_i zu trennen. Wie kann ein bestes trennendes x gefunden werden, d. h. ein solches, für das $\Lambda_1(x)$ minimal wird, das also die beste Einschließung für den bei a_{11} gelegenen Eigenwert liefert?

Wir betrachten das folgende allgemeinere Problem: Sei $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{pp}$, $0 < p < n$. Für $x > 0$ sei $\Gamma(x)$ der Kreis $\Gamma(x) = \bigcup_{i=1\cdots p} \Gamma_i(x)$. $\Gamma(x)$ sei von $\Gamma_{p+1}(x), \ldots, \Gamma_n(x)$ trennbar. Gesucht ist ein „bestes" trennendes x, d. h. ein solches, für das $\Gamma(x)$ möglichst klein ist. Anders formuliert:

Sei P die Menge aller $x > 0$ mit

(1.5) $$|a_{ii} - a_{jj}| - \Lambda_i(x) - \Lambda_j(x) \geqq 0, \qquad i = 1, \ldots, p; \qquad j = p+1, \ldots, n.$$

Falls P nicht leer ist, so ist

(1.6) $$\Lambda_0 = \inf_{x \in P} \max_{i=1,\ldots,p} \Lambda_i(x)$$

gesucht. Es wird uns gelingen, auch

(1.7) $$M_0 = \sup_{x \in P} \max_{i=1,\ldots,p} \Lambda_i(x)$$

zu bestimmen.

Im zweiten Abschnitt werden wir einige Hilfsmittel bereitstellen und damit im dritten Teil zeigen, daß Λ_0 und M_0 Eigenwerte einer gewissen Matrix Q sind. Der zugehörige Eigenvektor x_0 bzw. z_0 ist positiv wählbar und es ist

$$\Lambda_0 = \Lambda_i(x_0)\,, \qquad M_0 = \Lambda_i(z_0) \qquad i = 1, \ldots, p\,.$$

Wir verallgemeinern damit die Ergebnisse von [6] und [8], die dem Fall $p = 1$ entsprechen.

Im vierten Abschnitt übertragen wir gewisse notwendige und hinreichende Kriterien für die Trennbarkeit von Gerschgorin-Kreisen, die Porsching [4] angegeben hat, auf beliebige p. Wir zeigen damit gleichzeitig, daß Porschings Ergebnisse aus [6] und [8] folgen.

Der fünfte Teil enthält Fehlerabschätzungen zum Jacobi-Verfahren im Falle gehäufter Eigenwerte. Es werden dabei Ergebnisse von Hadeler [1], die auf anderem Wege gewonnen wurden, etwas verbessert.

2.

Ist x ein Vektor, so bedeutet $x \geqq 0$ (> 0), daß jede Komponente $x_i \geqq 0$ (> 0) ist. Analog besagt $C \geqq 0$ für eine Matrix $C = (c_{ij})$, daß $c_{ij} \geqq 0$ für $i, j = 1, \ldots, n$ ist.

Es sei $\Delta = \operatorname{diag}(\Delta_i)$ eine Diagonalmatrix, $C \geqq 0$ eine nichtnegative Matrix und $B = \Delta - C$.

B heißt M-Matrix, wenn B nichtsingulär und $B^{-1} \geqq 0$ ist. Bekanntlich ([3], p. 58, [7], p. 83) sind für B folgende Aussagen äquivalent:

I. B ist M-Matrix.

II. Es existiert ein $v > 0$ mit $B\,v > 0$.

III. $\Delta_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ist ϱ der Spektralradius von $\Delta^{-1} C$, so ist $\varrho < 1$.

Für irreduzibles C ([7], p. 18) ist jede dieser Aussagen äquivalent zu

IV. Es existiert $v \geqq 0$ mit $B\,v \geqq 0$, $B\,v \neq 0$.

Daß IV aus II folgt, ist evident. Aus dem etwas weitergehenden Lemma 1 ergibt sich, daß IV seinerseits III impliziert.

