ZAMM 50, 381–384 (1970)

Über Eigenwerteinschließungen mit Hilfe von Gerschgorin-Kreisen

Von L. Elsner

Meinem verehrten Lehrer Professor Dr. Dr. h. c. L. Collatz zum 60. Geburtstag gewidmet

Die Vereinigung gewisser Gerschgorin-Kreise einer Matrix A sei durch einen Kreis vom Radius r und Mittelpunkt γ von den übrigen Gerschgorin-Kreisen getrennt. Medley und Varga haben das minimale r, das bei festem γ durch Diagonaltransformationen von A erreicht werden kann, charakterisiert. Es wird gezeigt, daß dieses Ergebnis mit den in einer früheren Arbeit des Autors benutzten Methoden leicht bewiesen werden kann. Außerdem wird der maximale Radius charakterisiert, praktisch verwendbare Abschätzungen angegeben und gezeigt, daß A und die transponierte Matrix A^T die gleichen optimalen Radien haben.

Let the union of some Gerschgorin-disks of a matrix A be separated from the other disks by a circle of radius r and center γ. Medley and Varga have characterized the minimal r, which can be achieved by diagonal transformations of A and fixed γ. It is shown that this result can easily be proved with methods used in an earlier paper of the author. In addition, the maximal radius is characterized, easily computable bounds are given and it is shown, that A and the transposed matrix A^T have the same optimal radii.

Принимается что объединение некоторых окружностей Гершгорина матрицы A отделено окружностью с радиусом r и центром γ от остальных окружностей Гершгорина. Мэдлей и Варга охарактеризовали минимальное значение r, достигаемое при постоянном γ путём диагонального преобразования. Показано что этот результат может быть легко доказан методом, которым пользовался автор в одной из предыдущих работ. Кроме этого охарактеризован максимальный радиус, приведены практически применимые оценки и показано, что A и транспонированная матрица A^T обладают одинаковыми оптимальными радиусами.

1.

Es sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix, $x \geqq 0$ ein Vektor mit positiven Komponenten, $X = \operatorname{diag}(x_i) = (x_i\,\delta_{ik})$ und

$$A_i(x) = \frac{1}{x_i}\sum_{k \neq i} |a_{ik}|\,x_k \tag{1}$$

$$\Gamma_i(x) = \{z \in C : |z - a_{ii}| \leqq A_i(x)\} \tag{2}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ die Gerschgorin-Radien bzw. Gerschgorin-Kreise von $X^{-1} A X$. Sei $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann gilt bekanntlich für alle Teilmengen $\sigma, \tau \subset N$ mit $\sigma \cup \tau = N$, $\sigma \cap \tau = \emptyset$: *Ist $p = |\sigma|$ die Anzahl der Elemente von σ $(0 \leqq p \leqq n)$ und ist*

$$|a_{ii} - a_{jj}| - A_i(x) - A_j(x) \geqq 0 \;\forall\, i \in \sigma,\ \forall\, j \in \tau \tag{3}$$

so enthält $\bigcup_{i \in \sigma} \Gamma_i(x)$ mindestens p und $\bigcup_{j \in \tau} \Gamma_j(x)$ mindestens $n - p$ Eigenwerte von A (wenn man die Eigenwerte gemäß ihrer algebraischen Vielfachheit zählt). Siehe etwa [4].

Gerschgorin-Kreise bestimmen Einschließungsmengen bzw. Ausschließungsmengen für die Eigenwerte von A, die man durch passende Wahl von X zu optimieren sucht.

Wählt man etwa als Einschließungsmenge den kleinsten Kreis um 0, der alle $\Gamma_i(x)$ enthält, so ergibt sich die Aufgabe, dessen Radius

$$r(x) = \operatorname*{Max}_i\,(|a_{ii}| + A_i(x)) = \operatorname*{Max}_i\,(|A|x)_i/x_i$$

zu minimieren. Dabei ist $|A| = (|a_{ik}|)$. Der Quotienten-Satz von Collatz ([1], [7]) zeigt, daß $\inf r(x)$ gleich dem Spektralradius $\varrho(|A|)$ von $|A|$ ist.

