ZAMM 53, 57 – 60 (1973)

L. ELSNER

Über Birkhoff-Interpolation und Richardson-Extrapolation

In Erweiterung von Arbeiten von Pólya und Schoenberg wird eine Restglieddarstellung für die quasihermitesche Interpolationsaufgabe gewonnen. Da die Extrapolation bei Diskretisierungsverfahren als eine solche Aufgabe gedeutet werden kann, gelingt auf diesem Wege die Herleitung einiger Fehlerdarstellungen bei Extrapolationsaufgaben.

Extending papers of Pólya and Schoenberg we get a remainder theorem for the quasi hermitian interpolation problem. Since extrapolation for discretization methods can be viewed as such a problem we can deduce some remainder formulas for extrapolation methods.

Для квазигермитовой интерполяционной задачи получено путём расширения работ Полия и Шэнберга выражение для остаточных членов. Так как в дискретизационном методе экстраполяцию можно толковать как задачу себе, то удается вывести для задач на экстраполяцию ряд выражений для ошибок.

1. Einleitung

In [8] zeigte SCHOENBERG als Verallgemeinerung eines Ergebnisses von PÓLYA [6], daß die quasihermitesche Interpolationsaufgabe genau dann durch Polynome lösbar ist, wenn die PÓLYA-Bedingung erfüllt ist. Wir zeigen zunächst, daß sich auch die von PÓLYA angegebene Restglieddarstellung auf den quasihermiteschen Fall übertragen läßt und daß sie sogar noch in den Randpunkten gilt.

Dann betrachten wir die RICHARDSON-Extrapolation bei Diskretisierungsverfahren und deuten sie als quasihermitesche Interpolation. Die Anwendung der obigen Restglieddarstellung speziell im Randpunkt $h = 0$ führt zu einigen bekannten Fehlerdarstellungen bei Extrapolationsverfahren.

In einem ergänzenden Abschnitt wird gezeigt, daß die zu extrapolierende Funktion, die i.a. nur diskret vorliegt, als hinreichend oft differenzierbar angesehen werden kann, so daß die Anwendung der Restglieddarstellung sinnvoll ist.

2. Bezeichnungen

Die BIRKHOFFsche Interpolationsaufgabe ([1]) ist das folgende Problem: Zu gegebener n-Inzidenzmatrix $E = (e_{ij})$, $i = 1(1)\,k$, $j = 0(1)\,n-1$, $e_{ij} = 0$ oder 1, in der keine Nullzeile vorkommen möge, und zu gegebenen Knoten

$$x_k < x_{k-1} < \cdots < x_1 \tag{1}$$

finde man eine Funktion $p(x)$ mit

$$e_{ij} = 1 \Rightarrow p^{(j)}(x_i) = y_{ij}\,. \tag{2}$$

Dabei sind y_{ij} beliebig gegebene Zahlen.

Sei $m_j = \sum_{i=1}^{k} e_{ij}$, $j = 0(1)\,n-1$ und $M_r = \sum_{j=0}^{r} m_j$, $r = 0(1)\,n-1$. Sei π_s die Menge der Polynome vom Grade $\leqq s$. Die obige Aufgabe heißt regulär (engl. poised), wenn sie für jede rechte Seite genau durch ein $p \in \pi_{n-1}$ lösbar ist. PÓLYA [6] zeigte, daß für $k = 2$ die Regularität gleichbedeutend mit der PÓLYA-Bedingung

$$M_i \geqq i+1 \qquad i = 0(1)\,n-2 \tag{3}$$

ist. SCHOENBERG verallgemeinerte dieses Ergebnis auf den quasihermiteschen Fall

$$1 < i < k \wedge e_{ij} = 1 \wedge j' \leqq j \Rightarrow e_{ij'} = 1\,,$$

d. h. daß in den inneren Knoten hermitesche Bedingungen vorgeschrieben sind.

3. Eine Restglieddarstellung

Wir zeigen, daß eine für $k = 2$ in [6] angegebene Restglieddarstellung übertragen werden kann. Es sei im folgenden eine quasihermitesche Interpolationsaufgabe vorgelegt, und die PÓLYA-Bedingung (3) sei erfüllt. Wir zitieren ein Ergebnis aus [8]:

Lemma: *Sei $\varphi(x) \in C^{n-1}[x_k, x_1]$ und es gelte*

$$e_{ij} = 1 \Rightarrow \varphi^{(j)}(x_i) = 0\,. \tag{4}$$

Dann hat jede der Funktionen $\varphi^{(\nu)}(x)$, $\nu = 0(1)\,n-1$ in $[x_k, x_1]$ mindestens $M_\nu - \nu\ (\geqq 1)$ Nullstellen.