Lemma 1: *Ist C irreduzibel, $v \geqq 0$, $v \neq 0$ und $B\,v \geqq 0$, so ist $v > 0$ und $\Delta_i > 0$ für alle i. Ist zudem $B\,v \neq 0$, so ist $\varrho(\Delta^{-1} C) < 1$.*

Beweis: Es sei $I = \{i : v_i = 0\}$. Wegen $C\,v \leqq \Delta v$ gilt $\sum\limits_{j \notin I} c_{ij}\, v_j = \sum\limits_{j} c_{ij}\, v_j = 0$ für alle $i \in I$. Also ist $c_{ij} = 0$ für $i \in I$, $j \notin I$. Ist I nicht leer, so ist das ein Widerspruch zur Irreduzibilität von C. Daher ist $v > 0$ und folglich $C\,v > 0$. Es folgt $\Delta_i > 0$.

Ist $B\,v \neq 0$, so gilt auch $\Delta^{-1} C\,v \leqq v$ mit Ungleichheit und daher nach dem Quotientensatz für irreduzible nichtnegative Matrizen ([7], Th. 2.2) $\varrho(\Delta^{-1} C) < 1$.

Eine leichte Folgerung aus Lemma 1 ist

Lemma 2: *Ist C irreduzibel, $v \geqq 0$, $v \neq 0$, w beliebig und $B\,v \geqq 0$, $B\,w = 0$, so existiert ein α mit $w = \alpha\, v$.*

Beweis: Für $w = 0$ ist die Aussage richtig. Andernfalls kann man, da nach Lemma 1 $v > 0$ ist, ein α so finden, daß zwar $v - \alpha\, w \geqq 0$, aber $v_i = \alpha\, w_i$ für ein i ist. Wegen $B\,(v - \alpha\, w) \geqq 0$ zeigt Lemma 1 nun, daß $v - \alpha\, w = 0$ ist.

Es sei H eine $n \times n$-Matrix mit $h_{ij} \geqq 0$ für $i \neq j$. Dann ist $M_H = \{D : D = \operatorname{diag}(d_i),$ $D - H$ ist M-Matrix$\}$ nichtleer. Für genügend große α ist nach II nämlich $\alpha\, E \in M_H$. (E = Einheitsmatrix). M_H ist, als Punktmenge des R^n betrachtet, nach II offen.

Es sei $\dot{M}_H$ der Rand von M_H und $\overline{M}_H = \dot{M}_H \cup M_H$.

Satz 1: *Sei H irreduzibel. Ist $D \in M_H$, so existiert (bis auf einen positiven Faktor) genau ein Vektor $z > 0$ mit*

$$Dz = H\,z\,. \tag{2.1}$$

Umgekehrt folgt aus (2.1) mit $z > 0$, daß $D \in \dot{M}_H$ ist.

Beweis: Ist $D \in \dot{M}_H$, so existiert eine Folge $\{D_i\} \subset M_H$ mit $\lim D_i = D$ und dazu $v_{(i)} > 0$ mit $D_i\, v_{(i)} > H\, v_{(i)}$. Wir setzen voraus, daß die $v_{(i)}$ normiert sind. Sie enthalten eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit $v_{(i)}$ bezeichnen. Es sei $z = \lim v_{(i)}$. Offenbar ist $z \geqq 0$ und $z \neq 0$. Es ist

$$(D - H)\, z = \lim\, (D_i - H)\, v_{(i)} \geqq 0\,.$$

Wegen Lemma 1 ist $z > 0$ und $(D - H)\, z = 0$, weil nach IV andernfalls $D \in M_H$ wäre. Nach Lemma 2 ist z eindeutig. Ist umgekehrt $D\,z = H\,z$, so kann nach Lemma 2 und IV die Matrix D kein Element aus M_H sein. Andererseits gilt aber $D \in \overline{M}_H$, weil für alle $\alpha > 0$ die Ungleichung $(D + \alpha\, E)\, z - H\, z = \alpha\, z > 0$ besteht, d. h. $D + \alpha\, E \in M_H$ ist.

