definiert. Mit diesen werden die Folgen $\{u_n\}$ und $\{v_n\}$ gemäß

$$u_n = x_n - \xi_n - \varepsilon_n |\xi_n|, \quad v_n = x_n - \xi_n + \varepsilon_n |\xi_n| \quad (n = 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

berechnet. Dann gibt es einen Index n_0, so daß für alle $n \geqq n_0$ die Einschließung

$$u_n < u_{n+1} < x^* < v_{n+1} < v_n \tag{7}$$

gilt. Die Schranken u_n und v_n sind im folgenden Sinne bessere Näherungen für x^* als x_n: Es gilt

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{|u_n - x^*|}{|x_n - x^*|} \\[2ex] \dfrac{|v_n - x^*|}{|x_n - x^*|} \end{array}\right\} = \left|\frac{f''(x^*)}{2 f'(x^*)}\right| |\delta_{n-2}| + o(\delta_{n-2}) \quad \text{für } n \to \infty; \tag{8}$$

dabei wurde $\delta_n = x_n - x^*$ gesetzt.

Beweis: Mit den Abkürzungen $A_2 = f''(x^*)/(2f'(x^*))$ und $A_3 = f'''(x^*)/(6f'(x^*))$ gelten unter den angegebenen Voraussetzungen die Beziehungen (vgl. [4])

$$\delta_n = A_2\, \delta_{n-1}^2 - 2\,(A_2^2 - A_3)\, \delta_{n-1}^3 + o(\delta_{n-1}^3)$$

und (9)

$$\zeta_n = A_2\, \delta_{n-1}^2 - 2\,(2\,A_2^2 - A_3)\, \delta_{n-1}^3 + o(\delta_{n-1}^3)\,.$$

Hieraus ergibt sich durch einfache Rechnung

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= |A_2|\, |\delta_{n-2}| + o(\delta_{n-2})\,, \\ u_n - x^* &= -\,|A_2|^4\, |\delta_{n-2}|^5 + o(\delta_{n-2}^5)\,, \\ v_n - x^* &= |A_2|^4\, |\delta_{n-2}|^5 + o(\delta_{n-2}^5)\,, \\ x_n - x^* &= A_2^3\, \delta_{n-2}^4 + o(\delta_{n-2}^4)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Wegen $A_2 \neq 0$ folgt aus (10) die Gültigkeit von (7) für hinreichend großes n. Die Behauptung (8) kann aus (10) unmittelbar abgelesen werden.

Bemerkung: Die gemäß (6) berechneten Folgen $\{u_n\}$ und $\{v_n\}$ konvergieren wie die NEWTON-Folge $\{x_n\}$ quadratisch gegen x^*.

Dies ergibt sich ebenfalls aus den asymptotischen Beziehungen (9) und (10).

Die Einschließung aus Satz 1 hat gegenüber der asymptotischen Einschließung aus Satz 2 globalen Charakter. Praktisch ist jedoch die Voraussetzung $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$ des ersten Satzes in der Regel auch nur in einer Umgebung einer Nullstelle x^*, d. h. für hinreichend „kleine" Intervalle $[a, b]$ erfüllt. Im Verfahren vom Satz 2 wird dagegen pro Schritt ein Funktionswert — nämlich $f(y_n)$ — weniger benötigt; außerdem kann auf die Voraussetzung $f(a) f(b) < 0$ verzichtet werden.

3. Weitgehend analoge Aussagen ergeben sich, wenn im Satz 2 die NEWTON-Folge $\{x_n\}$ durch eine nach der Regula falsi aus x_0', $x_1' \in [a, b]$ gemäß

$$x_{n+1}' = x_n' - \frac{f(x_n')}{\delta f(x_n', x_{n-1}')} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1'}$$

berechnete Folge $\{x_n'\}$ ersetzt wird. (4) ist dann durch

$$\xi_n' = \frac{f(x_n')}{\delta f(x_{n-1}', x_{n-2}')} \tag{4'}$$

zu ersetzen, während (5), (6) und (7) sinngemäß übernommen werden können. Die in diesem Fall gültigen asymptotischen Beziehungen lauten