Sei $\hat{M} = \{x_i\colon 1 \leqq i \leqq k,\ e_{i0} = 1\}$, $M = [x_k, x_1] - \hat{M}$. Analog zu PÓLYAS Vorgehen in [6] beweisen wir nun

Korollar: *Ist zusätzlich $\psi(\hat{x}) = 0$ für ein $\hat{x} \in M$, ist $\psi \in C^n[x_k, x_1]$, so gibt es $\xi \in (x_k, x_1)$ mit*

$$\psi^{(n)}(\xi) = 0 \,. \tag{5}$$

Beweis: Fügen wir zu den Bedingungen (4) die Forderung $\psi(\hat{x}) = 0$ hinzu, so entspricht das einem Interpolationsproblem mit einer $(n+1)$-Inzidenzmatrix $\tilde{E}$, die aus E durch Einfügen einer Zeile $(1, 0, \ldots, 0)$ (falls $\hat{x} \neq x_1, x_k$) bzw. durch Abänderung einer Null in der ersten Spalte in eine 1 (falls $\hat{x} = x_1$ oder $= x_k$) entsteht. Für die zugehörigen $\tilde{M}_\nu$ gilt $\tilde{M}_\nu = M_\nu + 1$, also ist (3) erfüllt. Die neue Aufgabe ist auch quasihermitesch. Wir können also das Lemma anwenden und erhalten: $\psi^{(n-1)}(x)$ verschwindet an mindestens $\tilde{M}_{n-1} - (n-1) = M_{n-1} + 1 - (n-1) \geqq 2$ Stellen in $[x_k, x_1]$. Daher hat $\psi^{(n)}(x)$ eine Nullstelle in (x_k, x_1).

Wie in [6] folgt hieraus eine Restglieddarstellung.
Sei $f \in C^n[x_k, x_1]$. Die Interpolationsaufgabe

$$e_{ij} = 1 \Rightarrow p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \tag{6}$$

ist durch genau ein $p \in \pi_{n-1}$ lösbar. Außerdem gibt es genau ein Polynom $N(x) \in \pi_n$,

$$N(x) = \frac{x^n}{n!} + \cdots, \tag{7}$$

das die homogenen Bedingungen (4) erfüllt. Das Korollar zeigt $N(x) \neq 0$ für $x \in M$. Für ein solches x sei $C = \big(f(x) - p(x)\big)/N(x)$. Dann erfüllt

$$y(t) = f(t) - p(t) - C\,N(t)$$

die Voraussetzungen des Korollars mit $x = \hat{x}$. Daher gibt es $\xi \in (x_k, x_1)$ mit $y^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - C = 0$ oder

$$f(x) - p(x) = f^{(n)}(\xi)\,N(x) \qquad \xi \in (x_k, x_1)\,, \quad \xi = \xi(x)\,. \tag{8}$$

Da diese Aussage trivialerweise auch für $x \in \hat{M}$ wahr ist, gilt (8) für alle $x \in [x_k, x_1]$.

4. Richardson-Extrapolation als quasihermitesche Interpolation

Sei $f(h)$ eine aus einem Diskretisierungsverfahren mit Schrittweite h gewonnene Näherungslösung für die gesuchte Größe f_0. Wir nehmen an, daß $f(h)$ eine Entwicklung

$$f(h) = f_0 + f_1\,h^{\gamma_1} + \cdots + f_m\,h^{\gamma_m} + o(h^{\gamma_m}) \tag{9}$$

besitzt, $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots$, $\gamma_i \in N$. Wir nehmen an, daß die diskret gegebene Funktion $f(h)$ zu einer Funktion $f \in C^{\gamma_m}(R)$ fortgesetzt werden kann (siehe 6.). Vorliegende Näherungswerte $f(x_i)$, $i = 1(1)\,m$ für f_0 mit

$$0 < x_m < x_{m-1} < \cdots < x_1$$

werden beim Extrapolationsverfahren dadurch verbessert, daß man f an diesen Stellen durch ein Polynom der Form

$$p(x) = p_0 + p_1\,x^{\gamma_1} + \cdots + p_{m-1}\,x^{\gamma_{m-1}} \tag{10}$$

interpoliert, dessen Wert bei $x = 0$, nämlich p_0, i. a. eine bessere Näherung für f_0 darstellt. Es ist dann sicher

$$p^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0) \qquad 0 < \nu < \gamma_m\,, \quad \nu \neq \gamma_i \qquad i = 1(1)\,m-1\,. \tag{11}$$

Zusammen mit

$$p(x_\nu) = f(x_\nu) \qquad \nu = 1(1)\,m \tag{12}$$

ist das eine quasihermitesche Interpolationsaufgabe, die die PÓLYA-Bedingung (3) erfüllt.