3.

Nun wenden wir uns dem in 1. formulierten Problem zu. Es sei A eine irreduzible Matrix mit $a_{11} = \cdots = a_{pp}$ und $0 < p < n$. Wir können ohne Einschränkung $a_{11} = 0$ voraussetzen. Es sei P wie in (1.5) definiert und nichtleer. Ist $x \in P$, so gilt

$$|a_{jj}| - \Lambda_i(x) - \Lambda_j(x) \geqq 0\,, \qquad i = 1, \ldots, p\,; \quad j = p+1, \ldots, n\,. \tag{3.1}$$

Mit $\Lambda(x) = \max\limits_{i=1,\ldots,p} \Lambda_i(x)$ kann man (3.1) auch so schreiben:

$$\begin{cases} \Lambda_i(x) \leqq \Lambda(x)\,, & i = 1, \ldots, p\,; \\ \Lambda_i(x) \leqq |a_{jj}| - \Lambda(x)\,, & j = p+1, \ldots, n \end{cases} \tag{3.2}$$

oder

$$\Lambda(x)\, E_p\, x - H\, x \geqq 0 \tag{3.3}$$

mit $E_p = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots -1}_{n-p})$, $H = (h_{ij})$, $h_{ij} = \begin{cases} |a_{ij}| & i \neq j\,, \\ -|a_{jj}| & i = j\,. \end{cases}$

Wir haben also

$$x \in P \Rightarrow \Lambda(x)\, E_p \in \overline{M}_H\,. \tag{3.4}$$

Satz 2: *Sind Λ_0, M_0 wie in (1.6), (1.7) definiert, so existieren unter den obigen Voraussetzungen $x_0, z_0 > 0$ mit*

$$\Lambda_0\, E_p\, x_0 = H\, x_0\,, \qquad M_0\, E_p\, z_0 = H\, z_0\,. \tag{3.5}$$

x_0, z_0 sind bis auf positive Faktoren eindeutig bestimmt. Zudem gilt

$$\Lambda_1(x_0) = \cdots = \Lambda_p(x_0) = \Lambda_0\,,$$
$$\Lambda_1(z_0) = \cdots = \Lambda_p(z_0) = M_0\,.$$

Beweis: Da P nichtleer ist, ist nach (3.4) auch die Menge $\hat{M}$ aller μ mit $\mu\, E_p \in \overline{M}_H$ nichtleer. Da die Diagonalglieder einer M-Matrix positiv sind, ist $\hat{M}$ nach oben und unten beschränkt. Sei $\mu_0 = \inf\{\mu : \mu \in \hat{M}\}$, $\mu_1 = \sup\{\mu : \mu \in \hat{M}\}$. Dann ist $\mu_i\, E_p \in \dot{M}_H$ $(i = 0, 1)$. Nach Satz 1 existieren nun $x_0 > 0$, $z_0 > 0$ mit $\mu_0\, E_p\, x_0 = H\, x_0$ und $\mu_1\, E_p\, z_0 = H\, z_0$. Es gilt $\mu_0 = \Lambda(x_0)$, $\mu_1 = \Lambda(z_0)$. Die Gleichungen (3.2) sind erfüllt. Daher ist $x_0, z_0 \in P$ und $\Lambda_0 \leqq \mu_0 \leqq \mu_1 \leqq M_0$. Wäre $\Lambda_0 < \mu_0$, so existierte ein $x \in P$ mit $\Lambda_0 \leqq \Lambda(x) < \mu_0$. Nach (3.4) wäre $\Lambda(x) \in \hat{M}$. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von μ_0. Ebenso zeigt man $M_0 = \mu_1$.