$$\begin{aligned} \delta_n' &= A_2\, \delta_{n-1}'\, \delta_{n-2}' - (A_2^2 - A_3)\, \delta_{n-1}'\, \delta_{n-2}'^2 + o(\delta_{n-1}'\, \delta_{n-2}'^2)\,, \\ \xi_n' &= A_2\, \delta_{n-1}'\, \delta_{n-2}' - (2\,A_2^2 - A_3)\, \delta_{n-1}'\, \delta_{n-2}'^2 + o(\delta_{n-1}'\, \delta_{n-2}'^2) \end{aligned} \tag{9'}$$

sowie

$$\begin{aligned} \varepsilon_n' &= |A_2|\, |\delta_{n-3}'| + o(\delta_{n-3}')\,, \\ u_n' - x^* &= -\,|A_2|^3\, |\delta_{n-2}'|^2\, |\delta_{n-3}'|^2 + o(\delta_{n-2}'^2\, \delta_{n-3}'^2)\,, \\ v_n' - x^* &= |A_2|^3\, |\delta_{n-2}'|^2\, |\delta_{n-3}'|^2 + o(\delta_{n-2}'^2\, \delta_{n-3}'^2)\,, \\ x_n' - x^* &= A_2^2\, \delta_{n-2}'^2\, \delta_{n-3}' + o(\delta_{n-2}'^2\, \delta_{n-3}')\,. \end{aligned} \tag{10'}$$

4. Beispiel: $f(x) = x^{20} - 1$, $x^* = 1$ (vgl. [4]). Die numerischen Ergebnisse sind in den Tabellen 1 bzw. 2 angegeben[4]).

[4]) Gleitkommarechnung mit 36-bit-Mantisse.

Tabelle 1: Asymptotische Einschließungen beim NEWTON-Verfahren

n	x_n	u_n	v_n
0	0.90000000	—	—
1	1.22513685	—	—
2	1.16493551	1.13968461	1.14757450
3	1.10943811	1.07255061	1.10793839
4	1.06091663	1.03143529	1.05893950
5	1.02412726	1.00666531	1.02172586
6	1.00470759	0.99992466	1.00322957
7	1.00020377	0.99997373	1.00006034
8	1.00000039	0.99999998	1.00000001

Tabelle 2: Asymptotische Einschließungen bei der Regula falsi

n	x_n'	u_n'	v_n'
0	0.98000000	—	—
1	1.30000000	—	—
2	0.98056164	0.98056261	0.98165797
3	0.98110935	0.98164334	0.98164518
4	1.00401043	0.74633948	1.24964431
5	0.99924443	0.99992388	1.00028100
6	0,99997154	0.99999491	1.00000332
7	1.00000020	0.99999999	1.00000000

Literatur

1 A. N. BALUEV, Über die Methode von Chaplygin (russ.), Dokl. Akad. Nauk SSSR 83 S. 781—784 (1952).
2 A. OSTROWSKI, Solution of Equations and Systems of Equations, 2nd Ed., New York and London 1966, Academic Press.
3 V. ŠEDA, A Remark to Quasilinearization, J. Math. Anal. Appl. 23, 130—138 (1968).
4 J. F. TRAUB, Iterative Methods for the Solution of Equations, Englewood Cliffs, N.J., 1964, Prentice-Hall.

Anschrift: Dr. HUBERT SCHWETLICK, Sektion Mathematik der Technischen Universität, 8027 Dresden, Zellescher Weg 12—14

L. ELSNER und K. P. HADELER

Eigenwerteinschließung mit Lorentzkegeln

Unserem verehrten Lehrer Prof. Dr. Dr. h. c. L. COLLATZ zum 60. Geburtstag gewidmet.

In einer kürzlich erschienenen Note [3] wurde eine Abschätzung für einen Eigenvektor einer nichtlinearen Eigenwertaufgabe angegeben. Beim Beweis des Satzes wird der sogenannte Antipodensatz auf ein Vektorfeld auf der Sphäre angewandt, das durch den Gradienten des verallgemeinerten RAYLEIGH-Quotienten der Eigenwertaufgabe definiert ist. Für den Fall der linearen Eigenwertaufgabe ergeben sich eine Abschätzung des Eigenvektors zum größten Eigenwert einer symmetrischen Matrix sowie eine Ungleichung für diesen Eigenwert selbst.