Gibt es ein $x > 0$, so daß $0 \notin \bigcup_{i \in N} \Gamma_i(x)$ ist, so kann man als Ausschließungsmenge den größten Kreis um 0 betrachten, der keine inneren Punkte von $\bigcup_{i \in N} \Gamma_i(x)$ enthält. Hier suchen wir also

$$r(x) = \min_i\,(|a_{ii}| - A_i(x))$$

zu maximieren. Es ergibt sich unter Benutzung der Theorie der M-Matrizen

$$\sup r(x) = (\varrho(\hat{A}^{-1}))^{-1},$$

wobei $\hat{A} = ((2\,\delta_{ik} - 1)|a_{ik}|)$ ist.

Analog lassen sich die Real- und Imaginärteile der Eigenwerte abschätzen.

Der Fall, daß als Einschließungsmenge ein isolierter bzw. die Vereinigung mehrerer isolierter Gerschgorin-Kreise mit gleichem Mittelpunkt gewählt wird, wurde von Varga [6] und Todd [5] bzw. dem Autor [2] behandelt.

Eine allgemeinere Situation wurde in einer wenig später erschienenen Arbeit [3] von MEDLEY und VARGA betrachtet: Es gebe ein $x > 0$ und einen Kreis $K_{\gamma,r}$ mit Mittelpunkt γ und Radius r, so daß

$$\bigcup_{i\in\sigma} \Gamma_i(x) \subset K_{\gamma,r} \subset C\Big(\bigcup_{i\in\tau} \Gamma_i(x)\Big) \tag{4}$$

ist. Das ist eine stärkere Forderung als (3). $K_{\gamma,r}$ wird als Einschließungsmenge angesehen. Bei festem γ wird r über alle x mit der Nebenbedingung (4) minimiert. Es stellt sich heraus, daß die dortigen Ergebnisse auch mit den in [2] benutzten Schlußweisen zu gewinnen sind. Es gelingt gleichzeitig, auch das maximale r zu charakterisieren, also den eigenwertfreien Kreisring möglichst groß zu machen. Außerdem wird angedeutet, wie diese Charakterisierung mit den Hilfsmitteln in [3] zu gewinnen ist. Gewisse hinreichende Trennbarkeitsbedingungen in [2], die auch numerisch brauchbar sind, lassen sich auf diesen Fall übertragen.

Schließlich zeigen wir, daß die optimalen Schranken für A und A^T übereinstimmen.

2.

Wir stellen zunächst kurz einige Hilfsmittel zusammen. Ist $x = (x_i)$ ein Vektor, so bedeutet $x > 0$ ($\geqq 0$), daß alle $x_i > 0$ ($\geqq 0$) sind. Eine analoge Schreibweise wird für Matrizen verwendet.

Satz 1: *Ist $C \geqq 0$, $D = \operatorname{diag}(d_i)$ eine Diagonalmatrix und $B = D - C$, so sind, äqiuvalent*

(I) *B ist M-Matrix, d. h. B^{-1} existiert und $B^{-1} \geqq 0$.*

(II) *$d_i > 0$ für alle $i \in N$, $\varrho(D^{-1}C) < 1$.*

(III) *$\exists\, v > 0$ mit $Bv > 0$.*

Ist C irreduzibel, so gilt die zusätzliche Äquivalenz

(IV) *$\exists\, v \geqq 0$ mit $Bv \geqq 0$, $Bv \neq 0$.*

Beweis siehe [7] und [2].

Für $H = (h_{ik})$ mit $h_{ik} \geqq 0$ für $i \neq k$ sei

$$M(H) = \{d \in R^n : D - H \text{ ist } M\text{-Matrix}, \quad D = \operatorname{diag}(d_i)\}$$

$M(H)$ ist offen. Sei $\partial M(H)$ der Rand und $\overline{M(H)} = M(H) \cup \partial M(H)$ die Abschließung von $M(H)$.