5. Fehlerdarstellungen

Wir können also die Restglieddarstellung (8) speziell bei $x = 0$ heranziehen und erhalten so einen Ausdruck für den Fehler $f_0 - p_0$. In einigen Fällen wollen wir den dabei auftretenden Faktor $N(0)$ bestimmen.
Sei

$$\gamma_\nu = \gamma + (\nu - 1)\,\beta \qquad \nu = 1(1)\,m\,. \tag{13}$$

Dieser Fall tritt bei der Quadratur mit Hilfe von NEWTON-COTES-Formeln auf. Hierbei kann p_0 mit Hilfe des NEVILLE-AITKEN-Algorithmus bestimmt werden ([3], [5], [7]). Wegen (11) hat $N(x)$ bis auf einen Faktor die Form

$$N_1(x) = 1 + n_1\,x^{\gamma_1} + \cdots + n_m\,x^{\gamma_m}\,. \tag{14}$$

Die Bedingungen $N_1(x_\nu) = 0$, $\nu = 1(1)\,m$ führen auf

$$n_1 + n_2\,y_\nu + \cdots + n_m\,y_\nu^{m-1} = -\,y_\nu^{-\alpha} \qquad \nu = 1(1)\,m\,.$$

wo $y_\nu = x_\nu^\beta$, $\alpha = \gamma/\beta$ ist. Bei dieser gewöhnlichen Interpolationsaufgabe weiß man, daß n_m die $(m-1)$-te Steigung der Funktion $g(y) = -\,y^{-\alpha}$ an den Stellen $y_1, \ldots, y_m$ ist. Daher gilt

$$n_m = \frac{1}{(m-1)!}\,g^{(m-1)}(\eta) = -\binom{-\alpha}{m-1}\eta^{-\alpha-m+1}\,. \qquad y_m < \eta < y_1\,.$$

(8) ergibt folglich

$$f_0 - p_0 = f^{(\gamma_m)}(\xi)\, N(0) = -\frac{f^{(\gamma_m)}(\xi)}{\gamma_m!} \frac{\tilde{\xi}^{\gamma_m}}{\binom{-\alpha}{m-1}} \qquad 0 < \xi < x_1\,, \quad x_m < \tilde{\xi} < x_1\,. \tag{15}$$

Das ist im wesentlichen eine von Schmidt [7] angegebene Darstellung. Für ganzes α kann n_m explizit angegeben werden. Dann ist $N_1(x) = \tilde{N}_1(y)$ ein Polynom in $y = x^\beta$. Beim Ansatz

$$\tilde{N}_1(y) = (y - y_1) \cdots (y - y_m)\,(\psi_0 + \psi_1\, y + \cdots + \psi_{\alpha-1}\, y^{\alpha-1}) = \pi(y)\, \psi(y)$$

zeigen die restlichen Forderungen $\tilde{N}_1(0) = 1$, $\tilde{N}_1^{(\nu)}(0) = 0$, $\nu = 1(1)\,\alpha - 1$, daß $\psi(y)$ der Anfang der Taylorreihe von $\pi(y)^{-1}$ um $y = 0$ ist. Aus

$$(-1)^m\, y_1 \cdots y_m \frac{1}{\pi(y)} = \left(1 - \frac{y}{y_1}\right)^{-1} \cdots \left(1 - \frac{y}{y_m}\right)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} y^r\, S_r(y_1, \ldots, y_m)$$

mit

$$S_r(y_1, \ldots, y_m) = \sum_{s_1, \ldots, s_r} y_1^{-s_1}\, y_2^{-s_2} \cdots y_m^{-s_m}\,,$$

wobei über alle $\binom{m + r - 1}{r}$ m-Tupel $s_1, \ldots, s_m$ $(0 \leqq s_\nu \leqq r,\ s_\nu \in N)$ mit $\sum s_\nu = r$ zu summieren ist, kann man $n_m = \psi_{\alpha-1}$ ablesen und erhält

$$f_0 - p_0 = (-1)^m \frac{(x_1 \cdots x_m)^\beta}{S_{\alpha-1}(x_1^\beta, \ldots, x_m^\beta)} \frac{f^{(\gamma_m)}(\xi)}{\gamma_m!}\,.$$