In der vorliegenden Arbeit stellen wir eine Verbindung zwischen diesen Ergebnissen und der Theorie der halbgeordneten linearen Räume her. Es zeigt sich, daß die beiden genannten Abschätzungen als Aussagen über konvexe Kegel gedeutet werden können. Dabei ergibt sich die Abschätzung für den Eigenvektor mit Hilfe des minimalen Kegels einer gewissen Schar und die des Eigenwertes mit dem maximalen Kegel.

1. Einschließung des Eigenvektors

Sei $X = \mathbf{R}^n$ mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt $(\,,\,)$ und der zugehörigen (euklidischen) Norm $\|\cdot\|$. Seien $S = \{x \in X: \|x\| = 1\}$, $x_0 \in S$ und $\tau \in \mathbf{R}$, $0 < \tau < 1$. Dann ist

$$K_\tau = \{x: (x, x_0) \geqq \tau\, \|x\|\}$$

ein konvexer abgeschlossener Kegel mit inneren Punkten. Mit einer geeigneten Orthonormalbasis ist K_τ der durch

$$\alpha_1 \geqq \left(\frac{\tau^2}{1 - \tau^2} \sum_{j=2}^{n} \alpha_j^2\right)^{1/2}$$

definierte verallgemeinerte LORENTZkegel. K_τ definiert in X eine Halbordnung

$$x \geqq y \Leftrightarrow x - y \in K_\tau .$$

$\mathring{K}_\tau$ sei die Menge der inneren Punkte von K_τ und ∂K_τ der Rand. Der Dualkegel K' eines Kegels K im unitären Raum X ist definiert als

$$K' = \{y : (x, y) \geqq 0 \quad \forall\, x \in K\} .$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$(K_\tau)' = K_{\tau'} , \qquad \tau' = \sqrt{1 - \tau^2}$$

gilt.

Satz 1: *Sei A eine lineare Transformation von X in sich. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

$$(x, x_0) = \tau , \qquad \|x\| = 1 \;\Rightarrow \tau(A\,x, x) - (A\,x, x_0) < 0 . \tag{1}$$

Es gibt $c \in \mathbf{R}$, so daß

$$x \in K_\tau , \qquad x \neq 0 \;\Rightarrow (A + c\,I)\,x \in \mathring{K}_\tau . \tag{2}$$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2). Da S kompakt ist, gibt es ein $c < \infty$ mit

$$c > \sup_{\substack{x \in S \\ (x, x_0) = \tau}} \frac{(A\,x, x_0)^2 - \tau^2 (A\,x, A\,x)}{2\,\tau\,[\tau(A\,x, x) - (A\,x, x_0)]} .$$

Hieraus folgt

$$(A\,x + c\,x, x_0)^2 > \tau^2\,(A\,x + c\,x, A\,x + c\,x)$$
$$\forall \quad x \in S , \qquad (x, x_0) = \tau .$$

Da $\mathring{K}_\tau$ durch $(x, x_0) > \tau\,\|x\|$ charakterisiert wird, wird also $\partial K_\tau \cap S$ in $\mathring{K}_\tau$ abgebildet. Daraus folgt mit der Linearität von A die Behauptung.

(2) $\Rightarrow$ (1). Gibt es ein solches c, so folgt

$$(A\,x, x_0)^2 - \tau^2 (A\,x, A\,x) > 2\,c\,\tau\,[\tau(A\,x, x) - (A\,x, x_0)] \tag{3}$$

für alle $x \in \partial K_\tau \cap S$. Die Bedingung (3) gilt mit c auch für jedes $\tilde{c} > c$. Das ist nur möglich, wenn $\tau(A\,x, x) - (A\,x, x_0) \leqq 0$ ist. Tritt hier einmal Gleichheit ein, so folgt aus

$$\tau^2 (A\,x, x)^2 = (A\,x, x_0)^2 > \tau^2 (A\,x, A\,x) = \tau^2 (A\,x, A\,x)\,(x, x) ,$$

ein Widerspruch zur Definitheit der GRAMschen Determinante.