Definieren wir $Q = E_p^{-1}\, H = E_p\, H$, so sind nach (3.5) x_0, z_0 Eigenvektoren von Q zu den Eigenwerten Λ_0, M_0. Der kleinste GERSCHGORIN-Radius ist also der kleinste Eigenwert von Q, zu dem ein positiver Eigenvektor gehört. In dieser Formulierung sind die obigen Ergebnisse direkte Verallgemeinerungen der Hauptresultate in [6] und [8] (dort ist der Fall $p = 1$ behandelt) auf beliebige $0 < p < n$.

4.

Es sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller Matrizen mit der Eigenschaft, daß die Koeffizienten jeder Zeile außerhalb der Diagonalen gleiche Beträge haben. Sei $A \in \mathfrak{A}$, $|a_{ik}| = m_i$, $i \neq k$. Weiterhin sei wie in 3. $a_{ii} = 0$ für $i = 1, \ldots, p$. Es gilt

$$-H + \lambda\, E_p = -\, m\, e' + D \tag{4.1}$$

mit $m' = (m_1, \ldots, m_n)$, $e' = (1, \ldots, 1)$, $D = \operatorname{diag}(d_i)$

$$d_i = \begin{cases} m_i + \lambda\,, & i = 1, \ldots, p\,, \\ |a_{ii}| + m_i - \lambda\,, & i = p+1, \ldots, n\,. \end{cases}$$

Dabei ist x' der zum Spaltenvektor x gehörige transponierte Zeilenvektor, $m\, e'$ das dyadische Produkt.

P ist bei irreduziblem A genau dann nichtleer, wenn $\lambda\, E_p \in \overline{M}_H$ für ein λ ist. Das ist wegen III genau dann der Fall, wenn

$$\varrho(D^{-1}\, m\, e') \leqq 1\,, \qquad d_i > 0\,, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4.2}$$

ist. $D^{-1}\, m\, e'$ hat als einzigen positiven Eigenwert $\varrho = e'\, D^{-1}\, m$ mit dem positiven Eigenvektor $D^{-1}\, m$. Das ergibt

$$\varrho = \sum_{i=1}^{p} \frac{m_i}{m_i + \lambda} + \sum_{i=p+1}^{n} \frac{m_i}{|a_{ii}| + m_i - \lambda}\,. \tag{4.3}$$

Ist $m > 0$, so ist A irreduzibel, und wir können den folgenden Satz aussprechen, der ein Ergebnis von PORSCHING [4] verallgemeinert. Zuvor bemerken wir noch, daß (4.2) äquivalent ist mit

$$\varrho \leqq 1\,, \qquad \lambda \in J = [0, \min_{i>p} |a_{ii}|]\,.$$

Satz 3: *Ist $A \in \mathfrak{A}$, $m > 0$, $a_{ii} = 0$ für $i = 1, \ldots, p$, so ist P genau dann nichtleer, wenn für ein $\lambda \in J$ gilt*

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{m_i}{m_i + \lambda} + \sum_{i=p+1}^{n} \frac{m_i}{|a_{ii}| + m_i - \lambda} \leqq 1\,.$$

In $|z| \leqq \lambda$ liegen dann mindestens p Eigenwerte von A.

Die Bedeutung von Satz 3 liegt darin, daß man in einfacher Weise daraus ein hinreichendes Kriterium für die Trennbarkeit herleiten kann [4].

Sei A jetzt wieder beliebig, $M_i = \max_{i \neq k} |a_{ik}|$, $a_{ii} = 0$ für $i = 1, \ldots, p$. Ersetzen wir die a_{ik} für $i \neq k$ durch M_i, so ist die neue Matrix $\hat{A}$ in $\mathfrak{A}$ enthalten. Können die GERSCHGORIN-Kreise von $\hat{A}$ getrennt werden, so gilt dasselbe von A. Daher folgt

Satz 4: *Ist*

$$M_i = \max_{i \neq k} |a_{ik}| \neq 0 \quad \text{für} \quad i = 1 \ldots n \quad \textit{und} \quad \sum_{i=1}^{p} \frac{M_i}{M_i + \lambda} + \sum_{i=p+1}^{n} \frac{M_i}{|a_{ii}| + M_i - \lambda} \leqq 1$$

für ein $\lambda \in J$, so können $\Gamma_1 \ldots \Gamma_p$ von den übrigen Γ_i getrennt werden. In $|z| \leqq \lambda$ liegen dann mindestens p Eigenwerte von A.

