Die Optimierung, die W zum Minimum macht, läßt sich bei dem einfachen Ergebnis von Gl. (7) sogleich durchführen und liefert das Resultat

$$W_{\min} = \sqrt{2} \tag{8}$$

bei

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{9}$$

Mit Gl. (9) hat das vorgeschlagene Kriterium also genau das Dämpfungsmaß ermittelt, dem in der Praxis seit langem der Vorrang gegeben wird.

Es sei noch erwähnt, daß sich das Kriterium (6) auch bewährt, wenn das Dämpfungsmaß eine Funktion der Zeit $\alpha = \alpha(\tau)$ ist. Im Falle der sprungförmigen Auslenkung muß statt von Gl. (6) von dem allgemeineren Ansatz

$$W = \int_0^\infty \left(1 - \frac{E_D(\tau)}{E_D(\infty)}\right) d\tau \tag{10}$$

ausgegangen werden.

Literatur

1 K. Magnus, Schwingungen, Stuttgart 1961 B. G. Teubner Verlagsgesellschaft.
2 M. Schuler, Mechanische Schwingungslehre, Teil I: Einfache Schwinger, Leipzig 1958 Akademische Verlagsgesellschaft.
3 W. Härtel et al., Lichtstrahloszillographen München 1961 Oldenburg-Verlag.

Anschrift: Dr.-Ing. Jochen Haeusler, 851 Fürth/Bay., Friedensstraße 22

L. Elsner

Bemerkungen zum Zeilensummenkriterium

1. Einleitung

Der Begriff des „Zeilensummenkriteriums", wie er in der Literatur gebraucht wird, ist in mancher Hinsicht theoretisch nicht befriedigend. Hier wird eine andere Definition vorgelegt, die den Vorteil hat, daß eine größere Klasse von Matrizen erfaßt wird und daß die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens garantiert ist. Wie bei den üblichen Zeilensummenkriterien gilt auch hier, daß mit $A = L + R$ (Bezeichnungen siehe 2.) auch die Einzelschrittmatrix $C = (E - L)^{-1}R$ das Kriterium erfüllt. Einige Betrachtungen in [1] (eine Diskussion darüber regte diese Note an) können damit vereinfacht und das dortige Hauptergebnis etwas verallgemeinert werden.

2. Verallgemeinertes Zeilensummenkriterium

Es sei $A = (a_{jk})$ eine $n \times n$-Matrix. Ungleichungen $x < y$ ($x \leqq y$) zwischen Vektoren bzw. Matrizen bedeuten, daß die Ungleichungen komponentenweise gelten. Mit $|A|$ werde die Matrix $(|a_{jk}|)$ bezeichnet.

Definition: *A erfüllt das „verallgemeinerte Zeilensummenkriterium" (VZK), wenn es ein $x > 0$ gibt mit* $|A|\, x < x$.

Für das Einzelschrittverfahren zerlegt man A in eine untere Dreiecksmatrix L (mit $l_{ii} = 0$) und eine obere Dreiecksmatrix R.

Satz 1: *Mit $A = L + R$ erfüllt auch die Einzelschrittmatrix $C = (E - L)^{-1} R$ das VZK. (E = Einheitsmatrix).*

Der Beweis folgt unmittelbar aus

Satz 2: *Ist $|A|\, x \leqq \alpha x$, $x \geqq 0$, $\alpha \leqq 1$, so gilt auch $|C|\, x \leqq \alpha x$.*

Beweis: Es ist wegen $L^n = 0$ für $0 < \alpha \leqq 1$:

$$\begin{aligned} 0 \leqq |C| &= |R + L R + \cdots + L^{n-1} R| \leqq \\ &\leqq (E + \alpha^{-1}|L| + \cdots \alpha^{1-n}\, |L|^{n-1})\,|R| = \\ &= (E - \alpha^{-1}\,|L|)^{-1}\,|R|. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$|A|\, x = |L|\, x + |R|\, x \leqq \alpha\, x,$$

also

$$|R|\, x \leqq \alpha\, (E - \alpha^{-1}\,|L|)\, x.$$

Wegen $(E - \alpha^{-1}\,|L|)^{-1} \geqq 0$ folgt daraus $(E - \alpha^{-1}\,|L|)^{-1}\,|R|\, x \leqq \alpha\, x$, also erst recht $|C|\, x \leqq \alpha\, x$. Ist $\alpha = 0$, so folgt wegen $|A|\, x \leqq \varepsilon\, x$ nun $|C|\, x \leqq \varepsilon\, x$ für alle $1 \geqq \varepsilon > 0$, also $|C|\, x = 0$, q.e.d.