Satz 2: *Sei* (1) *für ein τ mit $0 < \tau < 1$ erfüllt. Dann besitzt A genau einen Eigenwert von maximalem Realteil. Dieser ist reell und einfache Wurzel des charakteristischen Polynoms. K_τ enthält einen zugehörigen Eigenvektor (und keine Eigenvektoren zu anderen Eigenwerten).*

Beweis: Sei c so gewählt, daß $A + c\,I$ den Kegel K (außer der Null) in sein Inneres abbildet. Aus dem Satz von KREIN und RUTMAN folgt, daß der Spektralradius von $A + c\,I$ ein Eigenwert mit einem Eigenvektor in K_τ ist. Aus einer Verschärfung dieses Satzes ([4], p. 76, Theorem 2.10 und 2.11) folgt, daß der Spektralradius einfache Wurzel des charakteristischen Polynoms ist und daß es in K_τ keine Eigenvektoren zu anderen Eigenwerten gibt.

2. Einschließung des Eigenwertes

Mit dem Vektor x_0 definieren wir SCHWARZsche Konstanten

$$a_0 = (x_0, x_0) = 1 , \qquad a_1 = (A\,x_0, x_0) , \qquad a_2 = (A\,x_0, A\,x_0) .$$

Satz 3: *Sei* (1) *für ein τ mit $0 < \tau < 1$ erfüllt. Dann gilt für den Eigenwert λ_1 von A mit dem größten Realteil die Einschließung*

$$|\lambda_1 - a_1| \leqq \frac{\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} \sqrt{a_2 - a_1^2} . \tag{4}$$

Beweis: Nach Satz 1 gibt es c, so daß $\hat{A} = A + c\,I$ die Bedingung $\hat{A}\,K_\tau \subset K_\tau$ erfüllt. Sei

$$m_1 = \sup\,\{\alpha : \hat{A}\,x_0 - \alpha\,x_0 \in K_\tau\} ,$$

$$m_2 = \inf\,\{\alpha : \alpha\,x_0 - \hat{A}\,x_0 \in K_\tau\} ,$$

also $m_1\,x_0 \leqq \hat{A}\,x_0 \leqq m_2\,x_0$.

Ist r der Spektralradius von $\hat{A}$ bzw. $\hat{A}^*$ und ist $y \in K_\tau'$, $y \neq 0$, $A\,y = r\,y$, so folgt $m_1(x_0, y) \leqq (\hat{A}\,x_0, y) \leqq m_2(x_0, y)$, $m_1 \leqq r \leqq m_2$, $m_1 - c \leqq \lambda_1 = r - c \leqq m_2 - c$. Die Zahlen $m_1 - c$, $m_2 - c$ sind die Lösungen der Gleichung

$$(A\,x_0 - \alpha\,x_0, x_0)^2 = \tau^2 (A\,x_0 - \alpha\,x_0, A\,x_0 - \alpha\,x_0) ,$$

woraus die Behauptung folgt.

Aus dem Beweis ersieht man, daß Satz 3 ein „Quotientensatz" ist, der obige Beweis ist dem von L. COLLATZ [2], p. 306 nachgebildet, für allgemeinere Fälle vgl. E. BOHL [1].

Im allgemeinen ist bei festem A und x_0 die Bedingung (1) für verschiedene τ erfüllt. Offenbar ergibt sich eine optimale Einschließung des Eigenvektors für das größte mögliche τ, eine optimale Einschließung des Eigenwertes aber für das kleinste.

3. Der symmetrische Fall

Im folgenden sei A eine symmetrische Transformation. Die Elemente von $\partial K_\tau \cap S$ lassen sich in der Form

$$x = \tau\,x_0 + \sqrt{1 - \tau^2}\,y , \qquad \|y\| = 1 , \qquad (y, x_0) = 0$$

darstellen. Daher ist die Bedingung

$$(y, x_0) = 0 , \ \|y\| = 1 \Rightarrow$$
$$(A\,y, y) - (A\,x_0, x_0) + \frac{2\,\tau^2 - 1}{\tau\sqrt{1 - \tau^2}} (A\,x_0, y) < 0 \tag{5}$$

zu (1) äquivalent (vgl. [3], wir übergehen die einfache Rechnung, die Symmetrie von A geht entscheidend ein).