Satz 2: ([2]) *H sei irreduzibel. Dann ist äquivalent*

(I) *$d \in \partial M(H)$.*

(II) *$\exists\, v > 0$ mit $(H v)_i = d_i v_i$ für alle $i \in N$.*

v ist bis auf einen positiven Faktor eindeutig.

Satz 3: *$M(H)$ und $\overline{M(H)}$ sind konvex. Für irreduzibles H ist $\overline{M(H)}$ strikt konvex.*

Beweis: Für $0 < \alpha < 1$ und $\xi, \eta > 0$ gilt $\xi^\alpha \eta^{1-\alpha} \leqq \alpha\xi + (1-\alpha)\eta$. Dabei liegt Gleichheit genau für $\xi = \eta$ vor. Seien $D = \operatorname{diag}(d_i)$ und $\tilde{D} = \operatorname{diag}(\tilde{d}_i)$ in $\overline{M(H)}$. Nach Satz 1, III und Satz 2, II existieren $x, y > 0$ mit $Hx \leqq \tilde{D}x$, $Hy \leqq Dy$. Mit $u = (u_i)$ und $u_i = x_i^\alpha y_i^{1-\alpha}$ ist dann

$$\frac{(Hu)_i}{u_i} = \sum_k h_{ik}\frac{u_k}{u_i} \leqq \sum_k h_{ik}\left(\alpha\frac{x_k}{x_i} + (1-\alpha)\frac{y_k}{y_i}\right) \leqq \alpha\tilde{d}_i + (1-\alpha)d_i \tag{5}$$

d. h. $Hu \leqq (\alpha\tilde{D} + (1-\alpha)D)u$ oder $\alpha\tilde{D} + (1-\alpha)D \in \overline{M(H)}$. Ebenso folgt die Konvexität von $M(H)$. Nun zeigen wir, daß $\overline{M(H)}$ für irreduzibles H strikt konvex ist, d. h. daß für $D, \tilde{D} \in \overline{M(H)}$, $D \neq \tilde{D}$ und $0 < \alpha < 1$ stets $\alpha\tilde{D} + (1-\alpha)D \in M(H)$ ist. Wir nehmen das Gegenteil an: $\alpha\tilde{D} + (1-\alpha)D \in \partial M(H)$. Dann steht wegen Satz 1, IV in (5) stets das Gleichheitszeichen. Daher ist $\tilde{D}x = Hx$, $Dy = Hy$ und wegen $D \neq \tilde{D}$ sind x und y linear unabhängig. Mithin ist $\pi = \{i : x_i = y_i\} \neq N$. O.B.d.A. können wir auch $x_1 = y_1$, also $\pi \neq \emptyset$ annehmen. Dann ist für $i \in \pi$, $k \notin \pi$ sicher $x_k/x_i \neq y_k/y_i$, also $u_k/u_i < \alpha\, x_k/x_i + (1-\alpha)y_k/y_i$. Aus der Gleichung in (5) folgt $h_{ik} = 0$ für $i \in \pi$, $k \notin \pi$. Das ist ein Widerspruch zur Irreduzibilität von H.

3.

Es sei $1 \leqq p = |\sigma| \leqq n - 1$ und P die Menge der Vektoren $x > 0$, für die bei festem γ und passendem $r = r(x)$ die Aussage (4) erfüllt ist, für die es also ein $r > 0$ gibt mit

$$|a_{ii} - \gamma| + \Lambda_i(x) \leqq r \leqq |a_{jj} - \gamma| - \Lambda_j(x) \quad \forall\, i \in \sigma, \quad \forall\, j \in \tau. \tag{6}$$

Für $x \in P$ gilt offenbar

$$\underline{r}(x) = \max_{i\in\sigma}\big(|a_{ii} - \gamma| + \Lambda_i(x)\big) \leqq \bar{r}(x) = \min_{j\in\tau}\big(|a_{jj} - \gamma| - \Lambda_j(x)\big).$$

Wir versuchen

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \inf\{\underline{r}(x) : x \in P\} \\ M_0 &= \sup\{\bar{r}(x) : x \in P\} \end{aligned} \tag{7}$$

zu bestimmen.