3. Schwaches und verallgemeinertes Zeilensummenkriterium

Der nächste Satz behandelt die Frage, wann das „schwache Zeilensummenkriterium" (I) das VZK nach sich zieht.

Satz 3: *Es sei*

$$\text{(I)}\quad \alpha_i = \sum_j |a_{ij}| \begin{cases} < 1 & i \in \sigma \\ = 1 & i \in \tau \end{cases} \quad \sigma \cup \tau = \{1, \ldots, n\}, \quad \sigma \neq \varnothing.$$

Gilt zusätzlich

(V): „Zu jedem $\tilde{\tau} \subset \tau$ existiert $i \in \tilde{\tau}$, $j \notin \tilde{\tau}$ mit $a_{ij} \neq 0$", *so ist das VZK erfüllt.*

Beweis: (I) besagt $|A|\, e \leqq e$ ($e' = (1, 1, \ldots, 1)$). Es gilt für alle $s \geqq 1$: $|A|^s\, e \leqq |A|^{s-1}\, e \leqq e$. Es ist also $\tau_s = \{i|\, (|A|^s\, e)_i = 1\} \subset \tau_{s-1} \subset \tau$. Sei $d = |A|^s\, e$ und $\tau_s \neq \varnothing$. Wir zeigen: Es existiert $i \in \tau_s$ mit $(|A|\, d)_i < 1$. Wegen $\tau_s \subset \tau$ und (V) gibt es nämlich $i \in \tau_s$, $j \notin \tau_s$, $a_{ij} \neq 0$. Daher

$$(|A|\, d)_i = |a_{ij}|\, d_j + \sum_{k \neq j} |a_{ik}|\, d_k < \sum_k |a_{ik}| = 1\,.$$

Es folgt $|A|^{n-1}\, e < e$. Mit

$$x = e + |A|\, e + \cdots + |A|^{n-2}\, e > 0$$

ist dann auch $x - |A|\, x = (E - |A|^{n-1})\, e > 0$, q.e.d.

Bemerkung: Die Bedingung (V) wird von jeder der in [1] angegebenen Voraussetzungen $Z_1 - Z_3$ impliziert.

4. Schlußbemerkungen

a) Ist $x = e$ wählbar, so liegt das „starke Zeilensummenkriterium" vor.

b) A erfüllt das VZK genau dann, wenn der Spektralradius $\varrho(|A|) < 1$ ist (siehe etwa [2], S. 328).

c) Liegt das VZK vor, so folgt wegen $\varrho(M) \leqq \varrho(|M|)$ die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens $x_{n+1} = A\, x_n + r$ und nach Satz 1 die des Einzelschrittverfahrens $x_{n+1} = L\, x_{n+1} + R\, x_n + r$ gegen die Lösung von $x = A\, x + r$.

d) Ist x explizit bekannt, so sind Fehlerabschätzungen für die in c) angegebenen Verfahren (z. B. [3]) möglich.

Literatur

1 W. Walter, Bemerkungen zu Iterationsverfahren bei linearen Gleichungssystemen, Num. Math. **10**, 80–85 (1967).
2 E. Bohl, Eigenwertaufgaben bei monotonen Operatoren und Fehlerabschätzungen für Operatorgleichungen, Arch. rat. Mech. Anal. **22**, 313–332 (1966).
3 J. Albrecht, Zur Fehlerabschätzung beim Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren für lineare Gleichungssysteme, ZAMM **43**, 83–85 (1963).

Anschrift: Dr. Ludwig Elsner, Institut f. Angew. Mathematik der Universität Hamburg, 2 Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 67/69