Lemma 4: *Sei $\beta > 0$, es gelte*

$$(y, x_0) = 0 , \ \|y\| = 1 \Rightarrow$$
$$\beta\,|(A\,x_0, y)| < (A\,x_0, x_0) - (A\,y, y) . \tag{6}$$

Dann gilt Bedingung (1) *für alle τ mit $\tau_-(\beta) \leqq \tau \leqq \tau_+(\beta)$, wobei*

$$\tau_\pm(\beta) = \left\{\frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{\beta}{\sqrt{4 + \beta^2}}\right]\right\}^{1/2} .$$

Beweis: Die Bedingung (5) ist äquivalent zu

$$(y, x_0) = 0 , \ \|y\| = 1 \Rightarrow$$
$$(A\,y, y) - (A\,x_0, x_0) + \frac{2\,\tau^2 - 1}{\tau\sqrt{1 - \tau^2}} (A\,x_0, y) < 0 .$$

Nun folgt die Behauptung daraus, daß $\tau_+(\beta)$, $\tau_-(\beta)$ die Lösungen der Gleichung $|2\,\tau^2 - 1| = \beta\,\tau\sqrt{1 - \tau^2}$ bzw.

$$(\tau^2)^2 - \tau^2 + (4 + \beta^2)^{-1} = 0 \tag{7}$$

sind.

Aus (7) folgt noch $\tau_+^2(\beta) + \tau_-^2(\beta) = 1$, d. h. die Kegel $K_{\tau_+(\beta)}$ und $K_{\tau_-(\beta)}$ sind dual.

Wir fassen die Sätze 1, 2 sowie Lemma 4 zusammen.

Satz 5: *Sei A symmetrisch, sei $\beta > 0$, die Bedingung* (6) *sei erfüllt. Dann ist der größte Eigenwert von A einfach. Für den Eigenwert und den Eigenvektor gelten die Abschätzungen*

$$|\lambda_1 - a_1| \leqq \frac{\tau_-(\beta)}{\tau_+(\beta)} \sqrt{a_2 - a_1^2} , \qquad (x, x_0) \geqq \tau_+(\beta)\,\|x\| .$$

mit

$$\frac{\tau_-(\beta)}{\tau_+(\beta)} = \frac{1}{2}\,[(4 + \beta^2)^{1/2} - \beta] ,$$

$$\tau_+(\beta) = \left\{\frac{1}{2}\,[1 + \beta\,(4 + \beta^2)^{-1/2}]\right\}^{1/2} .$$

Dies sind die in [3] angegebenen Ungleichungen. Bei festem A läßt sich die obere Grenze der β, die die Bedingung (6) erfüllen, nur schwer explizit berechnen. Einen im allgemeinen brauchbaren Wert β erhält man in folgender Weise. Sei Q der Projektor auf x_0 und $P = I - Q$, sei μ der größte Eigenwert von $P\,A$. Ist $\mu < a_1$, so ist $\beta = (a_1 - \mu)\,(a_2 - a_1^2)^{-1/2}$ möglich (vgl. [3], dort wird auch der Zusammenhang mit dem Satz von TEMPLE geklärt).

Beispiel: Für $n = 4$ sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von PAP sind 0 und $\pm\sqrt{2}$. Es ergibt sich $\beta = 4 - 2\sqrt{2}$. Satz 5 ergibt für den Eigenvektor x zu λ_1

$$(x, x_0) \geqq 0.86759\ \|x\|$$

und

$$|a_1 - \lambda_1| \leqq 0.2866\ .$$

Wegen $\lambda_1 \geqq a_1$ folgt

$$2 \leqq \lambda_1 \leqq 2.2866$$

Der Satz von TEMPLE ergibt dagegen nur

$$\lambda_1 \leqq 2.4268\ .$$

Im Anschluß an Satz 3 wurde bemerkt, daß für die Einschließung von Eigenwert und Eigenvektor verschiedene Kegel zu nehmen sind. Dies ist nur ein Spezialfall eines allgemeineren Prinzips (wir beschränken uns wieder auf den Fall endlicher Dimension): Sei $X = \mathbf{R}^n$, seien $K_1 \subset K_2 \subset X$ zwei Kegel mit inneren Punkten und $A(K_i) \subset K_i$, $i = 1, 2$. Offenbar liefert K_1 die bessere Abschätzung für den Eigenvektor. Sei $x_0 \in \mathring{K}_1$.

Wegen

$$m_1^{(i)} = \sup\{\alpha : A\,x_0 - \alpha\,x_0 \in K_i\}$$

$$m_2^{(i)} = \inf\{\alpha : \alpha\,x_0 - A\,x_0 \in K_i\}$$

und $m_1^{(1)} \leqq m_1^{(2)} \leqq m_2^{(2)} \leqq m_2^{(1)}$ ergibt sich mit K_2 die bessere Einschließung des Eigenwertes.