Satz 4 verallgemeinert die Aussage von Satz 2 in [4]. Auch Satz 4 in [4] kann übertragen werden.

5.

Das JACOBI-Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte einer hermiteschen Matrix A besteht darin, eine Folge von zu A ähnlichen Matrizen A_i zu konstruieren, die gegen eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von A in der Hauptdiagonalen streben. Man bricht das Verfahren ab, wenn alle Nichtdiagonalglieder unterhalb einer vorgegebenen Schranke ε liegen. Wie weit sind die Diagonalglieder von den Eigenwerten entfernt? Mit dieser Frage befassen sich mehrere Arbeiten ([1], dort ausführliche Literaturangaben). Besondere Schwierigkeiten bereitet dabei der Fall, daß gewisse Diagonalglieder nahe beieinander liegen oder sogar gleich sind. Satz 4 ist nun ein Hilfsmittel, gerade den letzten Fall zu erledigen.

Es sei A eine Matrix mit $|a_{ik}| \leqq \varepsilon$, $a_{ii} = 0$ für $i = 1, \ldots, p$, $\min_{i>p} |a_{ii}| = d$. Dann sind nach Satz 4 in $|z| \leqq \Lambda_1$ mindestens p Eigenwerte enthalten, wenn nur

$$p\, \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \Lambda_1} + \varepsilon \sum_{i=p+1}^{n} \frac{1}{|a_{ii}| + \varepsilon - \Lambda_1} \leqq 1 \tag{5.1}$$

ist. Das ist sicher der Fall, wenn Λ_1 die kleinste Wurzel von

$$\frac{p\, \varepsilon}{\varepsilon + \lambda} + \frac{(n-p)\, \varepsilon}{d + \varepsilon - \lambda} = 1$$

ist, die sich nach leichter Rechnung zu

$$\tilde{\Lambda}_1 = \frac{1}{2} \{d - n\,\varepsilon + 2\,p\,\varepsilon - [(d - n\,\varepsilon + 2\,p\,\varepsilon)^2 - 4\,(n-1)\,\varepsilon^2 - 4\,d\,\varepsilon\,(p-1)]^{1/2}\} \tag{5.2}$$

ergibt. Für

$$\varepsilon \leqq \frac{d}{n - 2 + 2\sqrt{p\,(n-p)}} \tag{5.3}$$

ist die in (5.2) auftretende Diskriminante nichtnegativ. Wir haben damit

Satz 5: *Unter der Voraussetzung (5.3) liegen in $|z| \leqq \tilde{\Lambda}_1$ mindestens p Eigenwerte von A.*

Entwickelt man $\tilde{\Lambda}_1$ nach Potenzen von ε, so ergibt sich

$$\tilde{\Lambda}_1(\varepsilon) = (p-1)\,\varepsilon + p\,(n-p)\,\frac{\varepsilon^2}{d} + p\,(n-p)\,(n-2)\,\frac{\varepsilon^3}{d^2} + O(\varepsilon^4)\,. \tag{5.4}$$

HADELER [1] zeigt auf einem anderen Wege, daß unter etwas anderen Bedingungen für ε in

$$|z| \leq \frac{(p-1)[d-(n-1)\varepsilon]+(n-1)\varepsilon}{d-(2n-p-2)\varepsilon} \cdot \hat{\Lambda}_1 \tag{5.5}$$

p Eigenwerte liegen. Die rechte Seite von (5.5) hat die Entwicklung

$$(p-1)\varepsilon + p(n-p)\frac{\varepsilon^2}{d} + p(n-p)(2n-p-2)\frac{\varepsilon^3}{d^2} + O(\varepsilon^4),$$

weicht also von (5.4) erst in der dritten Ordnung ab. Im gemeinsamen Geltungsbereich ist die Fehlerschranke von Satz 5 stets etwas besser als (5.5).