O. B. d. A. sei $\gamma = 0$ und $\sigma = \{1, \ldots, p\}$. Es sei ferner

$$H = H(A) = (h_{ik}) \text{ mit } h_{ik} = \begin{cases} -|a_{kk}| & i = k > p \\ |a_{ik}| & \text{sonst} \end{cases}$$

$$e_p = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{p\text{-mal}}, -1, \ldots, -1), \quad E_p = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p\text{-mal}}, -1, \ldots, -1).$$

Dann folgt sofort

Lemma 1: *Für einen Vektor $x > 0$ sind äquivalent*

(I) $\quad x \in P, \quad \underline{r}(x) \leqq \lambda \leqq \bar{r}(x)$

(II) $\quad (\lambda E_p - H)\, x \geqq 0$.

Beweis: Man beachte nur die Äquivalenz der Ungleichungen

$$|a_{ii}| + A_i(x) \leqq \lambda \leqq |a_{jj}| - A_j(x) \qquad i \leqq p < j$$

mit

$$(\lambda - |a_{ii}|)\, x_i - \sum_{k \neq i} |a_{ik}|\, x_k \geqq 0 \qquad i \leqq p$$

$$(|a_{jj}| - \lambda)\, x_j - \sum_{k \neq i} |a_{jk}|\, x_k \geqq 0 \qquad j > p.$$

Aus Satz 1 und Lemma 1 folgt nun

Lemma 2: *Für irreduzibles H und eine gegebene Zahl λ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(I) $\quad \lambda e_p \in \overline{M(H)}$.

(II) $\quad \exists\, x > 0$ *mit* $(\lambda E_p - H)\, x \geqq 0$.

(III) $\quad \exists\, x \in P$, *so daß* $\underline{r}(x) \leqq \lambda \leqq \bar{r}(x)$ *ist.*

Es sei im folgenden A und damit H irreduzibel,

$$A_1 = \inf\{\lambda : \lambda e_p \in \overline{M(H)}\}$$

Da die Diagonalelemente von M-Matrizen positiv sind, ist $A_1 > -\infty$. Offenbar ist $A_1 e_p \in \partial M(H)$. Nach Satz 2 existiert genau ein $x_0 > 0$ mit $A_1 E_p x_0 = H x_0$. Lemma 1 zeigt, daß $x_0 \in P$ ist, daß also $A_0 \leqq A_1$ ist. Ist $A_0 < A_1$, so gibt es ein $x \in P$ mit $A_0 \leqq \underline{r}(x) < A_1$. Nach Lemma 2 ist $\underline{r}(x)\, e_p \in \overline{M(H)}$, also $A_1 \leqq r(x)$. Es folgt $A_0 = A_1$. Ebenso können wir zeigen, daß

$$M_0 = M_1 = \sup\{\lambda : \lambda e_p \in \overline{M(H)}\}$$

ist und daß es ein $z_0 \in P$ mit $M_0 E_p z_0 = H z_0$ gibt. Es sei $Q = E_p^{-1} H$. Dann ist $Q x_0 = A_0 x_0$ und $Q z_0 = M_0 z_0$. Aus der strikten Konvexität von $M(H)$ folgt, daß A_0 und M_0 die einzigen Eigenwerte von Q mit positivem Eigenvektor sind. Wir fassen zusammen:

Satz 4: *Es sei A irreduzibel. Für $\gamma = 0$ und $\sigma = \{1, \ldots, p\}$ sei P nichtleer und A_0, M_0 wie in (7) definiert. Dann sind A_0 und M_0 der kleinste bzw. der größte Eigenwert von $Q = E_p^{-1} H$, der einen positiven Eigenvektor besitzt. Es existieren mindestens p Eigenwerte von A, die einen Betrag kleiner als oder gleich A_0, und mindestens $n - p$ Eigenwerte, die einen Betrag größer als oder gleich M_0 besitzen.*

4.