Die ersten S_ν kann man leicht berechnen. Mit $\sum_\nu = \sum_{i=1}^{m} y_i^{-\nu}$ erhält man:

$$S_0 = 1;\ S_1 = \Sigma_1; \qquad S_2 = (\Sigma_1^2 + \Sigma_2)/2; \qquad S_3 = \frac{1}{6}\,\Sigma_1^3 + \frac{1}{2}\,\Sigma_1\,\Sigma_2 + \frac{1}{3}\,\Sigma_3\,.$$

6. Ergänzung

Um eine Lücke in 4. und 5. zu schließen, zeigen wir, daß die an den Stützstellen $x_1 > x_2 > \cdots > 0$, $\lim x_i = 0$ gegebene Funktion f zu einer γ_m-fach differenzierbaren Funktion fortgesetzt werden kann, falls (9) vorliegt und es ein $0 < b < 1$ gibt mit

$$x_{i+1} \leqq b\, x_i \qquad i = 1, 2, \ldots\,. \tag{17}$$

Das ist offenbar nur bei $x = 0$ problematisch.

Wir können in (9) ohne Einschränkung $f_0 = f_1 = \cdots = f_m = 0$ setzen und betrachten die Aufgabe, durch die Punkte $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \ldots$, $f(x_i) = o(x_i^r)$, $r = \gamma_m$, eine bei 0 r-fach differenzierbare Funktion $g(x)$ zu legen. Diese Aufgabe ist im allgemeinen Rahmen in [9] gelöst, wir geben der Vollständigkeit halber einen einfachen Beweis an:

Sei $h(x) \in \pi_{2r+1}$ die Lösung der hermiteschen Interpolationsaufgabe

$$h(0) = 0,\ h(1) = 1,\ h^{(\nu)}(0) = h^{(\nu)}(1) = 0,\ \nu = 1(1)\, r\,,$$

und sei S eine Schranke für $h^{(r)}(x)$ in $[0, 1]$. Dann löst

$$g_k(x) = f(x_k) + \big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\big)\, h\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)$$

die Aufgabe $g_k(x_k) = f(x_k)$, $g_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$, $g_k^{(\nu)}(x_k) = g_k^{(\nu)}(x_{k+1}) = 0$, $\nu = 1(1)\, r$, und es ist für $x \in [x_{k+1}, x_k]$

$$|g^{(r)}(x)| \leqq S\, \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{(x_{k+1} - x_k)^r}\,.$$

Wegen (17) und $f(x_i) = o(x_i^r)$ geht diese Schranke gegen 0 für $k \to \infty$. Daher ist

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq 0 \\ g_k(x) & x \in [x_{k+1}, x_k] \end{cases}$$

eine bei 0 r-mal differenzierbare Funktion, die die gestellte Aufgabe löst, q. e. d.

Literatur

1 BIRKHOFF, G. D., General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and integration, Trans. Amer. Math. Soc. 7, pp. 107–136 (1906).
2 BULIRSCH, R. and STOER, J., Fehlerabschätzungen und Extrapolation mit rationalen Funktionen bei Verfahren vom Richardson-Typus, Numer. Math. 6, pp. 413–427 (1964).
3 ELSNER, L., Zur Richardson-Extrapolation bei der Simpsonschen Integrationsformel, ZAMM 46, T 47–T 48 (1966).
4 FERGUSON, D., The Question of Uniqueness for G. D. Birkhoff Interpolation Problems, J. Appr. Th. 2, pp. 1–28 (1969).
5 OLIVER, J., The Efficiency of Extrapolation Methods for Numerical Integration, Numer. Math. 17, pp. 17–32 (1971).
6 PÓLYA, G., Bemerkung zur Interpolation und zur Näherungstheorie der Balkenbiegung, ZAMM 11, S. 445–449 (1931).
7 SCHMIDT, J. W., Asymptotische Einschließung bei konvergenzbeschleunigenden Verfahren II, Numer. Math. 12, S. 53–56 (1968).
8 SCHOENBERG, I. J., On Hermite-Birkhoff Interpolation, J. Math. Anal. Appl. 16, pp. 538–543 (1966).
9 WHITNEY, H., Analytic extensions of differentiable functions defined on closed sets, Trans. Amer. Math. Soc. 36, pp. 369–387 (1934).

Eingereicht am 2. 4. 1972

Anschrift: Prof. Dr. LUDWIG ELSNER, Institut für Angewandte Mathematik I, 852 Erlangen, Martensstraße 1 (BRD)