Beispiel: Im Falle $n = 4$, $p = 2$, $d = 1$ ergibt sich

bei $\varepsilon = 0{,}1$: $\hat{\Lambda}_1 = 0{,}1666$, $\tilde{\Lambda}_1 = 0{,}154$,

bei $\varepsilon = 0{,}125$: $\hat{\Lambda}_1 = 0{,}25$, $\tilde{\Lambda}_1 = 0{,}22$.

Die Schranke (5.2) ist nicht mehr zu verbessern, da die Matrix Q

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \dots & & & & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \dots & & & \varepsilon \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \varepsilon \dots & \varepsilon & 0 & \varepsilon \dots & & \varepsilon \\ -\varepsilon \dots & & -\varepsilon & d & -\varepsilon \dots & -\varepsilon \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \ddots & \cdot \\ -\varepsilon \dots & & & -\varepsilon & & -\varepsilon \\ -\varepsilon \dots & & & & -\varepsilon & d \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{matrix}}\right\} p \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\0\end{matrix}}\right\} n-p \end{array}$$

die folgenden Eigenwerte hat: $-\varepsilon$ $(p-1)$-fach, $d+\varepsilon$ $(n-p-1)$-fach sowie $\tilde{\Lambda}_1$ und $\tilde{\Lambda}_2$, wobei sich $\tilde{\Lambda}_2$ von $\tilde{\Lambda}_1$ durch das Vorzeichen der Wurzel in (5.2) unterscheidet.

Liegen $a_{11}, \dots, a_{pp}$ dicht beisammen, während die übrigen a_{jj} weiter entfernt sind, so kann man folgendermaßen vorgehen (HADELER, mündliche Mitteilung):

Es sei $-c \leq a_{ii} \leq c$ $(i = 1, \dots, p)$, $\min\limits_{j>p} |a_{jj}| = d \gg c$ und A hermitesch. Man ersetze a_{ii} für $i = 1, \dots, p$ durch 0. Die so abgeänderte Matrix $\tilde{A}$ habe die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_i$ und A die Eigenwerte λ_i. Dann kann man nach einem Satz von WEYL ([9], S. 224) die $\tilde{\lambda}_i$ so numerieren, daß $|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i| \leq c$ für alle i gilt. Die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_i$ können nach Satz 5 eingeschlossen werden. Damit gewinnen wir auch Schranken für die λ_i.

Literatur

1 K. P. HADELER, Über Matrixnormen, GERSCHGORIN-Kreise und JACOBI-Rotation, Computing Vol. 1, 273–280 (1966).
2 P. HENRICI, Bounds for Eigenvalues of Certain Tridiagonal Matrices, SIAM 11, 281–290 (1963).
3 A. S. HOUSEHOLDER, The Theory of Matrices in Numerical Analysis, New York 1963.
4 T. A. PORSCHING, Diagonal Similarity Transformations which isolate GERSCHGORIN Disks, Num. Math. 8, 437–443 (1966).
5 O. TAUSSKY, Eigenvalues of finite Matrices, in: A Survey of Numerical Analysis (ed. TODD), 1962.
6 J. TODD, On Smallest Isolated GERSCHGORIN-Disks for Eigenvalues, Num. Math. 7, 171–175 (1965).
7 R. S. VARGA, Matrix Iterative Analysis, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall Inc. 1962.
8 R. S. VARGA, On Smallest Isolated GERSCHGORIN-Disks for Eigenvalues, Num. Math. 6, 366–376 (1964).
9 F. RIESZ and B. SZ.-NAGY, Vorlesungen über Funktionalanalysis, Berlin 1956.

Manuskripteingang: 3. 2. 1967

Anschrift: LUDWIG ELSNER, 2 Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 67/69, Institut für Angewandte Mathematik