Man kann dieses Ergebnis auch mit den von Medley und Varga benutzten Mitteln erhalten. Wir nehmen in H die folgende Einteilung vor:

$$H = \left(\begin{array}{c|c} H_1 & H_2 \\ \hline H_3 & H_4 - kE \end{array}\right) \begin{array}{l} \} \; p \\ \} \; n - p \end{array}$$
$$\qquad\qquad \underbrace{}_{p} \;\; \underbrace{}_{n-p}$$

Dabei sei E die $(n-p)$-dimensionale Einheitsmatrix. Wählen wir $k \geqq \max\limits_{i>p} |a_{ii}|$ fest, so sind alle H_i $(i = 1, \ldots, 4)$ nichtnegativ.

In [3] und [6] wird die Iteration

$$\lambda_{i+1} = \varrho\,(H_1 + H_2\,(k - \lambda_i - H_4)^{-1}\, H_3)$$

betrachtet und gezeigt, daß für $\lambda_0 \in [A_0, M_0]$ gilt

$$\lambda_{i+1} \leqq \lambda_i \;\; (i = 0, 1, \ldots), \quad \lim \lambda_i = A_0.$$

Analog läßt sich beweisen: Ist

$$\mu_0 \in [A_0, M_0] \text{ und } \mu_{i+1} = k - \varrho\,(H_4 + H_3\,(\mu_i - H_1)^{-1}\, H_2) \;\; (i = 0, 1, \ldots),$$

so gilt

$$\mu_{i+1} \geqq \mu_i \quad \lim \mu_i = M_0.$$

5.

In diesem Abschnitt werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß bei $\gamma = 0$ und $\sigma = \{1, \ldots, p\}$ P nichtleer ist, daß also die Bedingung (4) für passendes x erfüllbar ist.

Es sei wie in [2] $\mathfrak{A}$ die Menge aller Matrizen mit der Eigenschaft, daß die Koeffizienten jeder Zeile außerhalb der Diagonalen gleiche Beträge haben. Sei $A \in \mathfrak{A}$, $m_i = |a_{ik}|$, $i \neq k$. Für $H = H(A)$ gilt dann

$$-H + \lambda E_p = -m e^T + D$$

mit $m^T = (m_1, \ldots, m_n)$, $e^T = (1, \ldots, 1)$, $D = \operatorname{diag}(d_i)$ und

$$d_i = \begin{Bmatrix} m_i + \lambda - |a_{ii}| & i \leqq p \\ |a_{ii}| + m_i - \lambda & i > p \end{Bmatrix}.$$

Nach Lemma 2 ist $P \neq \emptyset$ genau dann, wenn für ein λ der Vektor $\lambda e_p \in M(H)$ ist, d. h. wenn (siehe Satz 1, II)

$$\varrho(D^{-1} m e^T) \leqq 1, \qquad d_i > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ist. Wegen $\varrho(D^{-1} m e^T) = e^T D^{-1} m$ folgt

Satz 5: *Ist $A \in \mathfrak{A}$, $m > 0$, so ist $P \neq \emptyset$ genau dann, wenn es ein λ gibt mit*

$$\underline{d} = \max_{i \leqq p} |a_{ii}| \leqq \lambda \leqq \bar{d} = \min_{i > p} |a_{ii}|,$$

so daß

$$f(\lambda) = e^T D^{-1} m = \sum_{i \leqq p} \frac{m_i}{m_i - |a_{ii}| + \lambda} + \sum_{i > p} \frac{m_i}{m_i + |a_{ii}| - \lambda} \leqq 1$$

ist. Λ_0 und M_0 sind die kleinste bzw. größte Nullstelle von $f(\lambda) - 1$ in $(\underline{d}, \bar{d})$.