Das Iterationsverfahren zur Bestimmung des Spektralradius läßt sich hier einordnen. Sei K ein Kegel mit inneren Punkten, $A(K) \subset K$ und A nichtsingulär. Dann ist auch $K_j = \{x : A^j x \in K\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ ein Kegel, und es gilt $A(K_j) \subset K_j$, $K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots$. Wegen

$$A\,x_0 - \alpha\,x_0 \in K_j \Leftrightarrow A(A^j x_0) - \alpha\,A^j x_0 \in K$$

ist die Quotientenbildung mit den iterierten Vektoren (bezüglich des Kegels K) äquivalent zur Quotientenbildung mit dem Vektor x_0 bezüglich der iterierten Kegel K_j.

Literatur

1 E. BOHL, Eigenwertaufgaben bei monotonen Operatoren und Fehlerabschätzungen für Operatorgleichungen, Arch. Rat. Mech. Anal. **22**, S. 313 – 332 (1966).
2 L. COLLATZ, Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen von Matrizen, Math. Z. **48**, S. 221 – 226 (1942).
3 K. P. HADELER, Anwendung von Fixpunktsätzen auf nichtlineare Eigenwertaufgaben. Math. Z. **112**, S. 181 – 189 (1969)
4 M. A. KRASNOSELSKIJ, Positive Solutions of Operator Equations. Groningen 1964.

Anschrift: Dr. LUDWIG ELSNER, Dr. KARL-PETER HADELER, Institut für angewandte Mathematik der Universität Hamburg, 2000 Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 67/69

G. RADACH

Verbesserung der Einschließung nach Adler für die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Bipotentialgleichung

Meinem Lehrer Herrn Prof. Dr. Dr. h. c. LOTHAR COLLATZ zum 60. Geburtstag am 6. 7. 1970 gewidmet

Für den Gradienten der Lösung der I. Randwertaufgabe der Bipotentialgleichung

$$\Delta\Delta u = 0 \text{ in } G; \quad u = f(s)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g(s) \text{ auf } \Gamma \tag{1}$$

in einem Gebiet G mit Rand Γ (s Bogenlänge, n Richtung der inneren Normalen auf Γ) läßt sich eine Verschärfung der Abschätzung von ADLER [1] erhalten, wenn man Ergebnisse aus der Potentialtheorie heranzieht. Mit der Gradientenabschätzung folgen punktabhängige obere und untere Schranken für die Lösung selbst. Die Abschätzungen werden an einem Beispiel mit denen von BRAMBLE und PAYNE [2] [4] verglichen.

Es seien $f, f' = \partial f/\partial s$ und g stetige Funktionen der Bogenlänge. Für den Rand Γ sei die folgende Voraussetzung (V) erfüllt:

(V): (V_1) Γ besteht aus höchstens endlich vielen punktfremden geschlossenen JORDANkurven Γ_j ($j = 0, 1, \ldots, N$), wobei etwa Γ_0 als „Außenrand" die übrigen Γ_j ($j = 1, \ldots, N$) umfaßt.
(V_2) Γ besitzt in jedem Punkt eine Tangente, die sich stetig mit dem Randpunkt ändert.
(V_3) Es gibt eine Zahl $R > 0$, so daß zu jedem Randpunkt $Q_0 \in \Gamma$ ein Kreis mit Radius R existiert derart, daß Q_0 auf dem Kreisrand liegt und daß das Innere des Kreises ganz in G enthalten ist.
Wegen (V_2) kann man in jedem Randpunkt $Q \in \Gamma$ ein lokales kartesisches Koordinatensystem (x_1^Q, x_2^Q) mit Ursprung Q einführen, dessen positive x_1^Q-Achse mit n zusammenfällt. $Z(Q, R)$ sei derjenige zusammenhängende Bogen von Γ, der in dem Streifen $|x_1^Q| < \infty$, $|x_2^Q| \leqq R$ liegt. Für einen festen Punkt Q_0 und einen festen Radius R wird $Z_0 = Z(Q_0, R)$ gesetzt.
(V_4) Zu derselben Zahl $R > 0$ wie in (V_3) existiert zu jedem Punkt $Q_0 \in \Gamma$ ein Kreis vom Radius R, dessen Rand den Punkt Q_0 enthält, der überdies wenigstens einen nicht zu G gehörigen Punkt enthält und dessen Inneres keinen Punkt mit dem Bogen Z_0 gemeinsam hat.

