ZAMM, 51 570 (1971)

L. Elsner

## Bemerkung zur Eigenwertabschätzung bei gestörten Diagonalmatrizen

Es sei $\Delta = \operatorname{diag}(d_1, \ldots d_n)$ eine Diagonalmatrix, $a_i = |d_i - d_1| > 0$ für $i \geqq 2$, $d = \min_{i \geqq 2} a_i$. Stört man $\Delta$ durch eine Matrix $F = (f_{ij})$ mit $f_{ii} = 0$, $|f_{ik}| \leqq \varepsilon$, $i \neq k$, so gibt es unter der Voraussetzung

$$\varepsilon \leqq \frac{d}{n - 2 + 2\sqrt{n-1}} \tag{1}$$

einen Eigenwert $\mu$ von $\Delta + F$ mit

$$|\mu - d_1| \leqq \lambda_1(\varepsilon, d) , \tag{2}$$

wobei

$$\lambda_1(\varepsilon, k) = \frac{1}{2} \{(k - (n-2)\varepsilon) - \sqrt{(k - (n-2)\varepsilon)^2 - 4(n-1)\varepsilon^2}\} \tag{3}$$

ist. Das wurde in [2] gezeigt. Dort wurde auch die folgende Entwicklung angegeben:

$$\lambda_1(\varepsilon, d) = \frac{n-1}{d} \varepsilon^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{d^2} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) . \tag{4}$$

In [1] wurde von H. Dreves mit anderen Mitteln gezeigt, daß es eine Schranke der Form

$$|\mu - d_1| \leqq \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{d_i} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

gibt. Ein Vergleich mit (4) legt den Verdacht nahe, daß man in (2) $(n-1)/d$ durch $\sum_{i \geqq 2} \frac{1}{a_i}$, d. h. $d$ durch das harmonische Mittel $D$ der $a_i$,

$$D = \frac{n-1}{\sum_{i \geqq 2} \frac{1}{a_i}} \tag{5}$$

ersetzen kann. Satz 2 bestätigt diese Vermutung.

Vorweg notieren wir:

**Satz 1:** ([2]). *Ist* $\lambda \in [0, d]$, *ist* $|f_{ik}| \leqq m_i$ $(k = 1, \ldots n, k \neq i)$ *und*

$$\frac{m_1}{m_1 + \lambda} + \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i}{a_i + m_i - \lambda} \leqq 1 , \tag{6}$$

*so gibt es einen Eigenwert* $\mu$ von $\Delta + F$ *mit* $|\mu - d_1| \leqq \lambda$.

**Lemma 1:** *Ist* $\gamma \geqq 0$ *und* $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, *so gilt*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{1 + \gamma x_i} \leqq \frac{m}{\gamma + \frac{m}{\sum x_i}} = \frac{\sum x_i}{1 + \frac{\gamma}{m} \sum x_i} . \tag{7}$$

Der Beweis folgt aus der Konkavität von $f(x) = \frac{x}{1 + \gamma x}$. (7) ist nichts anderes als die Ungleichung

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f(x_i) \leqq f\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i\right) .$$

**Satz 2:** *Ist*

$$\varepsilon \leqq \frac{D}{2(n-1)} , \tag{8}$$

*so existiert ein Eigenwert* $\mu$ *von* $\Delta + F$ *mit*

$$|\mu - d_1| \leqq \lambda_1(\varepsilon, D) . \tag{9}$$

**Beweis:** Sei $s := \lambda_1(\varepsilon, D)$. Aus (8) folgt $s \leqq \varepsilon$, also können wir (7) mit $x_i = 1/a_i$, $i = 2, \ldots, n$, $\gamma = \varepsilon - s$ anwenden und erhalten

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon + s} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\varepsilon}{a_i + \varepsilon - s} \leqq \frac{\varepsilon}{\varepsilon + s} + \frac{(n-1)\varepsilon}{\varepsilon - s + D} .$$

Die letzte Größe ist aber, wie man leicht verifiziert, gleich 1. Nach Satz 1 folgt die Behauptung, q.e.d.

**Bemerkung 1:** Da $\lambda_1(\varepsilon, k)$ in $k$ monoton fällt und $d \leqq D$ ist, ist (9) eine Verbesserung gegenüber (2). (4) zeigt, daß etwa ein Faktor $d/D$ gewonnen wird.