Wie in [2] ergibt sich daraus ein hinreichendes Kriterium für $P \neq \emptyset$:

Satz 6: *Ist $m_i = \max_{i \neq k} |a_{ik}| \neq 0$ und für ein λ in $(\underline{d}, \bar{d})$ $f(\lambda) \leqq 1$, so ist $P \neq \emptyset$.*

Ebenso überträgt sich Satz 5 von [2]. Genauer gilt:

Satz 7: *Sei $|a_{ik}| \leqq \varepsilon$ $(i \neq k)$, $w = \bar{d} - \underline{d} - (n - 2p)\varepsilon$,*

$$\alpha_{1,2} = \underline{d} + \frac{1}{2}\left(w \mp (w^2 - 4(n-1)\varepsilon^2 - 4(\bar{d} - \underline{d})(p-1)\varepsilon)^{1/2}\right)$$

und

$$\varepsilon \leqq \frac{\bar{d} - \underline{d}}{n - 2 + 2\sqrt{p(n-p)}}.$$

Dann ist $P \neq \emptyset$ und $\Lambda_0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq M_0$.

Es gibt also mindestens p Eigenwerte von A in $|z| \leqq \alpha_1$ und mindestens $n - p$ Eigenwerte von A in $|z| \geqq \alpha_2$.

Es sollte abschließend noch einmal daran erinnert werden, daß diese Aussagen nur für $\gamma = 0$ und $\sigma = \{1, \ldots, p\}$ gelten. Im konkreten Fall wird daher im allgemeinen noch eine Verschiebung und eine Permutation der Zeilen und Spalten erforderlich sein.

6.

Da A und ihre Transponierte A^T gleiche Eigenwerte besitzen, liegt es nahe, auch die Gerschgorin-Kreise von A^T zu betrachten. Sie sind zwar bei gleichem x i. a. von den $\Gamma_i(x)$ verschieden, es zeigt sich jedoch, daß für Λ_0 und M_0 dieselben Werte herauskommen, daß also die Minimalkonfigurationen, die ja nur durch die a_{ii} sowie Λ_0 und M_0 festgelegt sind, übereinstimmen.

Es gilt zunächst $H(A^T) = H^T(A)$. Weil eine Matrix B wegen $(B^{-1})^T = (B^T)^{-1}$ genau dann M-Matrix ist, wenn B^T es ist, gilt $\overline{M(H(A))} = \overline{M(H(A^T))}$. Aus $\Lambda_0 = \inf \{\lambda : \lambda e_p \in \overline{M(H)}\}$ und $M_0 = \sup \{\lambda : \lambda e_p \in \overline{M(H)}\}$ folgt nun die Behauptung.

Literatur

1 L. Collatz, Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen von Matrizen, Math. Z. 48, 221–226 (1942).
2 L. Elsner, Minimale Gerschgorin-Kreise, ZAMM 48 (1968), 51–56.
3 H. I. Medley, R. S. Varga, On Smallest Isolated Gerschgorin-Disks for Eigenvalues III, Num. Math. 11, 361–369 (1968).
4 O. Taussky, Eigenvalues of finite Matrices, in: A Survey of Numerical Analysis (ed. Todd), 1962.
5 J. Todd, On Smallest Isolated Gerschgorin-Disks for Eigenvalues, Num. Math. 7, 171–175 (1965).
6 R. S. Varga, On Smallest Isolated Gerschgorin-Disks for Eigenvalues, Num. Math. 6, 366–376 (1964).
7 R. S. Varga, Matrix Iterative Analysis, Englewood Cliffs, New Yersey, Prentice Hall Inc., 1962.

Manuskripteingang: 16. 10. 1969

Anschrift: Dr. Ludwig Elsner, 2000 Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 67/69, Institut für Angewandte Mathematik