Unter den gemachten Voraussetzungen ist (1) eindeutig lösbar, und die Lösung besitzt nach MIRANDA [3] bis in den Rand hinein stetige erste Ableitungen. ADLER leitete für diese Lösung die Abschätzung

$$\max_{P\in B} |\operatorname{grad} u(P)| < \frac{78}{R}\max_{\Gamma}|f| + \left[26400 + (41 + 25\,\Phi)\frac{L}{R}\right] \times$$
$$\times \max_{\Gamma}|f'| + \sqrt{56}\max_{\Gamma}|g| \qquad (B = G + \Gamma) \tag{2}$$

her [1, Satz 1]. Dabei bezeichnen L die Länge des Randes, Φ die Größe

$$\Phi = \max_{0\leqq j\leqq N}\ \sup_{P\in G}\ \max_{Q\in\Gamma_j} |\varphi|;$$

φ (und später ψ) sei der Winkel zwischen dem Vektor $\overrightarrow{QP}$ und der Normalen n (bzw. n_0) im Randpunkt Q (bzw. Q_0), und zwar ist der Winkel von $\overrightarrow{QP}$ zu der Normalen hin orientiert.

Wie man dem Beweis bei ADLER entnimmt, entsteht (2) aus der Abschätzung

$$\max_{P\in B} |\operatorname{grad} u(P)| \leqq N_1 \max_{\Gamma}|f| + N_2 \max_{\Gamma}|f'| + \sqrt{56}\max_{\Gamma}|g| \tag{3}$$

mit

$$N_1 = (\sqrt{56} + 1)\,\frac{64\sqrt{2}}{\pi^2}\,\frac{1}{R} < 77{,}8\,\frac{1}{R}, \tag{4}$$

$$N_2 = (\sqrt{56} + 1)\left[\frac{32\sqrt{2}}{\pi^3}(2\,\Phi + 1)\frac{L}{R} + \frac{2}{\pi}\sup_{P\in G}\int_{\Gamma}\frac{\cos^2\varphi}{r_{PQ}}\,ds_Q + \right.$$
$$+ \frac{1}{\pi}(4 + \sqrt{2})\sup_{Q_0\in\Gamma}\int_{\Gamma}\left(\frac{|\cos\psi|\cos^2\varphi}{r_{PQ}}\right)_{P=Q} ds_Q$$
$$\left. + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}R\sup_{Q_0\in\Gamma}\int_{\Gamma}\left(\frac{|\cos\psi\cos\varphi|}{r_{PQ}^2}|\sin(\psi + \varphi)|\right)_{P=Q_0} ds_Q\right] \tag{5}$$

(r_{PQ} = euklidischer Abstand von P zu Q) dadurch, daß die Integrale in N_2 abgeschätzt werden [1, Lemmata 3, 4, 5]. Das letzte Integral schätzt ADLER ab durch

$$\int_{\Gamma - Z_0} \ldots ds + \int_{Z_0} \ldots ds < \frac{|\Gamma - Z_0|}{R^2} + \frac{6}{R} < \frac{L}{R^2} + \frac{6}{R} \tag{6}$$

($|\gamma|$ bezeichne die Länge des Bogens γ); wegen

$$|\Gamma - Z_0| = L - |Z_0| \leqq L - 2\,R$$

kann man aber $L/R^2 + 4/R$ als obere Schranke wählen.

Die verbleibenden zwei Integrale können mit Hilfe der für das Potential einer Doppelschicht in der Ebene geltenden GAUSSschen Formeln [5, S. 511]

$$\int_{\Gamma}\frac{\cos\varphi}{r_{PQ}}\,ds_Q = \begin{cases} 2\,\pi, & \text{falls } P \in G \\ \pi, & \text{falls } P \in \Gamma \\ 0, & \text{falls } P \in \complement B \end{cases} \tag{7}$$

abgeschätzt werden. Γ bezeichnet dabei eine LJAPUNOWsche Randkurve, genügt also den Bedingungen [5, S. 489]