**Bemerkung 2:** Ist $d/D < 1/2$, so gilt (9) sogar in einem größeren $\varepsilon$-Bereich als (2). Ist $d = D$, so fallen die Schranken (2) und (9) zusammen, (2) gilt aber in einem größeren $\varepsilon$-Bereich. Insofern ist Satz 2 nicht als Verallgemeinerung des Ergebnisses von [2] anzusehen.

**Beispiel:** Sei $n = 5$, $\Delta = \operatorname{diag}(0, 1, 2, 4, 4)$. Dann ist $d = 1$, $D = 2$. Die Abschätzung (9) ist anwendbar für $\varepsilon \leqq 0.25$, (2) für $\varepsilon \leqq 1/7$. Für $\varepsilon = 0.1$ ergibt sich

$$\lambda_1(\varepsilon, d) = 0.063 . \qquad \lambda_1(\varepsilon, D) = 0.024 .$$

Mit ähnlichen Mitteln gelingt auch im Falle $d = D$ eine Verbesserung von (2), wenn man die einzelnen Zeilenmaxima von $F$ berücksichtigt. Es sei also

$$m_i = \max_{k \neq i} |f_{ik}| , \qquad m_1 = \varepsilon_1 , \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} m_i .$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt

**Satz 3:** *Ist* $\operatorname{Max}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \leqq \frac{d}{n - 2 + 2\sqrt{n-1}}$, *so existiert ein Eigenwert* $\mu$ *von* $\Delta + F$ *mit*

$$|\mu - d_1| \leqq \frac{1}{2} \{(d - (n-2)\varepsilon_2) - \sqrt{(d - (n-2)\varepsilon_2)^2 - 4(n-1)\varepsilon_1 \varepsilon_2}\} . \tag{10}$$

**Beweis:** Sei $s$ die rechte Seite von (10). $s$ ist reell und $0 \leqq s < d$. Man rechnet nach, daß

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + s} + \frac{(n-1)\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + d - s} = 1 \tag{11}$$

ist. Wir wenden (7) für $m = n - 1$, $x_i = m_i$, $\gamma = 1/(d - s)$ an und erhalten

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + s} + \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i}{d - s + m_i} \leqq \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + s} + \frac{1}{(d-s)} \frac{\sum m_i}{1 + \frac{1}{d-s} \frac{1}{n-1} \sum m_i} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + s} + \frac{(n-1)\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + d - s} = 1 .$$

Satz 1 zeigt nun die Behauptung, q. e. d.

**Beispiel:** Sei $n = 5$, $d = 1$, $m_1 = m_2 = m_3 = 0.1$, $m_4 = m_5 = 0.05$. Dann ergibt (2): $|\mu - d_1| \leqq 0.063$. Mit Satz 3 dagegen erhält man die Schranke 0.041.

**Bemerkung 3:** Es ist leicht möglich, Satz 3 auch auf den Fall zu übertragen, daß mehrere Diagonalelemente gleich $d_1$ sind. Bei Satz 2 ist dieses nicht möglich, da dann die Bedingung, die $s \leqq \varepsilon$ entspricht, nicht mehr erfüllbar ist.

### Literatur

1 H. D. Dreves, Fehlerabschätzung beim QR-Algorithmus. Dissertation Hamburg 1971.
2 L. Elsner, Minimale Gerschgorin-Kreise. ZAMM 48, S. 51 – 56 (1968).
3 L. Elsner, Über Eigenwerteinschließungen mit Hilfe von Gerschgorin-Kreisen. ZAMM 50, S. 381 – 384 (1970).

Manuskripteingang: 2. 2. 1971

*Anschrift*: Dr. L. Elsner, Institut für Angewandte Mathematik I, 8520 Erlangen, Erwin-Rommel-Straße 60 (BRD)

ZAMM 51, 570 – 572 (1971)

H. Ade

## Zur Konstruktion der Greenschen Funktion bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

### 1. Aufgabenstellung

Sei $I = [a, b] \subset \boldsymbol{R}$ ein kompaktes Intervall, $u(x) \in C^n(I)$, $n \in \boldsymbol{N}$, $m \in \boldsymbol{N}$ und $x_k \in I$, $k \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$, so daß $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$. Weiter seien für $i = 1(1)n$,